УДК 519.21

К. С. Кубацки

Замечания о сходимости моментов в случайной центральной предельной теореме

В настоящей статье расширяются и обобщаются результаты М. Н. Марушина и В. П. Криворукова [1] о сходимости моментов четного порядка в случайной центральной предельной теореме на сходимость абсолютных моментов произвольного порядка $p \geqslant 2$. Наш метод доказательства отличен от метода, используемого в работе [1].

1. Формулировка результатов. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $a = MX$, $c^2 = DX$, $0 < c^2 < \infty$. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность целочисленных положительных случайных величин с $M\nu_n = \alpha_n < \infty$. Предположим, что ν_n не зависит от $\{X_k\}$ и $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$ (по вероятности) при $n \to \infty$. Обозначим через Φ нормальную функцию распределения с параметрами $(0, 1)$, $\mu_{2p} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2p} d\Phi(x) = 2^p \Gamma(1/2 + p)/\sqrt{\pi}$ и $S_{\nu_n} = X_1 + \ldots$ $\ldots + X_{\nu_n}$. Отметим, что $MS_{\nu_n} = a\alpha_n < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $a = 0$ и $M|X|^{2p} < \infty$ для некоторого $p \geqslant 1$. Для того чтобы*

$$S_{\nu_n}/\sqrt{c^2\alpha_n} \Rightarrow \mathcal{N}_{0,1} \text{ (по распределению)} \tag{1}$$

и

$$M|S_{\nu_n}/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p} \to \mu_{2p}, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$M|(\nu_n - \alpha_n)/\alpha|^p \to 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $a \neq 0$ и $M|X|^{2p} < \infty$ для некоторого $p \geqslant 1$. Для того чтобы*

$$(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n} \Rightarrow \mathcal{N}_{0,1} \tag{4}$$

и

$$M|(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p} \to \mu_{2p}, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2p} \to 0. \tag{6}$$

2. Вспомогательные утверждения. Сформулируем их в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть $a = 0$. Для выполнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu_n/\alpha_n \xrightarrow{P} 1. \tag{7}$$

Доказательство леммы можно найти в [2], где рассмотрена более общая ситуация.

Лемма 2. *Пусть $a \neq 0$. Для выполнения* (4) *достаточно, чтобы*

$$(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n} \xrightarrow{P} 0. \tag{8}$$

Доказательство леммы методом характеристических функций можно найти в [1]. Другое доказательство основывается на теореме Реньи [3, с. 472] и лемме Крамера [4, § 20.6] (см. также леммы в [3, с. 467, 473]).

Лемма 3. *Пусть $\{y_k, k \geqslant 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $My_k = 0$. Если $p > 0$, то существует универсальная константа A_p (не зависящая от $\{y_k\}$), такая что для любых $k \geqslant 1$*

$$M\left|\sum_{j=1}^{k} y_j\right|^p \leqslant M\left(\max_{1\leqslant n\leqslant k}\left|\sum_{j=1}^{n} y_j\right|\right)^p \leqslant A_p\left\{\left(\sum_{j=1}^{k} My_j^2\right)^{p/2} + M\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k}|y_j|\right)^p\right\}.$$

Доказательство леммы приведено в [5, § 21.1].

Лемма 4. *Пусть $\{y_k,\ k\geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $My_k=0$. Если $p\geqslant 1$, то существует универсальная константа B_p (не зависящая от $\{y_k\}$), такая что для любых $k\geqslant 1$ $M\left|\sum_{j=1}^{k} y_j\right|^{2p} \leqslant B_p k^p M|y_1|^{2p}$.*

Доказательство леммы следует из леммы 3 (см. также неравенство 21.4 в [5]) и элементарных вычислений.

Лемма 5. *Пусть $a\neq 0$ и выполнено* (4). *Если $M|X|^{2m}<\infty$, где m — натуральное число, и*

$$M|S_{\nu_n}-a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2m}\to\mu_{2m}, \tag{9}$$

то

$$M|(\nu_n-\alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2m}\to 0. \tag{10}$$

Доказательство леммы можно найти в [1]. Приведем это доказательство в несколько измененном виде. Сначала докажем следующее утверждение, которое нам понадобится как в доказательстве леммы 5, так и в доказательствах теорем 1 и 2.

Лемма 6. *Пусть $M|X|^{2p}<\infty$ для некоторого $p\geqslant 1$. Для выполнения* (4) *и* (5) *достаточны условия* (3) *и*

$$M|a(\nu_n-\alpha_n)//\sqrt{\alpha_n}|^{2p}\to 0. \tag{11}$$

Доказательство. В силу (3) справедливо соотношение (7), и в силу (11) при $a\neq 0$ выполняется 8). Затем, на основании лемм 1 и 2 можно утверждать, что независимо от величины a ($a\neq 0$ или $a=0$) выполняется (4). Итак, в силу теоремы 5.2 из [6], при $n\to\infty$ имеем $|(S_{\nu_n}-a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p}\Rightarrow|\mathcal{N}_{0,1}|^{2p}$.

На основании теоремы 5.4 из [6] докажем, что последовательность $\{|(S_{\nu_n}-a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p},\ n\geqslant 1\}$ равномерно интегрируема.

Используя c_r-неравенство [7], получим $|(S_{\nu_n}-a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p}\leqslant 2^{2p-1}\{|(S_{\nu_n}-a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p}+|a(\nu_n-\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p}\}$. Так как в силу (11) последовательность $\{|a(\nu_n-\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p},\ n\geqslant 1\}$ равномерно интегрируема, то достаточно доказать, что последовательность $\{|(S_{\nu_n}-a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p},\ n\geqslant 1\}$ равномерно интегрируема.

Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим $y_i=X_j-a$ и $w_{nj}=Y_jI[|y_j|<\varepsilon\sqrt{c^2\alpha_n}]-\int\limits_{|x|<\varepsilon\sqrt{c^2\alpha_n}} xdF_{y_j}(x)$, $z_{nj}=y_j-w_{nj}$. Тогда для каждого $n\geqslant 1$ $\{w_{nj},\ n\geqslant 1\}$ и $\{z_{nj},\ n\geqslant 1\}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием нуль и, сверх того,

$$|w_{nj}|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{c^2\alpha_n},\quad Mw_{nj}^2\leqslant My_j^2=c^2 \tag{12}$$

и

$$M|z_{nj}|^{2p}\leqslant 2^{2p}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{c^2\alpha_n}}|x|^{2p}dF_{y_1}(x). \tag{13}$$

Используя (13) и лемму 4, имеем

$$M\left|\sum_{j=1}^{\nu_n} z_{nj}/\sqrt{c^2\alpha_n}\right|^{2p}\leqslant(2^{2p}B_p/c^{2p})\,M(\nu_n/\alpha_n)^p*\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{c^2\alpha_n}}|x|^{2p}dF_{y_1}(x)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$

так как $M|y_1|^{2p}<\infty$, $\alpha_n\to\infty$ и $M(\nu_n/\alpha_n)^p\to 1$. Вследствие этого последовательность

$$\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{\nu_n} z_{nj}/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p}, \quad n \geqslant 1\Big\} \tag{14}$$

равномерно интегрируема.

В силу (12) и леммы 3 для всякого $r > 0$ справедливо $M\Big|\sum_{j=1}^{\nu_n} w_{nj} \times I[\nu_n \leqslant 2\alpha_n]/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^r \leqslant A_r(2^{r/2} + (2\varepsilon)^r) < \infty$. Полагая $r = 2p + \delta$, $\delta > 0$, получаем неравенство $\sup_{n\geqslant 1} M\Big|\sum_{j=1}^{\nu_n} w_{nj} I[\nu_n \leqslant 2\alpha_n]/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p+\delta} < \infty$. Следовательно, последовательность

$$\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{\nu_n} w_{nj} I[\nu_n \leqslant 2\alpha_n]/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p}, n \geqslant 1\Big\} \tag{15}$$

равномерно интегрируема.

Используя еще раз (12) и лемму 3, в силу 3 получаем

$$M\Big|\sum_{j=1}^{\nu_n} w_{nj} I[\nu_n > 2\alpha_n]/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p} \leqslant A_{2p} M\{(\nu_n/\alpha_n)^p I[\nu_n > 2\alpha_n]\} +$$
$$+ A_{2p}(2\varepsilon)^{2p} P[\nu_n > 2\alpha_n] \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда с учетом (15) находим, что последовательность

$$\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} w_{nj}/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p}, \ n \geqslant 1\Big\} \tag{16}$$

равномерно интегрируема. Так как $|(S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p} \leqslant 2^{2p-1} \times \times \Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} w_{nj}/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p} + \Big|\sum_{j=1}^{n} z_{nj}/\sqrt{c^2\alpha_n}\Big|^{2p}\Big\}$, то из (14) и (16) следует, что последовательность $\{|(S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p}, \ n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. Лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 5. Для $m = 1$ лемма верна. Действительно, в силу (9) $M|(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^2 = (a^2 D\nu_n + c^2\alpha_n)/c^2\alpha_n = 1 + + (a/c)^2 D\nu_n/\alpha_n \to 1$. Из этого следует $M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^2 = D\nu_n/\alpha_n \to 0$, т. е. справедливо (10) для $m = 1$. Предположив, что лемма верна для $m = k$, докажем, что лемма верна и для $m = k + 1$.

Пусть $a \neq 0$, $M|X|^{2(k+1)} < \infty$, выполняются (4) и

$$M|(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)} \to \mu_{2(k+1)}. \tag{17}$$

Тогда последовательность

$$\{|(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)}, \ n \geqslant 1\} \tag{18}$$

равномерно интегрируема. Кроме того, на основании известной теоремы о сходимости моментов [7] для всех натуральных чисел $r \leqslant 2k$ $M|(S_{\nu_n} - - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^r \to \mu_r$, и в силу индуктивного предположения

$$M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2k} \to 0. \tag{19}$$

Отсюда $M|(\nu_n - \alpha_n)/\alpha_n|^{k+1} = (1/\sqrt{\alpha_n})^{k+1} M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{k+1} \leqslant (1/\sqrt{\alpha_n})^{k+1}(M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2k})^{(k+1)/2k} \to 0$ и в силу леммы 6 находим $(S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n} \Rightarrow \mathcal{N}_{0,1}$, и $M|(S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)} \to \mu_{2(k+1)}$ (напомним, что $(S_{\nu_n} - a\nu_n) = y_1 + \ldots + y_{\nu_n}$, где $y_j = X_j - a$, $\{y_j\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $My_1 = 0$ и $M|y_1|^{2(k+1)} \leqslant 2^{2k+1}(M|X|^{2(k+1)} + |a|^{2(k+1)}) < \infty$). Следовательно, последовательность

$$\{|(S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)},\ n \geqslant 1\} \tag{20}$$

равномерно интегрируема. Так как $a \neq 0$ и

$$|a(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)} \leqslant 2^{2k+1}\{|S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)} + \\ + |(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)}\}, \tag{21}$$

то из (18) и (20) следует, что последовательность $\{|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)},\ n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. Из этого факта и (8) (в силу (19)) вытекает $M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2(k+1)} \to 0$. Лемма 5 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Достаточность условия (3) следует из леммы 6 (так как для $a = 0$, условие (11) выполняется тривиально).

Необходимость условия (3). На основании леммы 1 и теоремы 4.5.4 из [8] доказательство будет завершено, если покажем, что

$$M(\nu_n/\alpha_n)^p \to 1. \tag{22}$$

Заметим, что $1 \leqslant M(\nu_n/\alpha_n)^p = \sum_{k \leqslant (1+\varepsilon)\alpha_n} P[\nu_n = k](k/\alpha_n)^p + \sum_{k > (1+\varepsilon)\alpha_n} P[\nu_n = k] \times (k/\alpha_n)^p$, где в силу (2) и (7) для любого $\varepsilon > 0$ $\sum_{k > (1+\varepsilon)\alpha_n} P[\nu_n = k] \times (k/\alpha_n)^p = \sum_{k > (1+\varepsilon)\alpha_n} P[\nu_n = k](M(S_k/\sqrt{c^2\alpha_n})^2)^p \leqslant \sum_{k > (1+\varepsilon)\alpha_n} P[\nu_n = k] M|S_k/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p} = M\{|S_{\nu_n}/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p} I[\nu_n > (1+\varepsilon)\alpha_n]\} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ $1 \leqslant \lim_{n\to\infty} M(\nu_n/\alpha_n)^p \leqslant (1+\varepsilon)^p$. Полагая $\varepsilon \to 0$, получаем требуемый результат (22). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Достаточность условия (6) следует из леммы 6 (так как для $a \neq 0$ условия (6) и (11) эквивалентны, и каждое из них влечет выполнение (3)).

Необходимость условия (6). На основании (4) и (5) последовательность

$$\{|(S_{\nu_n} - a\alpha_n)/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p},\ n \geqslant 1\} \tag{23}$$

равномерно интегрируема. Кроме того, в силу леммы 5

$$M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2m} \to 0, \tag{24}$$

где m — интегральная часть числа p. Затем, так как (24) влечет (3), выполняются (1) и (2). Следовательно, последовательность $\{|(S_{\nu_n} - a_{\nu n})/\sqrt{c^2\alpha_n}|^{2p},\ n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. Этот факт, (23) и неравенство (21) (с одним лишь изменением $2.(k+1)$ на $2p$) доказывают, что последовательность $\{|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2p},\ n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. В силу этого с учетом (24) получаем $M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2p} \leqslant M|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2m} + M\{|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}|^{2p} I[|(\nu_n - \alpha_n)/\sqrt{\alpha_n}| > 1]\} \to 0$, что завершает доказательство необходимости условия (6). Теорема 2 доказана.

1. *Марушин М. Н., Криворуков В. П.* Несколько замечаний о центральной предельной теореме теории моментов четного порядка для сумм случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.—С. 22—28.
2. *Круглов В. М.* О сходимости распределений сумм случайного числа независимых случайных величин к нормальному распределению // Вест. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1976.— № 5.— С. 5—11.

3. *Rényi A.* Probability theory.— Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970.— 666 p.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М. : Мир, 1975.— 648 с.
5. *Burkholder D. L.* Distribution function inequalities for martingales // Ann. Probab.— 1973.— **1**, N 1.— P. 19—42.
6. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
7. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 719 с.
8. *Chung K. L.* A course in probability theory.— New York: Harcourt, 1968.— 331 p.

Польша

Получено 03.03.87