УДК 517.95

Б. М. Карелин

Критерий однозначной разрешимости задачи Коши в классе C^∞ для дифференциальных уравнений с полиномиальным преобразованием аргумента

1. Введение. Основной результат. Известно, что для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом постановка задачи Коши состоит в задании значений искомого решения на некотором промежутке [1]. В то же время в некоторых случаях и для уравнений этого класса однозначно разрешима задача Коши с обычным начальным условием Коши. Так обстоит дело, например, для уравнения Като $y'(x) = ay(x) + by(\alpha X)$, $x > 0$ при $\alpha \in]0,1[$; однако это не так при $\alpha > 1$ (см. [2]).

В настоящей статье рассматривается уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(\varphi(x)) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, \tag{1}$$

где $\varphi(x) = \sum_{l=0}^{m} \varphi_l x^l$, $m > 1$, $\varphi_m \neq 0$, $\varphi_l \in \mathbb{R}$, и выясняется, при каких условиях на $\varphi(x)$ для этого уравнения корректна (однозначно разрешима) задача Коши с начальным условием Коши в произвольной точке x_0:

$$V(y; x_0) = \{y^{(j)}(x_0)\}_{j=0}^{n-1} = \vec{c} \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

Предполагается: $a_k(x) \in C^\infty$ — комплекснозначные, $a_n(x) \neq 0$, решение $y(x)$ ищем в классе комплекснозначных функций из C^∞. Установлено (пп. 1—3), что корректность задачи (1), (2) имеет место при всех (за исключением, быть может, дискретного множества) значениях λ (при п. в. λ) тогда и только тогда, когда $\varphi'(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$. Отметим, что при $m = 1$ это не так (ср. с уравнением Като в случае $\alpha > 1$, представленном в виде (1): тогда $\varphi'(x) = 1/\alpha \neq 0$). Дело в том, что факт корректности задачи Коши связан со свойством «стягиваемости» функции $\varphi(x)$, т. е. в наличии промежутка $H \subset \mathbb{R}$ со свойствами а) $\varphi H \subset H$; б) $\varphi_{k+1}H \neq \varphi_k H$ $\forall k (\varphi_k = \varphi \circ \varphi_{k-1})$; в) $\forall x \exists k$: $\varphi_k(x) \in H$. Корректность задачи Коши имеет место при отсутствии «стягиваемости», что в свою очередь верно при $m > 1$, если $\varphi'(x) \neq 0$, а при $\varphi(x) \equiv \beta x$ лишь при $\beta \geqslant 1$.

В п. 4 приведены дополнительные факты, связанные с разрешимостью задачи (1), (2) в некоторых других классах функций, а также с вопросами существования или отсутствия особых значений параметра λ (при которых задача (1), (2) некорректна). Отметим, что весьма частный случай уравнения (1) $(n=1,\ a_1(x) \equiv 1,\ a_0(x) \equiv 0,\ \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ исследован в работе [3].

Будем обозначать далее $T_\varphi = \{x : \varphi(x) = x\}$, $\overline{\overline{x}} = \sup T_\varphi$, $\overline{x} = \inf T_\varphi$, $\psi(x) = \varphi(\varphi(x))$, $\tilde{x} = \inf T_\psi$, $\tilde{\tilde{x}} = \sup T_\psi$, $\vec{e}_k$ — базисные векторы в $\mathbb{C}^n$, $R^i_\lambda([a, b])$ — пространство решений уравнения (1) в классе $C^{n+i}[a, b]$ $([a, b] \subset \varphi[a, b])$. Через $A(x)$ обозначим матрицу, возникающую при стандартном переходе от уравнения (1) к системе n уравнений. В качестве нормы для векторов и матриц примем максимум из модулей элементов.

Т е о р е м а. *Для того чтобы $\forall x_0$ задача Коши* (1), (2) *была корректна при п. в. λ, необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi'(x) \neq 0$.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$. Легко показать, что в этом случае $m = 2p + 1$ и $T_\varphi \neq \varnothing$. Далее, последовательно дифференцируя обе части уравнения (1), убеждаемся в том, что любое решение (1) в классе $C^n(\mathbb{R})$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$.

Исследуем случай $\varphi'(x) > 0$. Выберем $x' \in T_\varphi$, $\vec{d} \in \mathbb{C}^n$. Определим систему функций $\{q_i(x; \vec{d}, x')\}_{i=0}^\infty$ из соотношений:

$$\sum_{k=0}^n a_k(\varphi^{-1}(x))\, q_0^{(k)}(x; \vec{d}, x') = 0, \quad V(q_0(x; \vec{d}, x'); x') = \vec{d}; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^n a_k(\varphi^{-1}(x))\, q_{i+1}^{(k)}(x; \vec{d}, x') = q_i(\varphi^{-1}(x); \vec{d}, x'), \\ V(q_{i+1}(x; \vec{d}, x'); x') = 0, \qquad i = 0 \div \infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Если ряд

$$S_\lambda(x; \vec{d}, x') = \sum_{i=0}^\infty \lambda^i q_i(x; \vec{d}, x') \tag{5}$$

и ряды, полученные последовательным дифференцированием до порядка n, сходятся при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ равномерно на отрезке $[a, b]$ и $\varphi[a, b] = [a, b]$, то, как легко проверить, $S_\lambda(x; \vec{d}, x') = R^0_\lambda([a, b])$ и $V(S_\lambda(x; \vec{d}, x'), x') = \vec{c}$.

Будем называть $[a, b]$ промежутком I или II типа, если $a \in T_\varphi$, $b \in T_\varphi \cup \{+\infty\}$, $\varphi(x) > x$ $(x \in]a, b[)$ или $b \in T_\varphi$, $a \in T_\varphi \cup \{-\infty\}$, $\varphi(x) < x$ $(x \in]a, b[)$ соответственно в случаях I и II.

Л е м м а 1. *Пусть $[a, b]$ — промежуток* I (II) *типа. Тогда задача* (1), (2) *корректна в $C^n[a, b]$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, если $x_0 = a$ $(x_0 = b)$, и при п. в. λ, если $x_0 \in]a, b]$ $(x_0 \in [a, b[)$. При этом решение представимо в виде* (5) *при $x' = a$ $(x' = b)$ и некотором $\vec{d} = \vec{d}(\vec{c}, \lambda)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать случай: $[a, b]$ — I типа (рассмотрение промежутка II типа аналогично). Пусть сначала $x_0 = a$.

Положим

$$P_0 = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \sup_{[a,b]} |q_0^{(j)}(x;\vec{d},a)| \frac{1}{\|\vec{d}\|},$$

$$F_0 = \sup_{a\leqslant x,s\leqslant b} \left\| \exp\int_s^x A(\varphi^{-1}(v))\,dv \right\|.$$

Из (4) следует равенство

$$V(q_{i+1}(t;\vec{d},a);\ x) = \int_a^x \exp\int_s^x A(\varphi^{-1}(v))\,dv \times \vec{u}(q_i(\varphi^{-1}(s);\vec{d},a))\,ds,$$

где $\vec{u}(f(s)) = \{u_j(s)\}$, $u_j(s) = 0$, $j = 0 \div n-2$, $u_{n-1}(s) = f(s)$.

Используя тот факт, что $|\varphi^{-1}(s) - a| \leqslant |s-a|$ (поскольку $\varphi(a) = a$, $\varphi(s) \geqslant s$), по индукции получаем

$$|q_i^{(j)}(x;\vec{d},a)| \leqslant P_0 F_0^i \frac{(x-a)^i}{i!} \|\vec{d}\|, \tag{6}$$

$$x\in[a,b],\quad j = 0\div n-1,\ i = 0\div\infty.$$

Из (6) и равенств (4) имеем

$$|q_i^{(n)}(x;\vec{d},a)| \leqslant P_1 F_0^{i-1} \frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!} \|\vec{d}\|, \tag{7}$$

$$x\in[a,b],\quad i = 1\div\infty.$$

Итак, $S_\lambda(x;\vec{d},a)\in R_\lambda^0([a,b])$.

Пусть $y\in R_\lambda^0([a,b])$, $V(y;a) = 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0 : \varepsilon_0 < \frac{1}{2F_0|\lambda|}$. Обозначим $M = \sup_{[a,a+\varepsilon_0]} |y(x)|$. Пусть $M > 0$. При $x\in[a,a+\varepsilon_0]$ получаем противоречие:

$$|y(x)| \leqslant \left\| \int_a^x \exp\int_s^x A(\varphi^{-1}(v))\,dv \times \lambda\vec{u}(y(\varphi^{-1}(s))\,ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant F_0|\lambda| M(b-a) < \frac{M}{2}.$$

Итак, $y(x)\equiv 0$ при $x\in[a,a+\varepsilon_0]$; распространяем как тривиальное на $[a,b]$ в силу уравнения (1).

Пусть теперь $x_0\in]a,b]$. Решение задачи (1), (2) снова строим в виде $S_\lambda(x;\vec{d},a)$. При этом

$$V(S_\lambda(x;\vec{d},a);\ x_0) = W_{a,x_0}(\lambda)\vec{d}, \tag{8}$$

где

$$W_{a,x_0}(\lambda) = \left[\sum_{i=0}^\infty \lambda^i q_i^{(j)}(x_0;\vec{e}_k,a)\right]_{j,k=0}^{n-1}. \tag{9}$$

В силу (6) $\det W_{a,x_0}(\lambda)$ — целая функция. Поскольку, очевидно, $\det W_{a,x_0}(0)\neq 0$, множество Λ_{a,x_0} корней функции $\det W_{a,x_0}(\lambda)$ дискретно. Из (8) видно, что при $\lambda\,\bar{\in}\,\Lambda_{a,x_0}$ задача (1), (2) при выбранном x_0 корректна в $C^n[a,b]$.

Замечание 1. На промежутке $[a,b]$ II типа аналогично функции $W_{a,x_0}(\lambda)$ и множеству Λ_{a,x_0} вводятся функция $W_{b,x_0}(\lambda)$ и множество Λ_{b,x_0}. Ниже будем обозначать $W_{x_0,a}(\lambda) = [W_{a,x_0}(\lambda)]^{-1}$, $W_{x_0,b}(\lambda) = [W_{b,x_0}(\lambda)]^{-1}$ для промежутков I и II типа соответственно.

Замечание 2. Лемма справедлива, если $\varphi(x) \geqslant x$ ($\varphi(x) \leqslant x$) при $x \in [a, b]$.

Пусть $I = [a, b]$ — конечный промежуток I или II типа. Будем обозначать $\Lambda_I = \Lambda_{a,b}$ или $\Lambda_I = \Lambda_{b,a}$ соответственно в случаях I и II. Построим дискретное множество $\Lambda' = \bigcup\limits_I \Lambda_I$ (объединение по всем конечным промежуткам I и II типа). Выберем $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda'$, $x' \in T_\varphi$. Корректность задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_0$, $x_0 = x'$ следует из того факта, что числовая ось распадается на конечную систему промежутков I и II типа, на каждом из которых ввиду выбора λ_0 и леммы 1 можно задавать задачу Коши с начальным условием в любом из концов, причем x' — общий конец двух промежутков этой системы.

Остался вне рассмотрения случай $x_0 \bar{\in} T_\varphi$. Но тогда точка x_0 лежит на некотором промежутке I или II типа, и с помощью функции $[W_{x', x_0}(\lambda)]^{-1}$ мы переходим к заданию начальных условий в x' — одним из концов этого промежутка; при $\lambda \bar{\in} \Lambda_{x_0} = \Lambda' \cup \Lambda_{x', x_0}$ задача (1), (2) корректна.

Замечание. Теперь для любой пары $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ нетрудно построить матрицу-функцию $W_{x_0, x_1}(\lambda)$ такую, что $\forall y \in R^0_\lambda(]-\infty, \infty[)$

$$V(y; x_1) = W_{x_0, x_1}(\lambda) V(y; x_0)$$

и $\det W_{x_0, x_1}(\lambda)$ есть мероморфная функция.

2. Случай $\varphi'(x) < 0$. В этом случае $T_\varphi = \{\bar{x}\}$. Дифференциально-функциональный оператор $Bf = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) f^{(k)}(\varphi(x))$ действует в $C^\infty(\mathbb{R})$. Можно показать, что $B^2 f = \sum\limits_{k=0}^{2n} b_k(x) f^{(k)}(\psi(x))$, причем $\psi(x) = \varphi(\varphi(x))$ — полином, $b_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и не зависит от f, $b_{2n}(x) \neq 0$. Итак, введем в рассмотрение «двойное» уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} b_k(x) y^{(k)}(\psi(x)) = \lambda^2 y(x). \tag{10}$$

Последовательно дифференцируя обе части уравнения (1), получаем систему равенств

$$\sum_{k=0}^{n+i} \chi_{ik}(x) y^{(k)}(\varphi(x)) = \lambda y^{(i)}(x) \qquad i = 0 \div \infty,$$

где $\chi_{ik}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и не зависят от y, причем

$$\chi_{i, n+i}(x) = a_n(x) [\varphi'(x)]^i. \tag{11}$$

Определим по вектору $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ вектор $(c_n, \ldots, c_{2n-1})$ из условий

$$\sum_{k=0}^{n+i} \chi_{ik}(\bar{x}) c_k - \lambda c_i = 0, \qquad i = 0 \div n-1.$$

Ввиду (11) решение этой системы существует и единственно. Обозначим $\vec{\tilde{c}} = (c_0, \ldots, c_{2n-1}) \in \mathbb{C}^{2n}$. Определим $U(\lambda): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{2n}$ по формуле $U\vec{c} = \vec{\tilde{c}}$.

Зададим начальные условия

$$\tilde{V}(y; \bar{x}) = \{y^{(j)}(\bar{x})\}_{j=0}^{2n-1} = \vec{\tilde{c}}. \tag{12}$$

Ввиду неравенства $\psi'(x) > 0$ и ранее доказанной части теоремы задача (10)—(12) корректно разрешима при п. в. значениях λ^2. Переопределив эту функцию на $]-\infty, \bar{x}[$ исходя из равенства (1), получим искомое решение (1). Наоборот, если $y(x)$ — решение (1) и $V(y; \bar{x}) = 0$, то $y(x)$ есть решение (10) и $\tilde{V}(y; \bar{x}) = 0$, откуда $y(x) \equiv 0$. Построение можно было начинать и с промежутка $]-\infty, \bar{x}[$.

Выясним вопрос о возможности задания начальных условий в других точках. Определим $V:\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}^n$ по формуле $V\{c_i\}_{i=0}^{2n-1}=\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$. Выберем $x_0\in\mathbb{R}$. Определим матричную функцию с аналитичными элементами $W_{\bar{x},x_0}(\lambda)=V\tilde{W}_{\bar{x},x_0}(\lambda)U(\lambda)$, переводящую начальные условия из $\bar{x}$ в точку x_0. Здесь $\tilde{W}_{\bar{x},x_0}(\lambda)$ — функция вида (9) для уравнения (10), множество Λ'_{x_0} ее корней дискретно, так как при $\lambda=0$ корректность задания начальных условий в любой точке $x_0\in\mathbb{R}$ не вызывает сомнений. Задав $\Lambda_{x_0}=\Lambda_{\bar{x}}\cup\Lambda'_{x_0}$, мы заканчиваем доказательство достаточности.

3. Доказательство необходимости. Пусть полином $\varphi'(x)$ имеет вещественные корни. Предположим, что при этом задача (1), (2) корректна $\forall x_0\in\mathbb{R}$ при п. в. λ ($\lambda\bar{\in}\Lambda_{x_0}$). Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $T_\varphi\neq\varnothing$, $\exists t_0\in\mathbb{R}:\varphi'(t_0)=0$, причем либо $t_0\in[\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}]$, либо $t_0>\tilde{\tilde{x}}$ и $\psi(t_0)>t_0$, либо $t_0<\tilde{x}$ и $\psi(t_0)\subset t_0$. Тогда рассуждение, аналогичное проведенному в п. 2, показывает, что на некотором промежутке $[\gamma,\delta]$, содержащем точки $x'\in T_\varphi$, $x_0:\varphi'(x_0)=0$, а также $\varphi(x_0)$, для любого решения $y(x)\in R^0_\lambda(]-\infty,\infty[)$ справедливо представление

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i q_i(x;\vec{c},x'),\qquad x\in[\gamma,\delta],\tag{13}$$

где функции $q_i(x;\vec{c},x')$ определяются из соотношений (3), (4) и удовлетворяют оценкам (6), (7).

Из равенства (1) и условия $\varphi'(x_0)=0$ легко получаем

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{n}a_k(x_0)\,y^{(k)}(\varphi(x_0))=\lambda y(x_0),\\ \sum_{k=0}^{n}a'_k(x_0)\,y^{(k)}(\varphi(x_0))=\lambda y'(x_0)\end{gathered}\tag{14}$$

(второе равенство получаем в результате дифференцирования обеих частей равенства (1) и подстановки $x=x_0$).

Подставим представление (13) в (14). При $\lambda\bar{\in}\Lambda_{x'}$ и любом $\vec{c}\in\mathbb{C}^n$ функции

$$Q_{\vec{c}}(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\Big[\sum_{k=0}^{n}a_k(x_0)\,q_i^{(k)}(\varphi(x_0);\vec{c},x')\Big]-\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i+1}q_i(x_0;\vec{c},x'),$$

$$Z_{\vec{c}}(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\Big[\sum_{k=0}^{n}a'_k(x_0)\,q_i^{(k)}(\varphi(x_0);\vec{c},x')\Big]-\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i+1}q'_i(x_0;\vec{c},x')$$

обращаются в 0, но это целые функции, откуда $\forall\vec{c}\in\mathbb{C}^n$

$$\begin{gathered}Q_{\vec{c}}(0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x_0)\,q_0^{(k)}(\varphi(x_0);\vec{c},x')=0,\\ Z_{\vec{c}}(0)=\sum_{k=0}^{n}a'_k(x_0)\,q_0^{(k)}(\varphi(x_0);\vec{c},x')=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Заметим, однако, что для уравнения (3) начальные условия можно задавать и в точке $\varphi(x_0)$. Произвол в выборе этих условий с учетом (15) приводит к равенству $a_k(x_0)\dfrac{a'_n(x_0)}{a_n(x_0)}-a'_k(x_0)=0$, $k=0\div n-1$. Подставив это соотношение в (14), имеем

$$\lambda\frac{a'_n(x_0)}{a_n(x_0)}y'(x_0)=\lambda y(x_0).$$

При $\lambda \neq 0$, $\lambda \bar{\in} \Lambda_{x_0}$ и $n > 1$ мы получили противоречие. Случай $n = 1$ нуждается в дополнительном рассмотрении, которое мы опускаем. Итак, при некотором x_0, $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ и при п. в. λ не существует решения задачи (1), (2).

II. В оставшихся случаях будет нарушена единственность. Легко проверить, что здесь $m = 2p$. Не уменьшая общности, считаем $\varphi_m > 0$. Могут представиться две возможности:

1. Пусть $\varphi(x) > x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Тогда $\exists a : \varphi'(x) > 0$ при $x > a$ и при $x \in [\varphi(a), \infty[$ уравнение (1) приобретает вид

$$\vec{V}'(x) = A(\varphi^{-1}(x))\vec{V}(x) + \lambda C(x)\vec{V}(x - (x - \varphi^{-1}(x))), \tag{16}$$

$$\vec{V}(x) = V(y; x)$$

и ввиду [1] при $\lambda \neq 0$ существует непрерывно дифференцируемое решение с начальным условием $\vec{V}(x) = \vec{\Gamma}(x)$, $x \in [a, \varphi(a)]$, где $\vec{\Gamma}(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Возвращаясь к рассмотрению (1), заключаем, что $\dim R^0_\lambda([a, \infty[) = \infty$. Более того, при удачном выборе начальных условий на промежутке $[a, \varphi(a)]$ (гладкие функции с некоторыми условиями на границе) функция $y \in R^0_\lambda([a, \infty[)$ продолжается на на $\mathbb{R}$ исходя из (1) и оказывается в классе $R^\infty_\lambda(]-\infty, \infty[)$. Итак, решение задачи (1), (2) при $x_0 \in]a, \varphi(a)[$, $\lambda \neq 0$ не единственно.

2. Пусть $T_\varphi \neq \varnothing$, $\varphi'(x) > 0$ при $x \in [\bar{x}, \infty[$. На $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$ уравнение (1) преобразуется к виду (16). Среди бесконечномерного пространства решений на $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$ выберем подпространство плоских в точке $x = \bar{x}$ (можно показать, что в силу $\varphi'(x) \neq 0$ оно также бесконечномерно). Продолжив каждое из решений как 0 на $[\bar{x}, \infty[$ и исходя из (1) на $\mathbb{R}$, получим решение (1). Нарушена единственность решения задачи (1), (2) при $x_0 \in [\bar{x}, \infty[$, $\lambda \neq 0$.

4. Некоторые замечания. Представляет интерес вопрос о разрешимости задачи (1), (2) в отличных от $C^\infty(\mathbb{R})$ классах гладкости. Из доказательства достаточности теоремы 1 легко сделать вывод: если $\varphi(x)$ строго возрастает, то $\forall x_0$ задача (1), (2) корректна при п. в. λ в классе $C^n(\mathbb{R})$ (даже если есть корни $\varphi'(x)$).

В ряде случаев можно утверждать, что решение задачи (1), (2) является аналитической функцией, а иногда даже полиномом [3]. В частности, непосредственная подстановка показывает, что для уравнения (1) с постоянными коэффициентами, младший ненулевой из которых есть a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, решение в классе полиномов существует и единственно (с точностью до постоянного множителя) тогда и только тогда, когда $i > 0$, $im \vdots m - 1$, и

$$\lambda = a_i \frac{q!}{(q-i)!} \varphi_m^{q-i} \tag{17}$$

$\left(\text{здесь } q = \dfrac{im}{m-1} \text{ — степень полинома } y\right)$. Значение λ из равенства (17) часто является особым, как, например, в уравнении

$$y^{(n)}(x^m) = \frac{q!}{(q-n)!} y(x) \quad \left(n \vdots m - 1,\ q = \frac{nm}{m-1}\right), \tag{18}$$

где $y(x) = Cx^q$ — единственное решение. Но $q > n$, поэтому при $x_0 = 0$, $\lambda = \dfrac{q!}{(q-n)!}$ задача (18), (2) некорректна.

С другой стороны, аналогично лемме 1 можно показать, что если $x_0 \in T_\varphi$, $\varphi(x) \geqslant x$ при $x \geqslant x'$, $\varphi(x) \leqslant x$ при $x \leqslant x'$, то задача (1), (2) корректна $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М. : Наука, 1972.— 352 с.
2. *Kato T., Mc Leod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\alpha x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc.— 1971.— **77**, N 6.— P. 891—937.
3. *Карелин Б. М.* Свойства решений линейного дифференциально-функционального уравнения с квадратичным преобразованием аргумента // Динамические системы и дифференциально-разностные уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 37—43.

Рост. инж-строит. ин-т Получено 22.07.87