УДК 519.21

Я. И. Елейко

Предельное распределение для процессов с полумарковским вмешательством случая

Рассмотрим полумарковский процесс x_t с произвольным пространством состояний $(X, \mathscr{B})$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра множеств на X, счетно порождена.

Обозначим $\tau = \inf\{t > 0, \quad x_0 \neq x_t\}$, $F_x(t) = P_x\{\tau \leqslant t\}$, $\varphi_x(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dF_x(t)$,

где P_x — условная вероятность при условии $x_0 = x$. Вложенная цепь Маркова x_{τ_k} эргодическая из стационарным распределением $\Pi(\cdot)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, A) = \pi(A) \qquad \forall\, x \in X,\ A \in \mathscr{B},$$

$$P^k(x, A) = P_x\{x_{\tau_k} \in A\}.$$

В дальнейшем будем предполагать эргодичность вложенной цепи.

Пусть $g(x, y)$ — измеримое ограниченное отображение $(X \times R^+, \mathscr{B} \times \mathscr{B}^+) \to (R^+, \mathscr{B}^+)$. Рассмотрим процесс

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} g(x_0, t), & t > \tau, \\ g(x_{\tau_k}, t - \tau_k), & \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Тогда согласно построению $\tilde{x}_t$ — процесс с марковским вмешательством случая τ.

Целью настоящей работы является изучение предельного распределения $\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}_u du$ без условия конечности средних времен τ. Следует отметить, что эта задача в случае, когда x_t — полумарковский процесс с конечным числом состояний, рассмотрена в [1], а в однородном при $g(x, t) = g(x)$ — в [2]. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть существуют $\alpha \in (0, 1)$ и медленно сменяющаяся в нуле функция $L(s)$ такие, что*

$$\frac{1 - \varphi_x(s)}{s^\alpha L(s)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} a(x) \text{ в среднем по мере } \pi(\cdot), \tag{1}$$

$$\int\limits_X a(x)\, \pi(dx) > 0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t g(x, u)\, du = b(x), \tag{3}$$

$$\int\limits_X b(x)\, \pi(dx) > 0, \tag{4}$$

где $g(x, u) > 0$ — ограниченная измеримая функция.

Тогда для всех точек непрерывности y функции распределения G, x π-почти всюду

$$\lim_{t\to\infty} P_x\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}_u du \leqslant y\right\} = G(y)$$

при $\lambda > \inf_{u,v} g(u, v)$, *где*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda + x}\, dG(x) = \frac{\int_X a(y)(b(y)+\lambda)^{\alpha-1}\pi(dy)}{\int_X a(y)(b(y)+\lambda)^{\alpha}\pi(dy)}.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta_t = \int_0^t \tilde{x}_u du$. Рассмотрим совместное распределение $(\zeta_t, \eta_{t/t}, x_t \in B)$, где $\eta_t = t - \sup_k\{\tau_k < t\}$ — прошедшее время после последнего скачка процесса.

По формуле полной вероятности имеем

$$M_x(e^{-\lambda\zeta_t}, \eta_{t/t} > v, x_t \in B) = \sum_{k=0}^\infty M_x(e^{-\lambda\zeta_t}, \eta_{t/t} > v, x_t \in B, \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^t \int_X M_x(e^{-\lambda\zeta_u}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) \times$$

$$\times M_y(e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \eta_t > tv, \tau > t-u, x_{t-u} \in B) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{t-t_v} \int_X M_x(e^{-\lambda\zeta_u}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) M_y(e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t-u, x_{t-u} \in B) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{t(1-v)} \int_B M_x(e^{-\lambda\zeta_u}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) M_y(e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t-u). \qquad (5)$$

Обозначим

$$M_x(e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) = \Phi_\lambda^{k^*}(x, du, dy), \qquad (6)$$

$$R_\lambda(x, du, dy) = \sum_{k=0}^\infty \Phi_\lambda^{k^*}(x, du, dy). \qquad (7)$$

Тогда (5) в обозначениях (6), (7) примет вид

$$M_x(e^{-\lambda\zeta_t}, \eta_{t/t} > v, x_t \in B) =$$

$$= \int_0^{t(1-v)} \int_X R_\lambda(x, du, dy)\, e^{-\lambda\int_0^{t-u} g(y,z)dz} P_y\{\tau > t-u\} \qquad (8)$$

Будем искать предел, когда параметр λ равен λ/t_m. Тогда из (8) будем иметь

$$M_x(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_{t_m}}, \eta_{t_m}/t_m > v, x_{t_m} \in B) =$$

$$= \int_0^{1-v} \int_X R_{\lambda/t_m}(x, t_m, du, dy)\, e^{-\frac{\lambda}{t_m}\int_0^{t_m(1-u)} g(y,z)dz} P_y\{\tau > t_m(1-u)\} \qquad (9)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа ядра восстановления (7) при фиксированном A. В результате получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-su} M_x (e^{-\lambda\zeta_u}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in A) = \sum_{k=0}^{\infty} M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}-s\tau_k}, x_{\tau_k} \in A) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_A M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}-s\tau_k}/x_{\tau_k}=y)\, P^k (x, dy). \tag{10}$$

Найдем теперь предел выражения (10) при условии, что $\lambda = \lambda/t_m$, $s = s/t_m$, $t_m \to \infty$, $m \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_A M_x (e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_{\tau_k}-\frac{s}{t_m}\tau_k}/x_{\tau_k}=y)\, P^k (x, dy) = R^m (x, A). \tag{11}$$

Обозначим

$$q_m (x, y) = M_x (e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}/x_\tau=y).$$

Согласно предположениям $q_m (x, y) \uparrow 1$ при $m \to \infty$.

Используя теорему 3 из [3] для (11) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sup_A |\varepsilon_m R^m (x, A) - \Pi (A)| = 0 \quad \Pi\text{-почти всюду}, \tag{12}$$

как только $\lambda > \inf_{y,z} g (y, z)$ и $\varepsilon_m = P_\Pi [1 - q_m (x_{\tau_0}, x_{\tau_1})]$, т. е.

$$\varepsilon_m = M_\Pi (1 - e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau}) = \int_X [1 - M_y (e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau})]\, \Pi (dy).$$

Вследствие того, что

$$P_x \{\zeta_\tau > t\} = P_x \left\{\int_0^\tau g (x, u)\, du > t\right\} = P_x \{\tau > h^{-1} (t)\},$$

где

$$h (t) = \int_0^t g (x, u)\, du, \quad h^{-1} (t) \to \infty, \quad t \to \infty$$

и

$$\frac{h^{-1} (t)}{t} = \frac{h^{-1} (t)}{h (h^{-1} (t))} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{b (x)},$$

из (1) при $t \to \infty$ имеем

$$P_x \{\tau > h^{-1} (t)\} \sim \frac{a (x) (h^{-1} (t))^{-\alpha} L (1/h^{-1} (t))}{\Gamma (1 - \alpha)} \sim$$

$$\sim a (x)\, b (x)^\alpha\, t^{-\alpha} L (1/t) [\Gamma (1 - \alpha)]^{-1}.$$

Таким образом,

$$1 - M_y (e^{-\frac{s}{t_m}\tau-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau}) \sim t^\alpha (s + \lambda b (y))^\alpha L\left(\frac{1}{t}\right) a (y)$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_m \sim t_m^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_m}\right) \int_X \Pi (dx)\, a (x)\, (s + \lambda b (x))^\alpha, \qquad t \to \infty. \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) получаем

$$t_m^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_m}\right)\int_0^\infty R_{\lambda/t_m} (x, t_m du, B)\, e^{-su} \to \Pi (B) \left[\int_X \Pi (dz)\, a (z)\, (s + \lambda b (z))^\alpha\right]^{-1},$$

откуда x П-почти везде имеет место слабая сходимость

$$t_m^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_m}\right) \int_0^\infty R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, B) \to \Pi(B) \mu_\lambda(du)$$

для всех $B \in \mathscr{B}$.

Обозначим

$$\mu_n(x, du, dy) = t_n^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_n}\right) R_{\lambda/t_n}(x, t_n du, dy),$$

$$\mu_\lambda(du, dy) = \mu_\lambda(dy) \Pi(dy),$$

$$f_n(u, y) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{t_n} \int_0^{t_n(1-u)} g(y,z)dz} P_y\{\tau > t_n(1-u)\}}{t_n^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t_n}\right)},$$

$$f(u, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} e^{-\lambda b(y)(1-u)} (1-u)^{-\alpha} a(y),$$

Из (1) и (2), используя теорему Егорова имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D \in \mathscr{B}; \ \Pi(D) > 1 - \varepsilon$ и

$$\sup_{x \in D} \left| \frac{1 - \varphi_x(s)}{s^\alpha L(s)} - a(x) \right| \xrightarrow[s \to 0]{} 0, \quad \sup_{x \in D} a(x) < \infty. \tag{14}$$

Отсюда можно выбрать последовательность множеств D_j таких, что $D_j \subset D_{j+1}$ и $\Pi\left(\bigcup_n D_n\right) = 1$, на которых имеет место (14): $D_0 = X - \bigcup_n D_n$

Из (1), (14) также следует, что

$$\frac{1 - F_y(ut)}{t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right)} \xrightarrow[t \to \infty]{} a(y) \frac{u^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{15}$$

равномерно по $u \in [a, b]$, $y \in D_j$ $\forall\, 0 < a \leqslant b < \infty$.

Покажим, что

$$\int_B \int_0^{1-v} \mu_n(x, du, dy) f_n(u, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_B \int_0^{1-v} \mu_\lambda(du, dy) f(u, y) \tag{16}$$

для x П-почти всех, $0 < v \leqslant 1$, $B \subset D_j$. Действительно

$$\int_B \int_0^{1-v} \mu_n(x, du, dy) f(u, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_B \int_0^{1-v} \mu_\lambda(du, dy) f(u, y). \tag{17}$$

Доказательство (17) можно провести следующим образом: $f(u, y)$ аппроксимируем последовательностью ступенчатых функций по y, а по u это будут непрерывные функции. Далее воспользуемся слабой сходимостью $\mu_n(x, du, dy)$ к $\mu_\lambda(du, dy)$ по du, а после этого перейдем к пределу по ступенчатым функциям.

Поскольку выполнено (15) и

$$\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n(1-u)} g(y, z)\, dz \rightrightarrows (1-u) b(y), \quad y \in D_j, \quad u \in [0, 1-v],$$

то $f_n(u, y) \rightrightarrows f(u, y)$ при $n \to \infty$ равномерна по $y \in D_j$, и, следовательно,

$$\int_B \int_0^{1-v} (f_n(u, y) - f(u, y)) \mu_n(x, du, dy) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{18}$$

так как при достаточно большом n меры $\mu_n(x, [0, \infty), X) < \infty$ равномерно по x. Из (18) и (17) легко получается (16).

Далее, так как $P_x(x_t \in D_0) = 0$ и вследствие того, что η_t/t — собственная случайная величина [2], имеем

$$\lim_{t\to\infty} M_x\left(e^{\frac{-\lambda\zeta_t}{t}}\right) = \lim_{t\to\infty} \lim_{v\to+0} \lim_{n\to\infty} M_x\left(e^{\frac{-\lambda\zeta_t}{t}}, \frac{\eta_t}{t} > v, x_t \in D_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_X e^{-\lambda b(y)(1-u)} (1-u)^{-\alpha} a(y) \Pi(dy) \mu_\lambda(du) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} dG(y).$$

Преобразование $\int_0^\infty \frac{1}{\lambda + x} dG(x)$ ищется как и в работе [1]. Теорема доказана.

1. *Елейко Я. И.* Предельное распределение временных средних для процессов с марковским вмешательством случая // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 6.— С. 779—782.
2. *Ружевич И. А.* Одна предельная теорема для полумарковского процесса в нерегулярном случае // Первый всемир. конгр. о-ва мат. статистики и теории вероятностей им. Бернулли: Тез. докл.— М. : Наука, 1982.— **2**.— 626 с.
3. *Шуренков В. М.* Асимптотика потенциала обрывающейся эргодической цепи Маркова // Некоторые вопросы теории случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 122—133.

Львов. ун-т

Получено 26.10.87