УДК 519.21

А. А. Дороговцев

Аналоги уравнений типа свертки

1. Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathcal{X}$. Обозначим через C и B соответственно пространства непрерывных ограниченных и измеримых ограниченных функций на $\mathcal{X}$. Пусть $\{T_\alpha;\ \alpha \in Q\}$ — некоторое семейство линейных операторов, действующих из C в B, а μ — конечный заряд на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Представляет интерес вопрос о том, когда уравнение

$$\int_{\mathcal{X}} (T_\alpha f)(x)\,\mu(dx) = 0,\ \ \alpha \in Q \tag{1}$$

имеет в C только одно решение $f \equiv 0$. В настоящей статье рассматриваются два частных случая уравнения (1). В первом случае операторы $\{T_\alpha;\ \alpha \in Q\}$ порождаются сдвигами в пространстве $\mathcal{X}$, наделенном линейной структурой, а во втором — $\{T_\alpha;\ \alpha \in Q\}$ образуют полугруппу, порожденную некоторым однородным марковским процессом в $\mathcal{X}$.

2. Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, μ — конечный заряд на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Для $f \in C$ рассмотрим свертку с μ:

$$\forall x \in H : (f*\mu)(x) = \int_{\mathcal{X}} f(x+y)\,\mu(dy).$$

Аналог уравнения (1) выглядит так:

$$f*\mu \equiv 0. \tag{2}$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Для того чтобы уравнение* (2) *имело единственное решение $f \equiv 0$ в C, необходимо и достаточно, чтобы характеристический функционал $\hat{\mu}$ заряда μ не обращался в 0 на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ $\hat{\mu}(t_0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(s) = \operatorname{Re} \exp(it_0 s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что $f * \mu \equiv 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\hat{\mu} \neq 0$ на $\mathbb{R}$ и $f \in C$ удовлетворяет уравнению (2). Обозначим через ν гауссовскую меру на $\mathbb{R}$, соответствующую гауссовской случайной величине со средним 0 и дисперсией 1. Тогда $f*(\nu*\mu) \equiv 0$. Кроме того заряд $\nu*\mu$ абсолютно непрерывен относительно меры Лебега m и преобразование Фурье плотности $d\nu*\mu/dm$ не обращается в 0 на $\mathbb{R}$. Согласно теореме из [1, с. 127] свертки $\dfrac{d\nu*\mu}{dm}$ с функциями из $L_1(\mathbb{R}, m)$ образуют плотное множество в $L_1(\mathbb{R}, m)$. Следовательно, для всякой функции $\gamma \in L_1(\mathbb{R}, m)$ имеет место равенство $f*\gamma \equiv 0$. Поэтому $f \equiv 0$ по мере Лебега. Из-за непрерывности $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $\mathcal{F}$ — множество ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, лежащих в $L_2(\mathbb{R}^n, m)$, где m — мера Лебега. Если $\hat{\mu} \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$, то уравнение* (2) *имеет в классе $\mathcal{F}$ только одно решение $f \equiv 0$.*

Доказательство теоремы 2 получается с помощью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R}^n, m)$ и теоремы Фубини.

Используя теорему 1, можно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть μ — продакт-мера в $\mathcal{X}$ такая, что $\hat{\mu} \neq 0$ на $\mathcal{X}$. Тогда уравнение* (2) *имеет единственное решение в C : $f \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\{e_n;\ n \geqslant 1\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{X}$, в котором μ является продакт-мерой, $\{\mu_n;\ n \geqslant 1\}$ — соответствующие одномерные сомножители. Рассмотрим для каждого $n \geqslant 1$ в подпространстве L_n, порожденном векторами $\{e_1, \ldots, e_n\}$, функцию

$$f_n(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) := \int\limits_{\mathcal{X} \ominus L_n} f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n + y) \prod_{i=n+1}^{\infty} \mu_i(dy).$$

Докажем, что $f_n \equiv 0$ на L_n, $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$f_n * \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \equiv 0.$$

По теореме 1

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : f_n(x_1e_1 + \cdot) * \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \equiv 0.$$

Аналогично

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f_n(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdot) * \mu_3 \otimes \ldots \otimes \mu_n \equiv 0.$$

После n шагов получаем, что $f_n \equiv 0$ на L_n. Пусть

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathcal{X} : g_n(x) := f_n(P_nx),$$

где P_n — проектор на L_n. Тогда [2] $g_n \to f$, $n \to \infty$ в $L_1(\mathcal{X}, \mu)$. Следовательно $f \equiv 0 \pmod{\mu}$. Аналогичное заключение справедливо для всякого сдвига меры μ. Поэтому $f \equiv 0$ на $\mathcal{X}$. Теорема 3 доказана.

3. Если переходная функция $P(t, x, A)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}$ марковского процесса $\{\eta_t;\ t \geqslant 0\}$ обладает некоторой симметрией, то, используя метод расслоений [3], можно получить необходимые условия единственности решения уравнения

$$Mf(\eta_t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Пусть Γ — измеримое разбиение пространства $\mathcal{X}$ на непересекающиеся подмножества [3]. Тогда для каждого $x \in \mathcal{X}$ и $t \geqslant 0$ существуют условные меры $P_\gamma(t, x, \cdot)$, $\gamma \in \Gamma$ на σ-алгебре $\mathcal{B}$ и мера $P_\Gamma(t, x, \cdot)$ на соответствующей σ-алгебре подмножеств Γ такие, что

$$\forall A \in \mathcal{B} : P(t, x, A) = \int\limits_{\Gamma} P_\gamma(t, x, A)\, P_\Gamma(t, x, d\gamma).$$

Предположим, что для некоторого $x_0 \in \mathcal{X}$ меры $P_\gamma(t, x_0, \cdot)$ не зависят от $t \geqslant 0$. Пусть, кроме того, существует набор измеримых биекций $\{g_x;\ x \in \mathcal{X}\}$ пространства $\mathcal{X}$ на себя такой, что

1) $\forall t \geqslant 0\ \forall x \in \mathcal{X} : P(t, x, \cdot) = P(t, x_0, g_x^{-1}\cdot)$;

2) функция $G(x, y) = g_x(y)$, $x, y \in \mathcal{X}$ измерима по совокупности переменных.

Тогда

$$\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} f(y) P(t, x, dy)\,\mu(dx) = Mf(\eta_t) = \int_{\mathcal{X}}\left\{\int_{\mathcal{X}} f(y) P(t, x_0, g_x^{-1}(dy))\right\}\mu(dx) =$$

$$= \int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} f(G(x, y)) P(t, x_0, dy)\,\mu(dx) = \int_{\mathcal{X}}\int_{\Gamma}\int_{\mathcal{X}} f(G(x, y)) P_\gamma(x_0, dy) \times$$

$$\times P_\Gamma(t, x_0, d\gamma)\,\mu(dx) = \int_{\Gamma}\int_{\mathcal{X}}\left\{\int_{\mathcal{X}} f(G(x, y))\,\mu(dx)\right\} P_\gamma(x_0, dy)\, P_\Gamma(t, x_0, d\gamma).$$

Следовательно, если функция $f \in C$ такова, что

$$\forall \gamma \in \Gamma : \int_{\mathcal{X}}\left\{\int_{\mathcal{X}} f(G(x, y))\,\mu(dx)\right\} P_\gamma(x_0, dy) = 0, \qquad (4)$$

то f удовлетворяет уравнению (3). Поэтому необходимым условием единственности решения уравнения (3) является единственность решения уравнения (4).

Пример. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, P — переходная функция винеровского процесса. Рассмотрим следующее разбиение $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup_{c>0} \{-c; c\}$.

Выбирая $x_0 = 0$, $g_x(y) = y + x$, $x, y \in \mathbb{R}$, получаем уравнение (4) в виде $\forall c \geqslant 0 : (f * \mu)(c) + (f * \mu)(-c) = 0$.

Докажем, что для всякой вероятностной меры μ существует $f \in C$, удовлетворяющая уравнению (4) и отличная от 0. Пусть $g(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда свертка $(g*\mu)*(g*\mu)(-\cdot)$ является четной функцией. Пусть $h(x) = \sin x \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Легко видеть, что $f = h*g*(g*\mu)(-\cdot) \in C$ и свертка $f*\mu$ является нечетной функцией, т. е. f удовлетворяет уравнению (4). Таким образом, для всякой вероятностной меры μ существует такая ограниченная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f \not\equiv 0$, что $Mf(\eta_t) = 0$, $t \geqslant 0$, где $\{\eta_t;\ t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс с начальным распределением μ.

В терминах математической физики утверждение примера можно сформулировать так [4]. Для произвольной вероятностной меры μ на $\mathcal{B}$ существует функция $u : [0; +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \not\equiv 0$, непрерывная по совокупности переменных и удовлетворяющая условиям

$$\forall t > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$\forall t \geqslant 0 : \int_{\mathbb{R}} u(t, x)\,\mu(dx) = 0.$$

Замечание. В случае, когда $\mathcal{X}$ — топологическая группа с борелевской σ-алгеброй, разбиение Γ порождено орбитами некоторой топологической компактной группы автоморфизмов $\mathcal{U}$ на $\mathcal{X}$, а меры $P_\gamma(x_0, \cdot)$ индуцированы мерой Хаара на $\mathcal{U}$, уравнение (4) записывается в виде

$$\int_{\mathcal{X}} (T_y f)(x)\,\mu(dx) = 0, \quad y \in \mathcal{X},$$

где $\{T_y\}$ — обобщенные сдвиги Дельсарта на $\mathcal{X}$, соответствующие группе $\mathcal{U}$ [5]. Следовательно, (2) является частным случаем (4).

1. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения.— М. : Физматгиз, 1963.— 256 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.
3. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А.* Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика / ВИНИТИ.— 1984.— **22**.— С. 61—158.
4. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М. : Мир, 1968.— 394 с.
5. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига.— М. : Наука, 1973.— 312 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.10.87