УДК 517.95

Е. В. Булавенко

# О задаче Неймана для оператора теории упругости

В настоящей работе рассматривается задача Неймана для оператора линейной теории упругости в случае неоднородного анизотропного упругого тела, занимающего внутреннюю или внешнюю открытую липшицеву область $\Omega \subset R^n$. Однородная задача в случае неоднородного анизотропного тела, занимающего ограниченную открытую область $\Omega \subset R^n$ гладкости $C^\infty$, рассматривалась в [1].

Обозначим через $D(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся в $\Omega^n \subset R^n$, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ — пространства Соболева с нормой $\|\cdot\|_m$. Оператор-матрицу линейной теории упругости для неоднородного и анизотропного тела, занимающего открытую область $\Omega \subset \tilde{\bar{R}}^n$, обозначим через $L$. Его вид имеется, например, в [2] и здесь не приводится.

Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — перемещения в $\Omega \subset R^n$, а $\varepsilon_{ik}(u)$, $\sigma_{ik}(v)$ — соответствующие этим векторам перемещений компоненты тензоров деформаций и напряжений. Определим функцию $W(u, v) = 1/2\,[\varepsilon_{11}(u)\,\sigma_{11}(v) + \ldots + \varepsilon_{n-1n}(u)\,\sigma_{n-1n}(v)]$, упругий потенциал $W(u) = W(u, u)$. Положим $t(u) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $t_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(u)\,\nu_k$, $i=1, \ldots, n$; $\nu_k$ — направляющие косинусы внешней нормали.

Пусть $\Omega$ — внутренняя или внешняя открытая область в $R^n$, ограниченная липшицевой границей $\Gamma$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Gamma)$ — заданные вектор-функции на $\Omega$ и $\Gamma$ соответственно. Ищем представляющую смещение вектор-функцию $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, которая определена в $\Omega$ и удовлетворяет следующему уравнению и граничному условию:

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$t(u) = \varphi \text{ на } \Gamma. \tag{2}$$

Пусть $u$, $f$, $\varphi$ — гладкие функции, удовлетворяющие (1), (2). В этом случае функция $u$, удовлетворяющая краевому условию (2), принадлежит $H^2(\Omega)$. Умножим скалярно (1) на $v \in D(R^n)$

$$(Lu, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in D(R^n). \tag{3}$$

Применив в (3) теорему Грина, будем иметь

$$(Lu, v) = 2\int_\Omega W(u, u)\,dx - \int_\Gamma t(u)\,v ds \quad \forall v \in D(R^n). \tag{4}$$

Теперь положим $v \in H^1(\Omega)$ и осуществив предельный переход, будет иметь

$$(Lu, v) = 2\int_\Omega W(u, v)\,dx - \int_\Gamma t(u)\,v ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Использовав краевое условие (2), получаем

$$2\int_\Omega W(u, v)\,dx - \int_\Gamma \varphi\cdot v ds = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

где в $\varphi\cdot v$ под $v$ понимается след этой функции [3].

Введем форму $B[u, v] = 2\int_\Omega W(u, v)\,dx$ и перепишем (6) в виде

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle + \langle\varphi, \gamma v\rangle, \; u \in H^1(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega). \tag{7}$$

Элемент $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющий (7), называется обобщенным решением задачи (1), (2). Мы показали, что гладкое решение задачи (1), (2) является обобщенным. Легко видеть, что обобщенное решение удовлетворяет (1) в смысле теории распределений; если $u \in H^2(\Omega)$, оно удовлетворяет также (2).

Рассмотрим задачу (7). Отображение $v \to \langle\varphi, \gamma v\rangle$ определяет некоторый линейный непрерывный функционал $f_\varphi$ на $H^1(\Omega)$. Очевидно, что тогда отображение $\varphi \to f$ определяет некоторый линейный непрерывный оператор $T: L^2(\Gamma) \to H^1(\Omega)'$. Положим $\langle T\varphi, v\rangle = \langle\varphi, \gamma v\rangle$, и перепишем (7) в виде

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle + \langle T\varphi, v\rangle, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

Рассмотрим форму $B_t[u, v] = B[u, v] + t(u, v)$, где $t \geqslant 1$. Пусть $\Omega \subset R^n$ — внутренняя область. Используя положительную определенность формы $B[u, v]$ как формы компонент деформаций $\varepsilon_{ik}$, а также неравенство Корна [4], можно показать, что $H^1(\Omega)$ — коэрцитивность формы $B_t[u, v]$. В самом деле,

$$B_t[u, u] = B[u, u] + t(u, u) = 2\int_\Omega W(u)\,dx + t(u, u) \geqslant k_1 \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_{ik}^2 dx + $$
$$+ t\|u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant \beta\|u\|_1,$$

где $\beta$ — положительная константа. Для внешней области $\Omega \subset R^n$ это утверждение можно доказать аналогично, рассматривая ограниченную область $\Omega' \subset \Omega$ с границей $\Gamma'$ и устремляя радиус-вектор $\Gamma'$ к бесконечности.

Из ограниченности $L$ на $H^1(\Omega)$ следует ограниченность $B[u, v]$ на $H^1(\Omega)$, а следовательно, и ограниченность $B_t[u, v]$ на $H^1(\Omega)$ при фиксированном $t \geqslant 1$.

Симметричность $B_t\,[u, v]$ на $H^1(\Omega)$ следует из симметричности функции $W(u, v)$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Форма $B_t\,[u, v]$ при $t \geqslant 1$ ограничена, коэрцитивна и симметрична на $H^1(\Omega)$.*

Из этой леммы следует, что форма $B_t\,[u, v]$ при $t \geqslant 1$ задает на $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_1$. Пространство с этой нормой обозначим через $\mathcal{H}$.

Теперь перепишем задачу (8) в виде

$$B_t[u, v] - t(u, v) = \langle f, v\rangle + \langle T\varphi, v\rangle, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{9}$$

где $t \geqslant 1$. Так как нормы в $\mathcal{H}$ и $H^1(\Omega)$ эквивалентны, то по теореме Риса существует единственный ограниченный эрмитов оператор $H$ такой, что справедливо

$$(u, v) = (Hu, v)_{\mathcal{H}}, \quad u \in \mathcal{H}, \quad Hu \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Отметим, что при $t = 1$, $\forall u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{L^2\Omega} = 1$ выполняется $(Hu, u)_{\mathcal{H}} = 1$ и, следовательно, $1 \in SpH$.

С другой стороны, существует линейный непрерывный оператор $C: \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ такой, что справедливо равенство

$$\langle f, v\rangle = (Cf, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}, \tag{11}$$

и далее

$$\langle T\varphi, v\rangle = (CT\varphi, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{12}$$

Учитывая равенства (10) — (12), перепишем задачу (9) в виде $(u, v)_{\mathcal{H}} - t(Hu, v)_{\mathcal{H}} = (Cf, v)_{\mathcal{H}} + (CT\varphi, v)_{\mathcal{H}}$, где $t > 1$. Отсюда вытекает, что функция $u \in \mathcal{H}$ при $t > 1$ удовлетворяет следующему линейному уравнению в $\mathcal{H}$:

$$(I - tH)\,u = Cf + CT\varphi. \tag{13}$$

Решение этого уравнения, очевидно, можно представить в виде $u = (I - tH)^{-1}(Cf + CT\varphi)$. Обозначим операторы $G_1 = (I - tH)^{-1}C$, $G_2 = (I - tH)^{-1}CT$, $G_t = \{G_1, G_2\}$, $G_t: \mathcal{H}' \times H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathcal{H}$. Очевидно, оператор $G_t$ — линейный непрерывный оператор, и справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leqslant c\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}), \tag{14}$$

где $c$ не зависит ни от $f$, ни от $\varphi$. Если $\Omega$ — внутренняя область, то по теореме о компактности вложение $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ компактно, и тогда оператор $C$, рассматриваемый как оператор в $L^2(\Omega)$, компактен, а следовательно, компактен и оператор $G_t$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset R^n$ — внутренняя или внешняя открытая область, ограниченная липшицевой границей $\Gamma$, и вещественное $t > 1$. Тогда для каждой пары функций $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Gamma)$ задача (13) имеет единственное решение $u \in \mathcal{H}$ (результат верен, если $f \in \mathcal{H}'$, $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$), которое можно представить в виде линейного непрерывного компактного в $L^2(\Omega)$ для внутренней области оператора $G_t: \mathcal{H}' \times H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathcal{H}$, и справедлива оценка (14).*

Замечание 1. Пусть элементы $u_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, соответственно теореме 1 являются решениями уравнения (13) при различных $t_i$, $t_1 \neq t_2$. Тогда $(L(u_1 - u_2), v) = 0$ $\forall v \in D(\Omega)$, и из непрерывности оператора $L$ в $\mathcal{H}$ следует $u_1 = u_2$.


1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости.— М. : Наука, 1974.— 160 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М. : Наука, 1970.— 940 с.
3. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques.— Prague: Academia, 1967.— 351 p.
4. *Hlavaček I., Nečas J.* On ineqalitis of Korn'stype I. Boundary—Value problems for elliptic Systems of partial differential equations // Arch. Ration. Mech, and Anal.— 1970.— **36**, N 4.— P. 305—312.


Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 19.02.87