УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, А. Т. Кожаметов

Оценки устойчивости линейных стохастических систем

Рассмотрим линейную стохастическую систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$dx(t) = [A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)]\,dt + [B_0 x(t) + B_1 x(t-\tau)]\,dw(t). \tag{1}$$

Здесь A_0, A_1, B_0, B_1 — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание.

Как известно [1—3], стохастическая система называется устойчивой в среднеквадратическом, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|\psi(t)\|^2 < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ следует $M\{\|x(t)\|^2\} < \varepsilon$ при $t > t_0$, где $\psi(t)$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ — любая непрерывная детерминированная начальная функция. Если к тому же $\lim\limits_{t\to\infty} M\{\|x(t)\|^2\} = 0$, то система будет асимптотически устойчивой в среднеквадратическом. Здесь и в дальнейшем под нормами подразумевается $\|x(t)\| = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}$, $\|A\| = \{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наибольшее собственное число матрицы.

При отсутствии отклонения аргумента τ система имеет вид

$$dx(t) = (A_0 + A_1)\,x(t)\,dt + (B_0 + B_1)\,x(t)\,dw(t). \tag{2}$$

Пусть система (2) асимптотически устойчива в среднеквадратическом. Очевидно, если это условие имеет место для системы без запаздывания, то в силу непрерывности оно сохранится и для системы (1) при достаточно малом $\tau < \tau_0$. Кроме того, при решении практических задач представляется важным не только установление факта асимптотической устойчивости, но и вычисление зависимости $\delta(\varepsilon)$, характеризующей качество переходного процесса.

В данной работе вычисляются величины τ_0 и $\delta(\varepsilon, \tau)$, при которых справедливы приведенные утверждения. При исследовании и получении зависимостей используется второй метод А. М. Ляпунова. Учитывая линейность системы, функцию Ляпунова выбираем в виде квадратичной формы $v(x) = x^T H x$, где симметричная матрица H является решением уравнения Ляпунова — Сильвестра [4]

$$(A_0 + A_1)^T H + H(A_0 + A_1) + (B_0 + B_1)^T H (B_0 + B_1) = -C. \tag{3}$$

Если при положительно определенной матрице C решением уравнения (3) будет положительно определенная матрица H, то система без запаздывания (2) асимптотически устойчива в среднеквадратическом [4, 5].

Для функции $v(x) = x^T H x$ справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(H)\,\|x\|^2 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\,\|x\|^2, \tag{4}$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа соответствующих матриц.

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть при* $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ *для начальных условий решения* $x(t)$ *системы* (1) *выполняется* $\|\psi(t)\|^2 < \delta$. *Тогда при* $t_0 < t \leqslant \leqslant t_0 + \tau$ *имеем*

$$M\{\|x(t)\|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta \exp\{(L_1 + L_2\tau)\,\tau\}, \tag{5}$$

где

$$K_1 = \|A_0\| + 2\|A_1\| + \|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2, \quad L_1 = \|A_0\| + \|B^T B_1\| + \|B_0\|^2,$$

$$K_2 = \|A_1\|^2 + \|A_0^T A_1\|, \quad L_2 = \|A_0\|^2 + \|A_0^T A_1\|.$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]\,ds + \int_{t_0}^{t} [B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)]\,dw(s).$$

Учитывая свойства стохастического интеграла, получаем

$$M\{\|x(t)\|^2\} = M\left\{\left\|x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]\,ds\right\|^2\right\} +$$

$$+ M\left\{\left\|\int_{t_0}^{t} [B_0 x(s) + \beta_1 x(s-\tau)]\,dw(s)\right\|^2\right\}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$M\left\{\left\|x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]\,ds\right\|^2\right\} < \delta + 2M\left\{\int_{t_0}^{t} |x^T(t_0)[A_0 x(s) +\right.$$

$$\left. + A_1 x(s-\tau)]|\,ds\right\} + M\left\{\left\|\int_{t_0}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]\,ds\right\|^2\right\} \leqslant [1 + (\|A_0\| +$$

$$+ 2\|A_1\|)\,\tau + (\|A_1\|^2 + \|A_0^T A_1\|)\,\tau^2]\,\delta + [\|A_0\| + (\|A_0\|^2 + \|A_0^T A_1\|)\,\tau] \times$$

$$\times M\left\{\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|^2\,ds\right\}.$$

Для второго слагаемого имеем

$$M\left\{\left\|\int_{t_0}^{t} [B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)]\,dw(s)\right\|^2\right\} = M\left\{\int_{t_0}^{t} \|B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)\|^2\,ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (\|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2)\,\tau\delta + (\|B_0^T B_1\| + \|B_0\|^2)\,M\left\{\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|^2\,ds\right\}.$$

Таким образом, получаем

$$M\{\|x(t)\|^2\} < [1 + (\|A_0\| + 2\|A_1\| + \|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2)\,\tau + (\|A_1\|^2 +$$

$$+ \|A_0^T A_1\|)\,\tau^2]\,\delta + [(\|A_0\| + \|B_0^T B_1\| + \|B_0\|^2) + (\|A_0\|^2 + \|A_0^T A_1\|)\,\tau] \times$$

$$\times M\left\{\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|^2\,ds\right\}.$$

Используя неравенство Беллмана, записываем соотношение (5).

Лемма 2. *Пусть при* $t > t_0 + \tau$ *для произвольного* $s : t_0 - \tau \leqslant s < t$ *выполняется* $M\{v(x(s))\} < M\{v(x(t))\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$M\{x^T(t)HA_1[x(t)-x(t-\tau)]\}\leqslant\frac{1}{2}\tau\|HA_1\|(\|A_0\|+\|A_1\|)(1+\varphi(H)\times$$
$$\times M\{\|x(t)\|^2\},\tag{6}$$
где $\varphi(H)=\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$.

Доказательство. Как следует из системы (1),

$$x(t)-x(t-\tau)=\int\limits_{t-\tau}^{t}[A_0x(s)+A_1x(s-\tau)]\,ds+\int\limits_{t-\tau}^{t}[B_0x(s)+B_1x(s-\tau)]\,dw(s).$$

Отсюда имеем

$$M\{x^T(t)HA_1[x(t)-x(t-\tau)]\}=M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}[x^T(t)HA_1A_0x(s)+x^T(t)HA_1A_0\times$$
$$\times x(s-\tau)]\,ds\Big\}\leqslant\frac{1}{2}\|HA_1\|M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}[\|A_0\|(\|x(t)\|^2+\|x(s)\|^2)+\|A_1\|\times$$
$$\times(\|x(t)\|^2+\|x(s-\tau)\|^2)]\,ds\Big\}.$$

Из условий леммы и неравенства (4) следует

$$M\{\|x(s)\|^2\}<M\{\|x(t)\|^2\}\varphi(H).\tag{7}$$

Поэтому получаем (6).

Лемма 3. *Пусть при* $t>t_0+\tau$ *для произвольного* $s:t_0-\tau\leqslant s<t$ *выполняется* $M\{v(x(s))\}<M\{v(x(t))\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$M\{\|x(t)-x(t-\tau)\|^2\}\leqslant[\tau^2(\|A_0\|^2+2\|A_0^TA_1\|+\|A_1\|^2)+$$
$$+\tau(\|B_0\|^2+2\|B_0^TB_1\|+\|B_1\|^2)]\varphi(H)M\{\|x(t)\|^2\}.\tag{8}$$

Доказательство. Используя свойства стохастического интеграла, получаем

$$M\{\|x(t)-x(t-\tau)\|^2\}=M\Big\{\Big\|\int\limits_{t_0-\tau}^{t}[A_0x(s)+A_1x(s-\tau)]\,ds\Big\|^2\Big\}+$$
$$+M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}\|B_0x(s)+B_1x(s-\tau)\|^2\,ds\Big\}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$M\Big\{\Big\|\int\limits_{t-\tau}^{t}[A_0x(s)+A_1x(s-\tau)]\,ds\Big\|^2\Big\}\leqslant\tau M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}\|A_0x(s)+A_1x(s-\tau)\|^2\,ds\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant\tau M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}[(\|A_0\|^2+\|A_0^TA_1\|)\|x(s)\|^2+(\|A_1\|^2+\|A_0^TA_1\|)\|x(s-\tau)\|^2]\,ds\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant\tau^2(\|A_0\|^2+2\|A_0^TA_1\|+\|A_1\|^2)\varphi(H)M\{\|x(t)\|^2\}.$$

Для второго слагаемого имеем

$$M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t}\|B_0x(s)+B_1x(s-\tau)\|^2\,ds\Big\}\leqslant\tau(\|B_0\|^2+2\|B_0^TB_1\|+$$
$$+\|B_1\|^2)\varphi(H)M\{\|x(t)\|^2\}.$$

Складывая их, получаем (8).

Лемма 4. *Пусть при* $t_0<t\leqslant t_0+\tau$ *выполняется* (5), *а при* $t>$ $>t_0+\tau$ *будет* $dM\{v(x(t))\}\leqslant-\beta M\{\|x(t)\|^2\}$, $\beta\geqslant 0$. *Тогда справед-*

ливо неравенство

$$M\{v(x(t))\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta e^{(L_1+L_2\tau)\tau}\lambda_{\max}(H), \tag{9}$$

где величины K_1, K_2, L_1, L_2 *определены в* (5).

Доказательство. Используя условие леммы и неравенство (4), получаем

$$dM\{v(x(t))\} \leqslant -\beta/\lambda_{\max}(H)\,M\{v(x(t))\}\,dt.$$

Интегрируя полученное выражение, имеем

$$M\{v(x(t))\} \leqslant M\{v(x(t_0+\tau))\}\exp\{-\beta/\lambda_{\max}(H)(t-t_0-\tau)\}, \quad t > t_0+\tau.$$

Учитывая оценки (4), записываем

$$M\{v(x(t))\} \leqslant \lambda_{\max}(H)\,M\{\|x(t_0+\tau)\|^2\}\exp\{-\beta/\lambda_{\max}(H)(t-t_0-\tau)\}.$$

И так как $\beta \geqslant 0$, то получаем (9).

Теорема 1. *Пусть существуют положительно определенные матрицы* H *и* C, *являющиеся решением уравнения* (3). *Тогда при* $\tau < \tau_0$, *где*

$$\tau_0 = 2\lambda_{\min}(C)/[\sqrt{D_1^2 + 4D_2\lambda_{\min}(C)} + D_1],$$

$$D_1 = (\|A_1^TH\| + \|B_1^TH(B_0+B_1)\|)(\|A_0\| + \|A_1\|)(1+\varphi(H)) + \|B_1^THB_1\| \times$$

$$\times (\|B_0\|^2 + 2\|B_0^TB_1\| + \|B_1\|^2)\,\varphi(H),$$

$$D_2 = \|B_1^THB_1\|(\|A_0\|^2 + 2\|A_0^TA_1\| + \|A_1\|^2)\,\varphi(H), \tag{10}$$

система (1) *асимптотически устойчива в среднеквадратическом.*

При этом для произвольного решения $x(t)$ при $t > t_0$ будет $M\{\|x(t)\|^2\} \leqslant \varepsilon$, лишь только при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ для начальной функции выполняется $|\psi(t)|^2 < \delta(\varepsilon, \tau)$,

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \varepsilon[(1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,e^{(L_1+L_2\tau)\tau}\varphi(H)]^{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ выполняется $\|\psi(t)\|^2 < \delta$. Тогда, как следует из леммы 1, при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ имеем $M\{\|x(t)\|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta e^{(L_1+L_2\tau)\tau}$ и, соответственно, для функции Ляпунова

$$M\{v(x(t))\} < \lambda_{\max}(H)(1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta e^{(L_1+L_2\tau)\tau}. \tag{12}$$

Покажем, что это неравенство сохранится и при $t > t_0 + \tau$. Пусть это не так и существует $T > t_0 + \tau$, при котором (12) переходит в равенство. Это значит, что при $t_0 - \tau \leqslant t < T$

$$M\{v(x(t))\} < \lambda_{\max}(H)(1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta e^{(L_1+L_2\tau)\tau} = M\{v(x(T))\}, \tag{13}$$

т. е. выполняются условия лемм 2,3.

Рассмотрим стохастический дифференциал функции $v(x) = x^THx$. Переписывая (1) в виде

$$dx(t) = (A_0 + A_1)\,x(t)\,dt + (B_0 + B_1)\,x(t)\,dw(t) + A_1[x(t-\tau) - x(t)]\,dt +$$

$$+ B_1[x(t-\tau) - x(t)]\,dw(t),$$

учитывая свойства стандартного винеровского процесса и то, что матрицы H, C входят в уравнение (3), получаем

$$M\{dv(x(t))\} = M\{-x^T(t)\,Cx(t) + 2[x(t-\tau) - x(t)]^T A_1^THx(t) + 2[x(t-\tau) -$$

$$- x(t)]^T B_1^TH(B_0 + B_1)\,x(t) + [x(t-\tau) - x(t)]^T B_1^THB_1[x(t-\tau) - x(t)]\}\,dt.$$

Отсюда

$$M\{dv(x(t))\} \leqslant \{-\lambda_{\min}(C)\,M\{\|x(t)\|^2\} + 2M\{[x(t-\tau) - x(t)]^T A_1^THx(t)\} +$$

$$+ 2M\{[x(t-\tau) - x(t)]^T B_1^TH(B_0 + B_1)\,x(t)\} + \|B_1^THB_1\|\,M\{\|x(t) - x(t-\tau)\|^2\}\}\,dt.$$

Поскольку по допущению (13) при $t = T$ выполняются условия лемм 3, 4, то для дифференциала функции Ляпунова имеем

$$M\{dv(x(t))\} \leqslant -\{\lambda_{\min}(C) - \tau(\|A_1^T H\| + \|B_1^T H(B_0+B_1)\|)(\|A_0\| + \|A_1\|) \times \\ \times (1+\varphi(H)) - \|B_1^T H B_1\|[\tau^2(\|A_0\|^2 + 2\|A_0^T A_1\| + \|A_1\|^2) + \tau(\|B_0\|^2 + \\ + 2\|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2)]\varphi(H)\} M\{\|x(t)\|^2\} dt.$$

При $\tau < \tau_0$, где τ_0 определено в (10), и $t = T$ выполняются условия леммы 4, т. е. справедливо неравенство (9), что противоречит допущению (13). Следовательно, оно неверно и $M\{\|x(t)\|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta e^{(L_1+L_2\tau)\tau}$ при всех $t > t_0 + \tau$, т. е. функция $\delta(\varepsilon, \tau)$ имеет вид (11).

Для решений линейных стационарных систем без запаздывания асимптотическая устойчивость носит экспоненциальный характер и справедливо неравенство $M\{\|x(t)\|^2\} \leqslant R\|x(t_0)\|^2 e^{-\gamma(t-t_0)}$, где $R > 0$ и $\gamma > 0$ — некоторые положительные постоянные.

Покажем, что аналогичную оценку можно получить и для решений систем с запаздыванием (1). При выводе будем использовать неавтономную функцию Ляпунова вида $v(x(t)) = e^{\gamma t} x^T H x$, где H — решение уравнения (3), $\gamma > 0$ — постоянная, которую определим позднее.

Лемма 5. *Пусть для произвольного* $s: t_0 - \tau \leqslant s < t$, $t > t_0 + \tau$ *выполняется* $M\{v(x(s), s)\} < M\{v(x(t), t)\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$M\{[x(t) - x(t-\tau)]^T A_1^T H x(t)\} \leqslant \frac{1}{2}\|A_1^T H\|\tau(\|A_0\| + \|A_1\|) \times \\ \times (1 + e^{2\gamma\tau}\varphi(H))\, M\{\|x(t)\|^2\}. \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая вид системы (1) и неравенства квадратичных форм (4), имеем

$$M\{[x(t) - x(t-\tau)]^T A_1^T H x(t)\} \leqslant \frac{1}{2}\|A_1^T H\| M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t} [\|A_0\|(\|x(t)\|^2 + \\ + \|x(s)\|^2) + \|A_1\|(\|x(t)\|^2 + \|x(s-\tau)\|^2)]\, ds\Big\}.$$

Из условий леммы следует, что для произвольного $s: t_0 - \tau \leqslant s < t$

$$M\{\|x(s)\|^2\} \leqslant e^{\gamma(t-s)} M\{\|x(t)\|^2\}\varphi(H). \tag{15}$$

Отсюда получаем (14).

Лемма 6. *Пусть для произвольного* $s: t_0 - \tau \leqslant s < t$, $t > t_0 + \tau$, *выполняется* $M\{v(x(s), s)\} < M\{v(x(t), t)\}$. *Тогда*

$$M\{\|x(t) - x(t-\tau)\|^2\} \leqslant \tau e^{2\gamma\tau}[(\|A_0\|^2 + 2\|A_0^T A_1\| + \|A_1\|^2)\tau + \\ + (\|B_0\|^2 + 2\|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2)]\, M\{\|x(t)\|^2\}\varphi(H). \tag{16}$$

Доказательство. Проводя преобразования, аналогичные приведенным в лемме 3, получаем

$$M\{\|x(t) - x(t-\tau)\|^2\} \leqslant \tau M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t} [(\|A_0\|^2 + \|A_0^T A_1\|)\|x(s)\|^2 + (\|A_0^T A_1\| + \\ + \|A_1\|^2)\|x(s-\tau)\|^2]\, ds\Big\} + M\Big\{\int\limits_{t-\tau}^{t} [(\|B_0\|^2 + \|B_0^T B_1\|)\|x(s)\|^2 + \\ + (\|B_0^T B_1\| + \|B_1\|^2)\|x(s-\tau)\|^2]\, ds\Big\}.$$

Используя неравенство (15), получаем (16).

Лемма 7. *Пусть при* $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ *выполняется* $M\{\|x(t)\|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\, e^{(L_1+L_2\tau)\tau}\delta$, *а при* $t > t_0 + \tau$ *стохастический дифферен-*

циал функции $v(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$ *удовлетворяет неравенству* $dM\{v(x(t), t)\} \leqslant -\beta e^{\gamma t} M\{\| x(t) \|^2\}\, dt$, $\beta > 0$. *Тогда справедливо соотношение*

$$M\{v(x(t), t)\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta\varphi(H) \exp\{(L_1 + L_2\tau)\tau - \\ - \beta(t - t_0 - \tau)/\lambda_{\max}(H)\}. \tag{17}$$

Доказательство. Используя условия леммы и неравенство (4), получаем $dM\{v(x(t), t)\} < -\beta/\lambda_{\max}(H)\, M\{v(x(t), t)\}\, dt$. Интегрируя, имеем

$$M\{v(x(t), t)\} < M\{v(x(t_0 + \tau), t_0 + \tau)\} \exp\{-\beta(t - t_0 - \tau)/\lambda_{\max}(H)\}.$$

Отсюда, вновь используя (4), получаем (17).

Теорема 2. *Пусть существуют положительно определенные матрицы H и C, являющиеся решением уравнения* (4). *Тогда при $\tau < \tau_0$, где τ_0 определено в* (10), *и $t > t_0$ для решений $x(t)$ системы* (1) *справедливо неравенство*

$$M\{\| x(t) \|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2) \sup_{t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0} \{\| \psi(s) \|^2\}\, \varphi(H) \exp\{(L_1 + L_2\tau) - \\ - \gamma(t - t_0 - \tau)\}, \tag{18}$$

где

$$\gamma = \frac{(\lambda_{\min}(C) - \tau D_1 - \tau^2 D_2)\,\gamma_1}{\gamma_1\lambda_{\max}(H) + \lambda_{\min}(C) - \tau D_1 - \tau^2 D_2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\tau} \ln\{[\lambda_{\min}(C) - \tau(\| A_1^T H \| + \| B_1^T H (B_0 + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|)]/ \\ /\tau[(\| A_1^T H \| + B_1^T H (B_0 + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|) + ((\| A_0 \|^2 + 2\| A_0^T A_1 \| + \\ + \| A_1 \|^2)\tau + (\| B_0 \|^2 + 2\| B_0^T B_1 \| + \| B_1 \|^2))\| B_1^T H B_1 \|]\,\varphi(H)\}, \tag{19}$$

D_1, D_2 — определены в (10).

Доказательство. Как следует из леммы 1, если для произвольной детерменированной функции при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ выполняется $\| \psi(t) \|^2 < \delta$, то при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ справедливо $M\{\| x(t) \|^2\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta \exp\{(L_1 + L_2\tau)\tau - \gamma(t - t_0 - \tau)\}$, где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная. Соответственно для функции Ляпунова $v(x, t)$ имеем

$$M\{v(x(t), t)\} < (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta\lambda_{\max}(H) \exp\{(L_1 + L_2\tau)\tau + \gamma(t_0 + \tau)\}.$$

Покажем, что найдется $\gamma > 0$, при котором последнее неравенство выполняется и при $t > t_0 + \tau$. Пусть это не так и существует $T > t_0 + \tau$, при котором

$$M\{v(x(t), t)\} < M\{v(x(T), T)\} = (1 + K_1\tau + K_2\tau^2)\,\delta\lambda_{\max}(H) \exp\{(L_1 + L_2\tau)\tau + \\ + \gamma(t_0 + \tau)\}. \tag{20}$$

Рассмотрим стохастический дифференциал функции $v(x, t)$ вдоль решений системы (1)

$$M\{dv(x(t), t)\} \leqslant -e^{\gamma t}\{[\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H)]\, M\{\| x(t) \|^2\} - 2M\{[x(t - \tau) - \\ - x(t)]^T A_1^T H x(t)\} - 2M\{[x(t - \tau) - x(t)]^T B_1^T H (B_0 + B_1)\, x(t)\} - \\ - \| B_1^T H B_1 \|\, M\{\| x(t) - x(t - \tau) \|^2\}\}\, dt.$$

В силу предположения на промежутке $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant T$ выполняются условия леммы 5, 6. Используя неравенства (14), (16), получаем

$$dM\{v(x(T), T)\} \leqslant -e^{\gamma T}\{\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H) - \tau(\| A_1^T H \| + \| B_1^T H (B_0 + \\ + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|)(1 + e^{2\gamma\tau}\varphi(H)) - \tau e^{2\gamma\tau}[(\| A_0 \|^2 + 2\| A_0^T A_1 \| + \\ + \| A_1 \|^2)\tau + (\| B_0 \|^2 + 2\| B_0^T B_1 \| + \| B_1 \|^2)\| B_1^T H B_1 \|\,\varphi(H)\}\, M\{\| x(T) \|^2\}\, dt.$$

Как следует из теоремы 1, при $\gamma = 0$ стохастический дифференциал отрицательно определенный. Очевидно, это справедливо и при некотором достаточно малом $\gamma > 0$. Найдем γ из условия

$$\lambda_{\min}(C) - \tau(\| A_1^T H \| + \| B_1^T H (B_0 + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|)(1 + e^{2\gamma\tau}\varphi(H)) -$$
$$- \tau e^{2\gamma\tau} [(\| A_0 \|^2 + 2 \| A_0^T A_1 \| + \| A_1 \|^2) \tau + (\| B_0 \|^2 + 2 \| B_0^T B_1 \| + \| B_1 \|^2] \times$$
$$\times \| B_1^T H B_1 \| \varphi(H) > \gamma \lambda_{\max}(H). \qquad (21)$$

Тогда, как следует из леммы 7, справедливо неравенство (17) и, следовательно, допущение (20) неверно. Перепишем (21) в виде

$$[\lambda_{\min}(C) - \tau(\| A_1^T H \| + \| B_1^T H (B_0 + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|)] - e^{2\gamma\tau}\tau \times$$
$$\times \{(\| A_1^T H \| + \| B_1^T H (B_0 + B_1) \|)(\| A_0 \| + \| A_1 \|) + [(\| A_0 \|^2 + 2 \| A_0^T A_1 \| +$$
$$+ \| A_1 \|^2) \tau + (\| B_0 \|^2 + 2 \| B_0^T B_1 \| + \| B_1 \|^2)] \| B_1^T H B_1 \| \varphi(H)\} > \gamma \lambda_{\max}(H).$$

Левая часть неравенства по переменной γ представляет собой монотонно убывающую экспоненту. Заменим ее на отрезке $0 < \gamma < \gamma_1$, где γ_1 определено в (19), отрезком прямой и найдем γ из условия $(\lambda_{\min}(C) - \tau D_1 - \tau^2 D_2) \times \times (1 - \gamma/\gamma_1) = \gamma \lambda_{\max}(H)$. Отсюда получим (19). Поскольку γ удовлетворяет условию (21), то как следует из леммы 7, справедливо (18), что и требовалось доказать.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 354 с.
2. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
3. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
4. *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Положительно определенные решения матричных уравнений Сильвестра — Ляпунова.— Киев, 1986.— 35 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.41).
5. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный алгебраический критерий асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений линейных стохастических уравнений Ито // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 67—77.

Киев. ун-т

Получено 26.06.87