УДК 519.21

И. В. Скороход

О предельном поведении колебательной системы при наличии случайных возмущений параметров этой системы. I

В настоящей работе исследуется поведение линейной системы второго порядка при наличии случайного возмущения. Это случайное возмущение представляется эргодическим марковским процессом с конечным множеством состояний, зависящим от «быстро меняющегося» времени t / ε. Рассматривается случай, когда усредненное уравнение превращается в уравнение гармонических колебаний, т. е. в уравнение равномерного движения по окружности. Исследуется асимптотическое поведение угловой координаты, устанавливается, что на отрезках времени порядка $O(1/\varepsilon)$ она отличается от предельной величины на диффузионный процесс на окружности с постоянными коэффициентами. Они вычислены в работе. Следует отметить, что ранее рассматривался лишь случай, когда усредненное уравнение или невырожденно, или описывает неподвижную систему (см. [1—3] и приведенную там библиографию).

Рассмотрим систему уравнений

$$dx(t)/dt = a_{11}x(t) + a_{12}y(t),$$
$$dy(t)/dt = a_{21}x(t) + a_{22}y(t). \tag{1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнений подвержены быстрым случайным флуктуациям $a_{ik} = a_{ik}(\nu_\varepsilon(t))$, где $\nu_\varepsilon(t)$ — однородный процесс Маркова с конечным множеством состояний, $\nu_\varepsilon(t) = \nu(t/\varepsilon)$, а начальное распределение x и y не зависит от ε.

Согласно результатам Р. З. Хасьминского [4] решение $x(t) = x_\varepsilon(t)$ системы

$$dx_\varepsilon(t)/dt = a_{11}(\nu_\varepsilon(t))\,x_\varepsilon(t) + a_{12}(\nu_\varepsilon(t))\,y_\varepsilon(t),$$
$$dy_\varepsilon(t)/dt = a_{21}(\nu_\varepsilon(t))\,x_\varepsilon(t) + a_{22}(\nu_\varepsilon(t))\,y_\varepsilon(t) \tag{2}$$

при $\varepsilon \to 0$ сходится по вероятности к решению системы

$$d\bar{x}(t)/dt = \bar{a}_{11}\bar{x}(t) + \bar{a}_{12}\bar{y}(t),$$
$$d\bar{y}(t)/dt = \bar{a}_{21}\bar{x}(t) + \bar{a}_{22}\bar{y}(t), \tag{3}$$

если только существуют неслучайные пределы

$$\bar{a}_{ik} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a_{ik}(\nu(t))\,dt, \quad t \in [0, T].$$

В случае, когда решение предельной системы (3) — одна точка (т. е. усредненное уравнение описывает неподвижную систему), задача исследования скорости приближения решения системы (2) к этой точке рассматривалась в работах [2—4].

В данной работе исследуется случай, когда решение предельной системы представляет собой цикл. Задача изучения «скорости вхождения в предельный цикл» разбивается на две: исследование асимптотики угла поворота $\varphi(t)$ и асимптотики радиуса $r(t)$. Таким образом, предельная система (3) имеет вид

$$d\bar{x}(t)/dt = -\bar{y}(t), \quad d\bar{y}(t)/dt = \bar{x}(t), \tag{4}$$

т. е. описывает гармонические колебания. Выясним характер асимптотического отклонения допредельного колебания от предельного гармонического.

Положим

$$\varphi_\varepsilon(t) = \mathrm{Arg}\,[x_\varepsilon(t) + iy_\varepsilon(t)],$$
$$\nu_\varepsilon(t) = \sqrt{x_\varepsilon^2(t) + y_\varepsilon^2(t)}.$$

Легко видеть, что функция $\varphi_\varepsilon(t)$ удовлетворяет соотношению

$$d\varphi_\varepsilon/dt = 1 + (a_{21} - 1)\cos^2\varphi_\varepsilon - (a_{21} + 1)\sin^2\varphi_\varepsilon + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi_\varepsilon \sin\varphi_\varepsilon.$$

Пусть теперь $\varphi_\varepsilon = t + \hat{\varphi}_\varepsilon$. Тогда

$$d\hat{\varphi}_\varepsilon/dt = (a_{21} - 1)\cos^2(\hat{\varphi}_\varepsilon + t) + (a_{22} - a_{11})\cos(\hat{\varphi}_\varepsilon + t)\cdot\sin(\hat{\varphi}_\varepsilon + t) -$$
$$- (a_{12} - 1)\sin^2(\hat{\varphi}_\varepsilon + t). \tag{5}$$

Функция $r_\varepsilon(t)$ удовлетворяет соотношению

$$r_\varepsilon(t) = r(0)\exp\Big\{\int_0^t [a_{11}(\nu_\varepsilon(s))\cos^2\varphi_\varepsilon(s) + (a_{12}(\nu_\varepsilon(s)) + a_{21}(\nu_\varepsilon(s))\cos\varphi_\varepsilon(s) \times$$
$$\times \sin\varphi_\varepsilon(s) + a_{22}(\nu_\varepsilon(s))\sin^2\varphi_\varepsilon(s)]\,ds. \tag{6}$$

Обозначим правую часть (5) через $G(\nu_\varepsilon(t), \hat{\varphi}_\varepsilon(t), t)$:

$$d\hat{\varphi}_\varepsilon/dt = G(\nu_\varepsilon(t), \hat{\varphi}_\varepsilon(t), t). \tag{7}$$

Функция $G(k, \varphi, t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\Sigma G(k, \varphi, t)\pi_k = 0 \quad \forall\varphi, t$;

2) $G(k, \varphi, t)$ периодична по φ, t с периодом 2π. Здесь π_k — эргодические вероятности для $\nu(t)$.

Здесь π_k — эргодические вероятности для $\nu(t)$.

Пусть $F(\varphi)$ — периодическая, трижды дифференцируемая функция

$$G_1(k, \varphi, t) = F'(\varphi)G(k, \varphi, t), \tag{8}$$

$$G_2(k, j, \varphi, t) = \frac{\partial G_1}{\partial\varphi}(k, \varphi, t)G(j, \varphi, t). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $\nu(t)$ — эргодическая цепь Маркова с эргодическими вероятностями π_k и вероятностями перехода*

$$P_{ij}(t) = P\{\nu(t) = j/\nu(0) = i\}. \tag{10}$$

Пусть $\alpha > 0$, $c > 0$ таковы, что

$$|P_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant Ce^{-\alpha t}. \tag{11}$$

Положим

$$r(j, k) = \int_0^\infty (P_{kj}(t) - \pi_j)\,dt, \quad H_1 = \frac{\pi}{4}(3A_1 + A_2 + 3A_3 + 2A_4),$$

$$H_2 = \frac{\pi}{2}(B_1 + B_2),$$

где

$$\begin{gathered}
A_1 = \sum_{j,k}(a_{21}^{(j)} - 1)(a_{21}^{(k)} - 1)\pi_j r(j, k),\\
A_2 = \sum_{j,k}(a_{22}^{(j)} - a_{11}^{(j)})(a_{22}^{(k)} - a_{11}^{(k)})\pi_j r(j, k),\\
A_3 = \sum_{j,k}(a_{12}^{(j)} + 1)(a_{12}^{(k)} + 1)\pi_j r(j, k),\\
A_4 = \sum_{j,k}(a_{12}^{(j)} + 1)(a_{21}^{(k)} - 1)\pi_j r(j, k),\\
B_1 = -2\sum_{j,k}(a_{21}^{(j)} - 1)(a_{22}^{(k)} - a_{11}^{(k)})\pi_j r(j, k),\\
B_2 = -\sum_{j,k}(a_{22}^{(j)} - a_{11}^{(j)})(a_{12}^{(k)} + 1)\pi_j r(j, k).
\end{gathered} \tag{12}$$

Тогда процесс $\hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к диффузионному процессу $\hat{\varphi}(t)$ на окружности единичного радиуса с постоянными коэффициентами H_1 и H_2 (*H_1 — коэффициент сноса, H_2 — коэффициент диффузии*).

Доказательство этой теоремы будет опираться на утверждение, которое является следствием предельной теоремы для марковских процессов [5, с. 415] (теорема 9).

Лемма 1. *Пусть $\theta_\varepsilon(t)$ — последовательность марковских процессов на окружности, для которых выполнено условие: какова бы ни была трижды непрерывно дифференцируемая функция $F(\theta)$, при некоторых $h_\varepsilon \to 0$,*

$\varepsilon \to 0$

$$M[F(\theta_\varepsilon(t+h_\varepsilon)) - F(\theta_\varepsilon(t))/\theta_\varepsilon(t-h_\varepsilon)] = \mathcal{K}_1(t/\varepsilon, \theta_\varepsilon(t-h_\varepsilon)) F'(\theta_\varepsilon(t-h_\varepsilon)) + \\ + \frac{1}{2}\mathcal{K}_2(t/\varepsilon, \theta_\varepsilon(t-h_\varepsilon)) F''(\theta_\varepsilon(t-h_\varepsilon)) + o(h_\varepsilon), \tag{13}$$

где функции $\mathcal{K}_1(t, \theta)$ и $\mathcal{K}_2(t, \theta)$ периодические по t, θ с периодом 2π. Тогда распределения $\theta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходятся к распределению диффузионного процесса на окружности с коэффициентом сноса $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_1(t, \theta)\,dt = \mathcal{K}_1(\theta)$ с коэффициентом диффузии $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_2(t, \theta)\,dt = \mathcal{K}_2(\theta)$.

Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть $F(\varphi)$ — 2π-периодическая трижды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда*

$$M[F(\hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon + h/\varepsilon)/\nu(t/\varepsilon) = k)] = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon)) + M_k \int_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu(t/\varepsilon + s/\varepsilon), \\ \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon + s)\,ds + M_k \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} G_2(\nu(t/\varepsilon + s/\varepsilon), \ \nu(t/\varepsilon + u/\varepsilon)\,\hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon + s) \times \\ \times du\,ds + O(h^3/\varepsilon^3),$$

где M_k *— условное математическое ожидание при условии $\nu(t/\varepsilon) = k$.*

Доказательство. Отметим, что функция G_1 2π-периодична по φ, t и удовлетворяет условию 1. Рассмотрим (полагая для простоты $t = 0$)

$$M[F(\hat{\varphi}_\varepsilon(h/\varepsilon)/\nu_\varepsilon(0) = k] = M_k F(\hat{\varphi}_\varepsilon(h/\varepsilon)) = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(0)) + M_k \int_0^{h/\varepsilon} F'(\hat{\varphi}_\varepsilon(s)) \times \\ \times G(\nu_\varepsilon(s), \hat{\varphi}_\varepsilon(s), s)\,ds = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(0)) + M_k \int_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(s), s)\,ds.$$

Из этого соотношения получаем

$$M_k F(\hat{\varphi}_\varepsilon(h/\varepsilon)) = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(0)) + M_k \int_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)\,ds + \\ + M_k \int_0^{h/\varepsilon} [G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(s), s) - G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)]\,ds.$$

Поскольку

$$G_1(k, \varphi_\varepsilon(s), s) - G_1(k, \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial\varphi} G_1(k, \hat{\varphi}_\varepsilon(u), s)\, G(\nu(u/s), \hat{\varphi}_\varepsilon(u), s)\,du = \\ = \int_0^s G_2(k, \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(u), s)\,du,$$

то

$$M_k F(\hat{\varphi}_\varepsilon(h/\varepsilon)) = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(0)) + M_k \int_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)\,ds + M_k \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} G_2(\nu(s/\varepsilon), \\ \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)\,du\,ds + M_k \int_0^{h/\varepsilon}\int_0^{s} [G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(u), s) - G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon), \\ \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)]\,du\,ds.$$

Заметим, что из гладкости функций G и G_2 вытекает, что для некоторых $L > 0$, $L_1 > 0$

$$|G_2(k, j, \hat{\varphi}_1, s) - G_2(k, j, \hat{\varphi}_2, s)| \leqslant L|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|,$$

$$|\hat{\varphi}_\varepsilon(u) - \hat{\varphi}(0)| \leqslant L_1 u.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s [G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(u), s) - G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon),$$

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(0), s]\,duds \leqslant LL_1 \int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s (udu)\,ds = O(h^3/\varepsilon^3)$$

и

$$M_k F(\hat{\varphi}_\varepsilon(h/\varepsilon)) = F(\hat{\varphi}_\varepsilon(0)) + M_k \int\limits_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu(s/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)\,ds +$$

$$+ M_k \int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(0), s)\,duds + O(h^3/\varepsilon^3).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Предположим, что $R(s)$ — 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{h/\varepsilon} R(s + t/\varepsilon)[P_{kj}(s/\varepsilon) - \pi_j]\,ds = \varepsilon r(j, k) R(t/\varepsilon) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{-\alpha h/\varepsilon^2}).$$

Доказательство. Интегрируя по частям и используя оценку **(11)**, получаем

$$\int\limits_0^{h/\varepsilon} R(s + t/\varepsilon)[P_{kj}(s/\varepsilon) - \pi_j]\,ds = \int\limits_0^{\infty} R(s + t/\varepsilon)[P_{kj}(s/\varepsilon) - \pi_j]\,ds + O\Big(\int\limits_{h/\varepsilon}^{\infty} e^{-\alpha s/\varepsilon} ds\Big) =$$

$$= O(\varepsilon e^{-\alpha h/\varepsilon^2}) + \varepsilon \int\limits_0^{\infty} R(s + t/\varepsilon)\, d\Big[\int\limits_{s/\varepsilon}^{\infty} (\pi_j - P_{kj}(u))\,du\Big] = O(\varepsilon e^{-\alpha h/\varepsilon^2}) +$$

$$+ \varepsilon R(t/\varepsilon) \int\limits_0^{\infty} (P_{kj}(u) - \pi_j)\,du + \varepsilon \int\limits_0^{\infty} R'(s + t/\varepsilon) \int\limits_{s/\varepsilon}^{\infty} (P_{kj}(u) - \pi_j)\,du.$$

Поскольку $\varepsilon \int\limits_0^{\infty} |R'|\, e^{-\alpha s/\varepsilon} ds = O(\varepsilon^2)$, то

$$\int\limits_0^{h/\varepsilon} R(s + t/\varepsilon)[P_{kj}(s/\varepsilon) - \pi_j]\,ds = O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{-\alpha h/\varepsilon^2}) + \varepsilon r(j, k) R(t/\varepsilon).$$

Лемма 3 доказана.

Следствие.

$$M_k \int\limits_0^{h/\varepsilon} G_1(\nu_\varepsilon(s/\varepsilon + t/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon + s))\,ds = \varepsilon \sum_j r(j, \nu_\varepsilon(t/\varepsilon)) \cdot G_1(j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon) +$$

$$+ O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{-\alpha h/\varepsilon^2}).$$

Лемма 4. *Для функции $G_2(k, j, \hat{\varphi}, t)$ справедливо соотношение*

$$M_k \int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_0^s G_2(\nu(t/\varepsilon + s/\varepsilon), \nu(t/\varepsilon + u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon + s)\,duds =$$

$$= h \sum_j \pi_j r(l, j) G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon) + o(h).$$

Доказательство. Используя однородность $\nu(t)$ и то, что функция $G_2(k, j, \hat{\varphi}, t)$ удовлетворяет (8), имеем

$$M_k \int_0^{h/\varepsilon} \int_0^{s} G_2(\nu(s/\varepsilon), \nu(u/\varepsilon), \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), s+t/\varepsilon)\, du ds = \int_0^{h/\varepsilon} \int_0^{s} \sum_j P_{kj}(u/\varepsilon) P_{jl}((s-u)/\varepsilon) \times$$

$$\times G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), s+t/\varepsilon)\, du ds = \int_0^{h/\varepsilon} \int_0^{s} \sum_j P_{kj}(u/\varepsilon) [P_{jl}((s-u)/\varepsilon) - \pi_l] \times$$

$$\times G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), s+t/\varepsilon)\, du ds = \int_0^{h/\varepsilon} \sum_j P_{kj}(u/\varepsilon)\, du \Big[\int_0^{h/\varepsilon - u} [P_{jl}(v/\varepsilon) - \pi_j] \times$$

$$\times G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), u+v+t/\varepsilon)\, dv \Big].$$

Поскольку из леммы 3 следует

$$\int_0^{h/\varepsilon - u} [P_{jl}(v/\varepsilon) - \pi_l] G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), u+v+t/\varepsilon)\, du dv = \varepsilon r(l, j) G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon),$$

$$u + t/\varepsilon) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{-\alpha(h/\varepsilon^2 - u/\varepsilon)}),$$

$$\int_0^{h/\varepsilon} e^{-\alpha(h/\varepsilon^2 - u/\varepsilon)}\, du = O(\varepsilon^2) = o(h),$$

то

$$M_k \int_0^{h/\varepsilon} \int_0^{s} G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), u+v+t/\varepsilon)\, du ds = \int_0^{h/\varepsilon} \sum_j P_{kj}(u/\varepsilon)\, \varepsilon r(l, j) G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon),$$

$$u + t/\varepsilon)\, du = O(\varepsilon^2) + \varepsilon \int_0^{h/\varepsilon} \sum_j \pi_j P_{lj} G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), u + t/\varepsilon)\, du =$$

$$= o(h) + h \sum_j \pi_j P_{lj} G_2(l, j, \hat{\varphi}_\varepsilon\, t/\varepsilon).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть*

$$Q(i, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon) = \varepsilon \sum_j r(j, i)\, G_1(j, \hat{\varphi}_\varepsilon(t/\varepsilon), t/\varepsilon).$$

Тогда справедлива оценка

$$M(Q(\nu_\varepsilon(t/\varepsilon), \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon)/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)) = o(h).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$M\Big(\varepsilon \sum_j G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon)\, r(j, \nu_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)\Big) = \varepsilon \sum_j M[(G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon) -$$

$$- G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon)\, r(j, \nu_\varepsilon\, t/\varepsilon))/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)] +$$

$$+ \varepsilon \sum_j M[G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon)\, r(j, \nu_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)].$$

Оценим второе слагаемое правой части:

$$M[r(j, \nu_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon) = k] = \sum_i P_{ki}(h/\varepsilon^2)\, r(j, i) = \sum_i \pi_i r(j, i) + O(e^{-\alpha h/\varepsilon^2}).$$

Но $\sum_i \pi_i r(j, i) = \sum_i \pi_i \int_0^\infty (P_{ij}(u) - \pi_j)\, du = 0$ $\Big($поскольку $\sum_i \pi_i P_{ij}(u) = \pi_j\Big)$, а $O(e^{-\alpha h/\varepsilon^2}) = o(h)$.

Теперь рассмотрим первое слагаемое:

$$G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon) - G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon) = \int\limits_{t/\varepsilon - h/\varepsilon}^{t/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}} G_1(j, \hat{\varphi}(s), s) \times$$

$$\times \frac{d\hat{\varphi}}{ds} ds = \int\limits_{t/\varepsilon - h/\varepsilon}^{t/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}} G_1(j, \hat{\varphi}(s), t/\varepsilon) G(\nu_\varepsilon(s), \hat{\varphi}(s), s) ds.$$

Пользуясь формулой повторных математических ожиданий, получаем

$$M[(G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon) - G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon) \cdot r(j, \nu_\varepsilon(t/\varepsilon))/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)] =$$

$$= \varepsilon M\Big(\int\limits_{t/\varepsilon - h/\varepsilon}^{t/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}}(G_1(j, \hat{\varphi}(s), t/\varepsilon)) G(\nu_\varepsilon(s), \hat{\varphi}(s), s) M(r(j, i))/\nu_\varepsilon(s)) \times$$

$$\times ds/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)).$$

Поскольку функции $\frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}} G_1$ и G ограничены, достаточно оценить

$$M(r(j, i)/\nu_\varepsilon(s) = k) = \sum_i (P_{ki}(t/\varepsilon^2 - s/\varepsilon) - \pi_j r(j, i) = O(e^{-\alpha(t/\varepsilon^2 - s/\varepsilon)}).$$

Сделаем замену переменных $u = t/\varepsilon^2 - s/\varepsilon$, $du = -ds/\varepsilon$. Тогда

$$\varepsilon \int\limits_{t/\varepsilon - h/\varepsilon}^{t/\varepsilon} e^{-\alpha(t/\varepsilon^2 - s/\varepsilon)} ds = \varepsilon^2 \int\limits_0^{h/\varepsilon^2} e^{-\alpha u} du = O(\varepsilon^2).$$

Окончательно имеем

$$M\Big(\varepsilon \sum_j G_1(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon) r(j, i)/\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)) = o(h).$$

Лемма 5 доказана.

Для завершения доказательства теоремы вернемся к утверждению леммы 1.

Рассмотрим приращение

$$\frac{1}{h} M[F(\hat{\varphi}(t/\varepsilon + h/\varepsilon)) - F(\hat{\varphi}(t/\varepsilon))/\hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), \nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)] =$$

$$= M\Big(\sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}}[F'(\hat{\varphi}(t/\varepsilon)) G(k, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon)] G(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon), t/\varepsilon) \pi_j r(j, k)/\hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon),$$

$$\nu_\varepsilon(t/\varepsilon - h/\varepsilon)) + o(h) = F''(\hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon)) \sum_{k,j} G(k, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon) G(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon -$$

$$- h/\varepsilon), t/\varepsilon) \cdot \pi_j r(j, k) + F'(\hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon)) \sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}} G(k, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon) \times$$

$$\times G(j, \hat{\varphi}(t/\varepsilon - h/\varepsilon), t/\varepsilon) \pi_j r(j, k) + o(1).$$

Обозначим коэффициент при F'' через

$$2 \sum_{k,j} G(k, \hat{\varphi}, t) G(j, \hat{\varphi}, t) \pi_j r(j, k) = H_1(t, \hat{\varphi}),$$

$$H_1(\hat{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} H(t, \hat{\varphi}) dt,$$

коэффициент при F' через

$$\sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}} G(k, \hat{\varphi}, t) G(j, \hat{\varphi}, t) \pi_j r(j, k) = H_2(t, \hat{\varphi}),$$

$$H_2(\hat{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(t, \hat{\varphi})\, dt.$$

Записав теперь функцию G в виде

$$G = (a_{21} - 1)\cos^2(\varphi + t) + (a_{22} - a_{11})\cos(\varphi + t)\sin(\varphi + t) - \\ - (a_{12} + 1)\sin^2(\varphi + t)$$

и рассмотрев выражения вида

$$\sum_{k,j} G(k, \varphi, t) G(j, \varphi, t) \pi_j r(j, k),$$

и

$$\sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(k, \varphi, t) G(j, \varphi, t) \pi_j r(j, k),$$

получаем, что коэффициенты H_1 и H_2 постоянны и имеют вид (11), (12). Учитывая теперь лемму 1, получаем утверждение теоремы.

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
2. *Сарафян В. В., Скороход А. В.* О динамических системах с быстрыми переключениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— **31**, вып. 2.
3. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1987.— 328 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— **11**, вып. 3.— С. 444—462.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев

Получено 24.11.87