УДК 517.55

А. Ю. Рашковский

Рост и убывание субгармонических функций в конусе

Пусть $u(z)$, $u(0)=0$,— субгармоническая функция в комплексной плоскости, удовлетворяющая условию

$$u(z)\leqslant a|z|^{\rho}+b, \quad a>0, \quad b\geqslant 0, \quad \rho>0. \tag{1}$$

Из формулы Иенсена легко получить следующие интегральные оценки функции $u(z)$ и меры μ, ассоциированной ей по Рису: $\int\limits_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant c_1r^{\rho}$. $\mu(B(0,r))\leqslant c_2r^{\rho}$, где $B(0,r)$ — круг с центром в нуле радиуса r.

Менее тривиальна задача о соответствующих оценках для функций, субгармонических в полуплоскости. Н. В. Говоров [1] установил, что если $u(z)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция вполне регулярного роста в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ относительно порядка $\rho>0$, а заряд ν на вещественной оси — ее граничное значение, то справедливы неравенства

$$\int\limits_0^{\pi}|u(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\leqslant c_1r^{\rho}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\lambda}^{r}\frac{d|\nu|(x)}{|x|}\leqslant c_2r^{\rho}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{B(0,r)\cap\mathbb{C}_+}\sin(\arg z)\,d\mu(z)\leqslant c_3r^{\rho}. \tag{4}$$

При этом порядок ρ функции $u(z)$ определялся как $\max\{\alpha,\beta\}$, где

$$\alpha=\inf\{\alpha'>0:\ u(z)\overset{ac}{<}|z|^{\alpha'}\},\ \beta=\inf\{\beta'>0:\ \varlimsup_{r\to\infty}r^{-\beta'}u(re^{i\theta})\equiv 0\},$$

что эквивалентно определению порядка по Титчмаршу [2]. Отметим, что это определение содержательно и в классе всех субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$ [3] и определять ρ равным α, как это делается для целых функций, неестественно, поскольку, например, функция $f(z)=e^{iz}$ при таком определении имела бы в $\mathbb{C}_+$ нулевой порядок.

В [4] соотношения (3) и (4) были установлены для произвольной субгармонической функции в $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющей условию (1) с $\rho>1$. Полученные Л. И. Ронкиным другим путем (а именно, на основе формулы Карлемана) оценки (2)—(4) с $\rho>1$ легли в основу работы [5]. Идеи, содержащиеся в [5], были развиты в работе [6], в которой изучался рост субгармонических функций в конусе K пространства R^m, удовлетворяющих условию (1) с $\rho>\varkappa^+$, где $\varkappa^+=\varkappa^+(K)$ — наименьшее положительное число такое, что существует функция $H(x)=|x|^{\varkappa+}\ H(x/|x|)$, гармоническая в K и равная нулю на ∂K (в частности, $\varkappa^+(\mathbb{C}_+)=1$). Ясно, что одного условия (1) при $\rho<1$, вообще говоря, недостаточно для выполнения соотношений (2)—(4). Так, функция $u(z)=\ln|b(z)|$, где $b(z)$ — произведение Бляшке для полуплоскости, ограничена сверху в $\mathbb{C}_+$, но левая часть (4), вообще говоря, неограничена. Точно так же функция $u(z)=-Im\ z$ неположительна в $\mathbb{C}_+$, а $\int\limits_0^{\pi}|u(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}r\to\infty$. А. Ф. Гришин [4] выделил класс субгармонических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых все же справедливы оценки (3) — (4), потребовав, чтобы вместе с условием (1) выполнялось и следующее условие: для некоторых чисел $\alpha\in(0,\pi/2)$, $L>1$, $N>0$ в каждой области $D_R = \{z : R < |z| < LR, |\pi/2 - \arg z| < \pi/2 - \alpha\}$ существует точка $z_1 = z_1(R)$ такая, что $u(z_1) > -NR^{\rho *}$.

Как будет показано ниже, этот подход оказывается плодотворным и для функций, субгармонических в конусе пространства $\mathbb{R}^m$. Сочетая его с методами, развитыми в [6], в настоящей работе дадим несколько эквивалентных между собой определений порядка субгармонической функции в конусе, получим соответствующие интегральные оценки функции $u(z)$ и ассоциированных с нею мер (риссовской и граничной). Эти результаты позволят распространить на случай $\rho \leqslant \varkappa^+$ установленные в [6] факты о функциях вполне регулярного роста порядка $\rho > \varkappa^+$.

1. На сфере $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ рассмотрим область Γ с дважды гладкой границей и в этой области краевую задачу $\Delta^*\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Gamma} = 0$, где Δ^* — сферическая часть оператора Лапласа Δ. Через $\lambda_j = \lambda_j(\Gamma)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$, обозначим собственные числа этой краевой задачи. Будем предполагать область Γ такой, что соответствующие числам λ_j собственные функции $\varphi_j = \varphi_j^\Gamma$ принадлежат классу $C^2(\overline{\Gamma})$ и $\partial\varphi_1/\partial n > 0$ на $\partial\Gamma$ ($\partial/\partial n$ — дифференцирование по внутренней нормали). Обозначим через $K = K^\Gamma$ конус $\{x \in \mathbb{R}^m : x/|x| \in \Gamma\}$. Элементы евклидова объема на K и ∂K обозначим соответственно через $d\omega$ и $d\sigma$. Потребуем, чтобы при некотором $x^0 \in \mathbb{R}^m$ для всех $h > 0$ выполнялось включение $\{K + \overline{\{K + hx^0\}} \subset K$. Все функции φ_j будем считать продолженным в K равенствами $\varphi_j(x) = \varphi_j(x/|x|)$ и нормированными условияем $\int_\Gamma |\varphi_j|^2 dS_1 = 1$.

Обозначим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < R\}$, $S_R = \partial B_R$, $K_R = K \cap B_R$, $K_{r,R} = K_R \setminus \overline{B}_r$, $\Gamma_r = K \cap S_r$, $\Gamma_{r,R} = \partial K \cap \overline{K}_{r,R}$; $\theta_m = (m-2)\int_{S_1} dS_1$, $m > 2$, $\theta_2 = 2\pi$; $\varkappa_j^+ = [-m + 2 \pm \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda_j}]/2$. В дальнейшем для краткости функцию φ_1 будем обозначать через φ, а числа $\varkappa_1^\pm$ — через $\varkappa^\pm$.

Множество функций, субгармонических в K, обозначим через $SH(K)$. При $u(x) \in SH(K)$ обозначим через $\mu = \mu_u$ меру, ассоциированную ей по Рису $\left(\mu_u = \dfrac{1}{\theta_m}\Delta u\right)$ В [6] показано, что если функция $u(x) \in SH(K)$ ограничена сверху на всех множествах K_r, $r > 0$, то на границе ∂K конуса K существует вещественная мера (заряд) $\nu = \nu_u$, являющаяся граничным значением функции $u(x)$ в следующем смысле: $\forall \psi \in C(\partial K)$, $\operatorname{supp}\psi \subset\subset \partial K \setminus \{0\}$ $\exists \lim\limits_{h\to+0} \int\limits_{\partial K} \psi(x)\, u(x + hx^0)\, d\sigma(x) = \int\limits_{\partial K} \psi(x)\, d\nu(x)$. Меры μ и ν можно «объединить», определив на $\overline{K}\setminus\{0\}$ вещественную меру $\tau = \tau_u$ равенством

$$\tau(E) = \int\limits_E \left\{\varphi(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{\theta_m}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\, d\nu(x)\right\}. \tag{5}$$

Обозначим через $SH(K; \rho)$ класс всех субгармонических в конусе K функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\exists a > 0$, $b \geqslant 0$: $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$ $\forall x \in K$;

б) существует конус $\tilde{K} = K^{\tilde{\Gamma}}$, $\tilde{\Gamma} \subset\subset \Gamma$, и числа $N > 0$, $l \in (0, 1)$ такие, что для всех R, начиная с некоторого, $\sup\limits_{x \in \tilde{K}_{lR,R}} u(x) > -NR^\rho$.

Нашей ближайшей задачей является получение интегральных оценок функции $u(x) \in SH(K; \rho)$ и ассоциированной с нею меры τ. Для этого предварительно отметим некоторые свойства функции Грина $G^{(\lambda)}(x, y)$ области $K_{\lambda,1}$, $0 < \lambda < 1'$.

Лемма. *Пусть множество $F \subset\subset K_{\lambda,1}$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие константы $c_j = c_j(K, F, \lambda, \varepsilon) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant 5$, что для всех $x \in F$*

* Отметим, что ранее Б. Я. Левиным [7, с. 175] при этих условиях для функции $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая в полуплоскости функция, получено $\mu\{z : |z| < r, \varepsilon < \arg z < \lambda - \varepsilon\} < c_\varepsilon r^\rho$.

выполняются неравенства $c_1\varphi(y) \leqslant \partial G^{(\lambda)}(x, y)/\partial n_y \leqslant c_2\varphi(y), \quad \forall y \in \Gamma_\lambda \cup \Gamma_1$; $\partial G^{(\lambda)}(x, y)/\partial n_y \geqslant c_3 \partial\varphi(y)/\partial n, \quad \forall y \in \Gamma_{\lambda+\varepsilon, 1-\varepsilon}$; $\partial G^{(\lambda)}(x, y)/\partial n_y \leqslant c_4 \partial\varphi(y)/\partial n, \quad \forall y \in \Gamma_{\lambda, 1}$; $G^{(\lambda)}(x, y) \geqslant c_5\varphi(y), \quad \forall y \in K_{\lambda+\varepsilon, 1-\varepsilon}$.

Доказательство для краткости опускаем, тем более, что близкие оценки (в случае $K = \mathbb{C}_+$) содержатся в [4].

Теорема 1. *Пусть функция* $u(x) \in SH(K; \rho)$, $\lambda > 0$. *Тогда при* $R > \lambda$ *справедливы оценки*

$$\int_{\Gamma_R} |u(x)| \varphi(x)\, dS_R \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}, \tag{6}$$

$$|\tau|(\overline{K_{\lambda, R}}) \leqslant D_2 R^{\rho+m-2}, \tag{7}$$

где $D_j = D_j(\lambda, 1, N, \rho, a, b, \tilde{K})$.

Доказательство. Положим $R_1 = lR/2$, $R_2 = \dfrac{3}{4} R$ и обозначим функцию Грина области $K_{R_1, R}$ через $G(x, y)$. Пусть точка $\tilde{x} \in \tilde{K}_{lR_2, R_2} \subset\subset K_{R_1, R}$ такова, что $u(\tilde{x}) > -NR_2^\rho$. В силу ограниченности сверху функции $u(x)$ в области $K_{R_1, R}$ формула Пуассона — Иенсена для нее имеет следующий вид [8]:

$$u(\tilde{x}) = -\int_{K_{R_1, R}} G(\tilde{x}, y)\, d\mu(y) + \frac{1}{\Theta_m} \int_{\Gamma_{R_1}} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_{R_1} +$$

$$+ \frac{1}{\theta_m} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_R + \frac{1}{\theta_m} \int_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} d\nu(y). \tag{8}$$

Докажем соотношение (6). Из представления (8) следует неравенство

$$-\int_{\Gamma_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_R \leqslant \int_{\Gamma_{R_1}} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_{R_1} +$$

$$+ \int_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} d\nu(y) - \theta_m u(\tilde{x}). \tag{9}$$

Заметим, что $G(x, y) = R^{2-m} G^{(1/2)}(x/R, y/R) \quad \forall x, \quad y \in \overline{K}_{R_1, R}$, где $G^{(1/2)}$ — функция Грина области $K_{l/2, 2}$. Поэтому при $y \in \partial K_{R_1, R}$ справедливо равенство $\left.\dfrac{\partial G}{\partial n_y}\right|_{(\tilde{x}, y)} = R^{1-m} \left.\dfrac{\partial G^{(1/2)}}{\partial n_y}\right|_{(\tilde{x}/R,\ y/R)}$. Учитывая оценки леммы, получаем следующие неравенства:

$$c_1 R^{1-m} \varphi(y) \leqslant \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} \leqslant c_2 R^{1-m} \varphi(y), \quad y \in \Gamma_{R_1} \cup \Gamma_R, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} \geqslant c_3 R^{2-m} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial n}, \quad y \in \Gamma_{R_1+\varepsilon R,\ R(1-\varepsilon)}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} \leqslant c_4 R^{2-m} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial n}, \quad y \in \Gamma_{R_1, R}, \tag{12}$$

где $c_j = c_j(\tilde{K}, l)$, $j = 1, 2, 4$, $c_3 = c_3(\tilde{K}, 1, \varepsilon)$. В силу этих соотношений, выбора точки $\tilde{x}$ и условия а) неравенство (9) принимает вид

$$-\int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_R \leqslant c_2 R^{1-m} \int\limits_{\Gamma R_1} u^+(y)\, \varphi(y)\, dS_{R_1} +$$

$$+ c_4 R^{2-m} \int\limits_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n}\, d\nu^+(y) - \theta_m u(\tilde{x}) < CR^{\rho}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} |u(y)|\, dS_R = 2 \int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} u^+(y)\, dS_R -$$

$$-\int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_R < \dot{C}R^{\rho}.$$

Отсюда и из оценки (10) получаем

$$\int\limits_{\dot{\Gamma}_R} |u(y)|\, \varphi(y)\, dS_R \leqslant \frac{R^{m-1}}{c_1} \int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial G(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} |u(y)|\, dS_R \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}.$$

Неравенство (6) доказано. Таким же образом из формулы (8), записанной для области $K_{R_1/2, 2R}$, следует неравенство $\int\limits_{\Gamma_{R_1/2, 2R}} \frac{\partial G_1(\tilde{x}, y)}{\partial n_y} d|\nu|(y) \leqslant D_3 R^{\rho}$, где G_1 — функция Грина области $K_{R_1/2, 2R}$. Отсюда в силу (11) вытекает

$$\int\limits_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} d|\nu|(y) \leqslant D_4 R^{\rho+m-2}. \tag{13}$$

Наконец, используя оценки (6) и (13), из формулы (8) получаем $\int\limits_{K_{R_1, R}} G_1(\tilde{x}, y)\, d\mu(y) \leqslant D_5 R^{\rho}$. Значит,

$$\int\limits_{K R_1, R} \varphi(y)\, d\mu(y) \leqslant \frac{D_5}{c_5} R^{\rho+m-2}. \tag{14}$$

Объединяя неравенства (13) и (14), находим $|\tau|(\overline{K_{R_1, R}}) \leqslant D_6 R^{\rho+m-2}$. Поэтому

$$|\tau|(\overline{K_{\lambda, R}}) \leqslant \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ (l/2)^j \lambda < R}} |\tau|(\overline{K}_{(l/2)^j R,\, (l/2)^{j-1} R}) \leqslant$$

$$\leqslant D_6 \sum_{j \geqslant 1} [(l/2)^{j-1} R]^{\rho+m-2} = D_4 R^{\rho+m-2}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что если для функции $u(x) \in SH(K)$ справедливо соотношение (6), то $\forall \tilde{\Gamma} \subset\subset \Gamma$, $\forall R > \lambda \sup\limits_{x \in \tilde{\Gamma}_R} u(x) \geqslant -\frac{D_1}{\beta} R^{\rho}$, где $\beta = \beta(\tilde{\Gamma}) = \int\limits_{\tilde{\Gamma}} \varphi(x)\, dS_1$, откуда, конечно, следует условие б) с $\tilde{K} = K^{\tilde{\Gamma}}$, $N = D_1/\beta$ и произвольным $l < 1$.

В свою очередь, естественно считать оценки типа (6), (7) характеристическим свойством класса функций, порядок которых не превышает данное числа $\rho > 0$. Тем самым, приходим к следующему определению.

Определение 1. *Порядком* ρ_u *функции* $u(x) \in SH(K)$ *называ-*

ется точная нижняя грань тех чисел $\rho > 0$, *для которых выполнены условия а) и б), т. е.* $\rho_u = \inf\{\rho > 0: u(x) \in SH(K; \rho)\}$.

Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет конечный тип при порядке ρ_u, если $u(x) \in SH(K; \rho_u)$.

В [6] оценки (6), (7) доказаны для функции $u(x) \in SH(K)$, удовлетворяющей только условию а) с $\rho \geqslant \varkappa^+$. Таким образом, если $\rho > \varkappa^+$, то а) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ б) и, следовательно, определение 1 в этом случае эквивалентно обычному определению порядка, т. е. $\rho_u = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(u, r)}{\ln r}$, где $M(u, r) = \sup_{x\in K_r} u^+(x)$.

Л. И. Ронкин предложил следующее «интегральное» определение порядка функции, субгармонической в конусе.

Определение 2. *Порядок функции* $u(x) \in SH(K)$ *называется точная нижняя грань тех чисел* $\rho > 0$, *для которых выполнено а) и*

б$_1$) $\forall \psi \in D(K)\ \lim_{t\to\infty} \int_K t^{-\rho} u(tx) \psi(x)\, d\omega = 0.$

Эквивалентность этих определений следует из теоремы 1.

В определении 2 вместо сходимости семейства функций $u_t(x) = t^{-\rho} u(tx)$ в $D'(K)$ можно требовать его сходимость в $D'(\Gamma)$:

Определение 3. *Порядком функции* $u(x) \in SH(K)$ *называется* inf *тех чисел* $\rho > 0$, *для которых выполняется а) и*

б$_2$) $\forall \eta \in D(\Gamma)\ \lim_{t\to\infty} \int_\Gamma t^{-\rho} u(tx)\, \eta(x)\, dS_1 = 0.$

Это определение также эквивалентно определению 1, и эта эквивалентность сохраняется, если условие б$_2$) заменить любым следующим:

б$_3$) $\int_\Gamma u(Rx)\, \eta(x)\, dS_1 < c(\eta) R^\rho,\ \forall R > R_0,\ \ \forall \eta \in C(\overline{\Gamma})$;

б$_4$) $\int_\Gamma |u(Rx)|\, \varphi(x)\, dS_1 < CR^\rho,\ \forall R > R_0$;

б$_5$) $\exists \tilde\Gamma \subset \Gamma: \left|\int_{\tilde\Gamma} u(Rx)\, dS_1\right| < CR^\rho,\ \forall R > R_0.$

Заметим, наконец, что из условия а) вытекает неравенство

а$_1$) $d\nu(x) < 2(a|x|^\rho + b)\, d\sigma(x)$. С другой стороны, пусть функция $u(x)$ удовлетворяет условиям а$_1$) и б$_4$). Из неравенства (9), записанного для произвольной точки $\tilde x \in K$, $R = 2|\tilde x|$ и $R_1 = |\tilde x|/2$ следует

$$\theta_m u(\tilde x) \leqslant \int_{\Gamma_{R_1}} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_{R_1} + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} u(y)\, dS_R + \int_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} d\nu(y) \leqslant \int_{\Gamma_{R_1}} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} |u(y)|\, dS_{R_1} + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} |u(y)|\, dS_R + 2\int_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} (a|y|^\rho + b)\, d\sigma. \quad (15)$$

Поскольку $\partial G(x, y)/\partial n_y \to 0$ при $x \to \partial K$, $x \in \Gamma_{|\tilde x|}$, равномерно по $y \in \Gamma_{R_1} \cup \Gamma_R$, то фигурирующая в неравенстве (10) константа c_2 может быть выбрана не зависящей от $\tilde x/|\tilde x|$. Тогда в силу оценки (10) из условия б$_4$) следует, что сумма первых двух слагаемых правой части (15) не превышает DR^ρ, где постоянная D не зависит от $\tilde x$. Далее, $\int_{\Gamma_{R_1, R}} \frac{\partial G(\tilde x, y)}{\partial n_y} (a \times$

$\times |y|^{\rho}+b)\,d\sigma(y)\leqslant H(\tilde{x})=\int\limits_{\partial K_{R_1,R}}\frac{\partial G(\tilde{x},y)}{\partial n_y}(a|y|^{\rho}+b)\,ds$, где ds—элемент поверхности $\partial K_{R_1,R}$. Так как функция $H(x)$ гармонична в $K_{R_1,R}$ и непрерывна в $\overline{K_{R_1,R}}$, то по принципу максимума $H(\tilde{x})\leqslant\theta_m(aR^{\rho}+b)\leqslant a'|x|^{\rho}+b'$. Таким образом, выполняется соотношение $u(x)\leqslant a''|x|^{\rho}+b''\ \forall x\in K$, т. е. условие а). Следовательно, порядок субгармонической функции $u(x)$ можно определить и как inf по тем $\rho>0$, для которых выполнены условия $а_1$) и $б_4$).

Как и порядок в смысле Говорова — Титчмарша субгармонической функции в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, порядок в смысле определений 1—3 характеризует не только рост субгармонической функции, но и ее убывание. Естественно возникает вопрос о соотношении между этими порядками в случае $K=\mathbb{C}_+$. Пусть функция $u(z)\in SH(\mathbb{C}_+)$ имеет порядок ρ_u^* в смысле Говорова — Титчмарша. Тогда $\forall\gamma>\rho_u$ ее индикатор $L^{(\gamma)}(z)\overset{\text{def}}{=}\varlimsup\limits_{t\to\infty}t^{-\gamma}u(tz)$ в силу условия а) неположителен. С другой стороны, из условия $б_1$) следует $\forall\psi(z)\in D(\mathbb{C}_+),\ \psi(z)\geqslant 0,\ \int\limits_{\mathbb{C}_+}L^{(\gamma)}(z)\psi(z)\,d\omega=\int\limits_{\mathbb{C}_+}\varlimsup\limits_{t\to\infty}t^{-\gamma}u(tz)\psi(z)\times$ $\times\,d\omega\geqslant\lim\limits_{t\to\infty}t^{-\gamma}\int\limits_{\mathbb{C}_+}u(tz)\psi(z)\,d\omega=0$, поэтому $L^{(\gamma)}(z)\equiv 0$. Значит,

$$\rho_u^*\leqslant\rho_u. \qquad (16)$$

Если априори известно, что $\rho_u>1$, то, как было отмечено выше, $\rho_u=\varlimsup\limits_{r\to\infty}(\ln r)^{-1}M(u,r)$ и, следовательно, в этом случае $\rho_u=\rho_u^*$ [1]. Если же $\rho_u\leqslant 1$, то в соотношении (16) возможно строгое неравенство. Действительно, как показано в [9], для любых наперед заданных α и β, $0<\alpha<\beta\leqslant 1$, существует такое произведение Бляшке $b(z)$ для полуплоскости $\mathbb{C}_+$, что порядок ρ_u^* функции $u(z)=\ln|b(z)|$ равен α, а порядок считающей функции $\hat{n}(t)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{B(0,t)\cap\mathbb{C}_+}\sin(\arg z)\,d\mu(z)$ равен β. В силу оценки (7) это означает, что $\rho_u\geqslant\beta$, т. е. $\rho_u>\rho_u^*$.

2. Покажем, что наличие оценок (6), (7) позволяет распространить результаты [6] о субгармонических функциях вполне регулярного роста в конусе относительно порядка $\rho>\varkappa^+$ на случай произвольного $\rho>0$.

Определение 4. *Функция $u(x)\in SH(K)$ называется функцией вполне регулярного роста (в.р.р.) в K относительно порядка $\rho>0$, если $u(x)\in SH(K;\rho)$ и для каждого конуса $K'=K^{\Gamma'}$, $\Gamma'\subset\subset\Gamma$, существует такое C_0-множество* $E'\subset K'$, *что* $\lim\limits_{|x|\to\infty,\ x\in K'\setminus E'}\sup\left|\frac{u(x)}{|x|^{\rho}}-L_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|=0$, *где* $L_u^*(x)=\varlimsup\limits_{x'\to x}\varlimsup\limits_{t\to\infty}t^{-\rho}u(tx')$ — *регуляризованный индикатор функции* $u(x)$.

Теорема 2**. *Пусть функция $u(x)\in SH(K;\rho)$, $\rho>0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *функция $u(x)$ имеет в. р. р. в K;*

2) *в пространстве $D'(K)$ существует предел* $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-\rho}u(tx)$;

3) *при некоторых $\lambda>0$ и $r>\lambda$,* $\forall\psi(x)\in C(\overline{K}_r)\ \exists\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{K_{\lambda/t,r}}\frac{u(tx)}{t^{\rho}}\times$ $\times\,\psi(x)\frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,d\omega.$

---

* Определение C_0-множества см. в [10].

** Для функций, голоморфных в полуплоскости, результаты, соответствующие результатам [6] и теореме 2, см. в [5, 11].

Будем говорить, что у функции $u(x) \in SH(K; \rho)$ существует конусно-граничная плотность относительно $\rho > 0$, если для каждого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, такого, что $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$, существует $\lim\limits_{R \to \infty} R^{-\rho-m+2} \times \tau_u(\overline{K'_{\lambda,R}})$ (заряды τ_u и τ_L, порожденные функциями $u(x)$ и $L(x) = L_u^*(x)$ соответственно, определены равенством (5)).

Если порядок ρ совпадает с каким-либо из чисел $\varkappa_j^+$, что соответствует случаю целого порядка для функций, голоморфных в полуплоскости, то условие существования пределов $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{\overline{K_{\lambda,R}}} \frac{\varphi_j(y)}{\varphi(x)} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u(x)$, $\forall j : \varkappa_j^+ = \rho$, будем называть условием конусно-граничной уравновешенности.

Отметим, что эти понятия введены в [6] и при $m = 2$, $u(z) = \ln |f(z)|$, где $f(z)$ — функция, аналитическая в полуплоскости, совпадают соответственно с введенными Н. В. Говоровым [1] понятиями аргументно-граничной плотности и аргументно-граничной симметрии.

Будем говорить, что вещественная мера τ в $\overline{K} \setminus \{0\}$ правильно распределена относительно порядка $\rho > 0$, если у нее существует конусно-граничная плотность и дополнительно, в случае $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$, выполнено условие конусно-граничной уравновешенности.

Теорема 3. *Функция $u(x) \in SH(K; \rho)$ имеет в. р. р. в K относительно порядка $\rho > 0$ тогда и только тогда, когда порожденная ею мера τ_u правильно распределена.*

Доказательство теорем 2 и 3 при наличии установленных в теореме 1 оценок практически повторяет доказательство соответствующих утверждений из [6].

1. *Говоров Н. В.* О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— Ростов н/Д, 1966.— 204 с.
2. *Титчмарш Е.* Теория функций.— М. : Наука, 1980.— 464 с.
3. *Хейфиц А. И.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— **239**, № 2.— С. 282—285.
4. *Гришин А.Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функцион. анализ и его прил.— 1968.— Вып. 7.— С. 59—84.
5. *Ронкин Л. И.* Функции вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— N 3.— С. 10—13.
6. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР.— Сер. мат.— 1987—**297**, № 2.— С. 298—302.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 632 с.
8. *Рашковский А. Ю.* Интегральное представление субгармонических функций в конусе.— Харьков, 1985.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Физ. техн. ин-т низ. температур; 85.30).
9. *Бабий В. И.* О порядке убывания произведения Бляшке в полуплоскости.— Харьков, 1986.— 17 с.— Деп. в УкрНИИТИ, № 1696-Ук86.
10. *Азарин В. С.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве // Докл. АН СССР. Сер. мат.— 1962.— **146**, № 4.— С. 743—746.
11. *Бабий В. И.* О голоморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости.— Харьков, 1986.— 15 с.— Деп. в УкрНИИТИ, № 1697-Ук86.
12. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом.— М. : Наука, 1986.— 240 с.

Физ.-техн. ин-т низ. температур, Харьков

Получено 09.03.87