УДК 517.54

П. И. Сижук, А. А. Бутенко

Об уклонении линий уровня и их ортогональных траекторий при однолистных выпуклых отображениях единичного круга

Обозначим через S^0 класс регулярных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, отображающих E на выпуклые области. Через $\tilde{S}_n^0$ и S_n^0, $n = 1, 2, \ldots$, обозначим соответственно множества функций $f(z) = z + \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1}$ и $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn+1} z^{kn+1}$ класса S^0. Очевидно, что классы $\tilde{S}_1^0$ и S_1^0 совпадают с классом S^0, а класс S_n^0, $n = 2, 3, \ldots$, состоит из n-симметричных функций класса S^0, $(\varepsilon^{-1} f(\varepsilon z) = f(z) \in S_n^0$, $\varepsilon = e^{i2\pi/n}$, $n = 2, 3, \ldots)$.

При конформном отображении $w = f(z) \in S^\circ$ круга E степень искажения наглядно выясняет поведение линий уровня (образов концентрических окружностей $|z| = r < 1$) и их ортогональных траекторий (образов радиусов круга E). Важными характеристиками этих линий являются кривизна и уклонение (см. введение и библиографию в [1]) в каждой их точке.

В работе [2] методом структурных формул получены точные оценки кривизны линий уровня в классе S_n^0. В данной статье с помощью результатов работы [3] найдены точные оценки уклонения линий уровня в классах $\tilde{S}_n^0$ и S_n^0, указаны экстремальные функции, реализующие эти оценки. Показано, что уклонение ортогональных траекторий к линиям уровня в классах $\tilde{S}_n^0$ и S_n^0 является неограниченным снизу и сверху. Для класса S всех регулярных однолистных в E функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1'$ этот факт установлен ранее [1].

Зафиксируем точку $z_0 = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Пусть $w = f(z) \in S^0$. Тогда, как известно [1], величина

$$A(z_0; f) = \frac{\operatorname{Im}\left[z_0^2 f'''(z_0)/f'(z_0) - \frac{3}{2}(z_0 f''(z^0)/f'(z_0))^2\right]}{3\,[\operatorname{Re}(1 + z_0 f''(z_0)/f'(z_0))]^2} \tag{1}$$

— уклонение линии уровня функции $f(z)$ в точке $w_0 = f(z_0)$, а величина

$$A(z_0; f) = \frac{\operatorname{Im}\left[\frac{3}{2}(z_0 f''(z_0)/f'(z_0))^2 - z_0^2 f'''(z_0)/f'(z_0)\right]}{3\,[\operatorname{Im}(z_0 f''(z_0)/f'(z_0))]^2} \tag{2}$$

— уклонение ортогональной траектории к линии уровня в точке $w_0 = f(z_0)$.

В связи с приложением результатов работы [3] к получению оценок величины (1) в классах $\tilde{S}_n^0$ и S_n^0 введем в рассмотрение классы $\tilde{P}_n$ и P_n регулярных с положительной вещественной частью в E функций вида $p(z) = 1 + c_1 z^n + c_2 z^{n+1} + \ldots$ и $p(z) = 1 + c_1 z^n + c_2 z^{2n} + \ldots$ соответственно. Отметим, что между классами $\tilde{S}_n^0$ и $\tilde{P}_n$ (S_n^0 и P_n) существует зависимость, определяемая формулой

$$p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \tag{3}$$

где $f(z) \in \tilde{S}_n^0 (S_n^0)$, $p(z) \in \tilde{P}_n (P_n)$.

Теорема 1. *В классе $\tilde{S}_n^0$ для уклонения $A(z_0; f)$ линий уровня в точке $w_0 = f(z_0)$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, справедливы точные оценки $-\tilde{A} \leqslant A(z_0; f) \leqslant \tilde{A}$, где*

$$\tilde{A} = \frac{2(n-1)r^n}{3(1-r^{2n})}, \text{ если } 0 < r \leqslant \tilde{r}_n, \quad n \neq 1, \tag{4}$$

$$\tilde{A} = r^{n-1} \frac{4r^2 + (n-1)^2 (1-r^2)^2}{6(1-r^2)(1-r^{2n})}, \text{ если } \tilde{r}_n < r < 1, \tag{5}$$

$$\tilde{r}_n = (\sqrt{n^2 - 2n + 2} - 1)/(n-1), \quad n = 2, 3, \ldots, \quad \tilde{r}_1 = 0.$$

В случае (4) *экстремальными являются только функции*

$$r_{\pm}(z) = \int_0^z (1 + z^n e^{-i(n\varphi \pm \pi/2)})^{-2/n} dz, \tag{6}$$

а в случае (5) — *функции* $f_{\pm}(z) \in \tilde{S}_n^0$, *производная которых*

$$f'_{\pm}(z) = \exp\left\{2e^{-i\theta} \int_0^z \frac{(c-z) z^{n-1} dz}{1 - \bar{c}z - (c-z) z^n e^{-i\theta}}\right\}, \tag{7}$$

где c *и* θ *постоянные*, $|c| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, *определяемые из соотношений (верхний знак берется для* $f_+(z)$)

$$\sin(\theta - (n+1)\varphi - 2\arg\{(a + 1 \pm i\mu)/(1 - \bar{c}z_0)\}) = \pm 1,$$

$$e^{-i\theta} z_0^n (c - z_0)/(1 - \bar{c}z_0) = (1 - a \pm i\mu)/(1 + a \pm i\mu), \quad \mu = (n-1)\rho \frac{1-r^2}{2r},$$

$$\rho = \frac{2r^n}{1 - r^{2n}}, \quad a = \frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}}, \tag{8}$$

причем функции $f_-(z)$ *доставляют нижние, а функции* $f_+(z)$ — *верхние оценки* $A(z_0; f)$.

Доказательство. Вследствие связи (3) между классами $\tilde{S}_n^0$ и $\tilde{P}_n$ для функционала $A(z_0; f)$ вида (1), определенного на классе $\tilde{S}_n^0$, справедливы точные оценки

$$m/6 \leqslant A(z_0; f) \leqslant M/6, \tag{9}$$

где

$$m = \min_{p \in \tilde{P}_n} \Phi(p(z_0); z_0 p'(z_0)), \quad M = \max_{p \in \tilde{P}_n} \Phi(p(z_0); z_0 p'(z_0)),$$

$$\Phi(\zeta; \eta) = \operatorname{Im}(2\eta - \zeta^2)/\operatorname{Re}\zeta^2. \tag{10}$$

Покажем, что $-m = M = 6\tilde{A}$. В силу теоремы 2 из [3] имеем $m = \min_{\zeta \in K} \min_{\eta \in \tilde{C}} \Phi(\zeta; \eta)$, $M = \max_{\zeta \in K} \max_{\eta \in \tilde{C}} \Phi(\zeta; \eta)$, где $K = \{\zeta : |\zeta - a| \leqslant \rho\}$, $\tilde{C} = \{\eta : |\eta - n(\zeta^2 - 1)/2| = \gamma(\rho^2 - |\zeta - a|^2)\}$, $\gamma = r/(\rho - \rho r^2)$, причем окружность $\tilde{C}$ покрывается только значениями функций $p(z) \in \tilde{P}_n$, представимых формулой

$$p(z) = \frac{1 + z^{n-1}\omega(z)}{1 - z^{n-1}\omega(z)}, \tag{11}$$

где $\omega(z) = e^{-i\theta} z(c - z)/(1 - \bar{c}z)$, $|c| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, параметры c и θ связаны условием $\zeta = p(z_0)$.

Нетрудно видеть, что при фиксированном $\zeta \in K$ $\min_{\eta \in \tilde{C}} \Phi(\zeta; \eta) = \Phi(\zeta; \eta_1)$, $\max_{\eta \in \tilde{C}} \Phi(\zeta; \eta) = \Phi(\zeta; \eta_2)$, где $\eta_k = n(\zeta^2 - 1)/2 + i(-1)^k \gamma(\rho^2 - |\zeta - a|^2)$, $k = 1, 2$. Следовательно, $m = \min_{\zeta \in K} \Phi_1(\zeta)$, $M = \max_{\zeta \in K} \Phi_2(\zeta)$, $\Phi_k(\zeta) = [(n-1) \times \operatorname{Im}\zeta^2 + (-1)^k 2\gamma(\rho^2 - |\zeta - a|^2)]/\operatorname{Re}^2\zeta$, $k = 1, 2$.

Для дальнейшего вычисления величин m и M представим множество точек $\zeta \in K$ в виде $\zeta = x + iy$, $a - \rho = x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = a + \rho$, $-y_0 \leqslant y \leqslant \leqslant y_0 = \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}$. Тогда

$$m = 2 \min_{x \in [x_1, x_2]} \min_{|y| \leqslant y_0} \{-\Psi(x, -y)\}, \quad M = 2 \max_{x \in [x_1, x_2]} \max_{|y| \leqslant y_0} \Psi(x, y), \tag{12}$$

где $\Psi(x, y) = [(n-1)xy + \gamma(2ax - x^2 - y^2 - 1]/x^2$.

Исследуя на экстремум по y функцию $\Psi(x, y)$ при фиксированном $x \in [x_1, x_2]$, находим

$$\max_{|y| \leqslant y_0} \Psi(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y_0), \text{ если: а) } x \in [x_1, x_2], \quad r \in (0, \tilde{r}_n], \quad n \neq 1, \\ \qquad\qquad\qquad \text{б) } x \in [x_1, x^-] \cup [x^+, x_2], \quad r \in (\tilde{r}_n, 1), \\ \Psi(x, y_1), \text{ если } x \in [x^-, x^+], \quad r \in (\tilde{r}_n, 1). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $x^\pm = (a \pm \sqrt{\rho^2 - \mu^2})/(1 + \mu^2)$, $y_1 = \mu x$. Из (12) и (13) имеем

$$m = -M, \quad M = 2 \max_{x \in [x_1, x_0]} \Psi(x), \tag{14}$$

где $\Psi(x) = \Psi_0(x) = (n-1)\sqrt{2ax - x^2 - 1}/x$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, если $0 < < r \leqslant \tilde{r}_n$, $n \neq 1$, и

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_0(x) \text{ при } x_1 \leqslant x \leqslant x^-, \\ \Psi_1(x) \text{ при } x^- \leqslant x \leqslant x^+, \\ \Psi_0(x) \text{ при } x^+ \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases}$$

если $\tilde{r}_n < r < 1$; $\Psi_1(x) = [(n-1)^2 x^2 - 4\gamma^2(x^2 - 2ax + 1)]/(4\gamma x^2)$.

Вычисляя производную $\psi'(x)$, убеждаемся, что при всех допустимых значениях r функция $\Psi(x)$ возрастает на интервале $(x_1, 1/a)$ и убывает на интервале $(1/a, x_2)$, причем $1/a \in (x^-, x^+)$, если $\tilde{r}_n < r < 1$. Следовательно,

$$\max_{x \in [x_1, x_2]} \Psi(x) = \begin{cases} \Psi_0(1/a) = (n-1)\sqrt{a^2 - 1}, \text{ если } 0 < r \leqslant \tilde{r}_n, \quad n \neq 1, \\ \Psi_1(1/a) = \dfrac{(n-1)^2 + 4\gamma^2(a^2 - 1)}{4\gamma}, \text{ если } \tilde{r}_n < r < 1, \end{cases}$$

откуда с учетом (8), (14) находим $-m = M = 6\tilde{A}$. А отсюда при учете (9) получаем указанные в теореме оценки $A(z_0; f)$. Точность оценок следует из доказательства. Экстремальные функции (6) и (7) получаем по формулам (3), (11) с учетом того, что $z_0 p'(z_0) = n(p^2(z_0) - 1)/2 \pm i\gamma(\rho^2 - - |p(z_0) - a|^2)$, а $p(z_0) = (1 \pm i\rho)/a$ в случае (4) и $p(z_0) = (1 \pm i\mu)/a$ в случае (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *В классе S_n^0 для уклонения $A(z_0; f)$ линий уровня в точке $w_0 = f(z_0)$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, справедливы точные оценки $-A \leqslant A(z_0; f) \leqslant A$, где*

$$A = \frac{2(n-1)r^n}{3(1 - r^{2n})}, \text{ если } 0 < r \leqslant r_n, \quad n \neq 1, \tag{15}$$

$$A = \frac{(n-1)^2(1 - r^{2n})^2 + 4n^2 r^{2n}}{6n(1 - r^{2n})^2}, \text{ если } r_n < r < 1, \tag{16}$$

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2n^2 - 2n + 1} - n}{n - 1}\right)^{1/n}, \quad n = 2, 3, \ldots; \quad r_1 = 0.$$

В случае (15) *экстремальными являются только функции* (6), *а в случае* (16)*— функции*

$$f_\pm(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1 - z^n e^{-i(n\varphi \pm \theta_1)})^{\frac{2(1-\lambda)}{n}} (1 - z^n e^{-i(n\varphi \pm \theta_2)})^{\frac{2\lambda}{n}}}, \tag{17}$$

где $2\lambda = 1 + (\nu - \rho^2)/Q$, $Q = \sqrt{(1-\nu)^2\rho^2 + (\rho^2 - \nu^2)a^2}$, $\nu = (n-1)/n$, $e^{i\theta_k} = a\dfrac{(-1)^k Q - \nu(1-\nu)}{\rho[(1-\nu)^2 + a^2]} - i\dfrac{(-1)^k(1-\nu)Q + \nu a^2}{\rho[(1-\nu)^2 + a^2]}$, $k = 1, 2$, *a и ρ определяются по формулам* (8), *причем функции $f_-(z)$ доставляют нижние, а функции $f_+(z)$ — верхние оценки $A(z_0; f)$.*

Доказательство аналогично предыдущему. Опираясь на связь (3) между классами S_n^0 и P_n, по теореме 1 из [3] заключаем, что для функционала (1) на классе S_n^0 справедливы точные оценки (9) с $m = \min\limits_{\zeta\in K}\min\limits_{\eta\in C}\Phi(\zeta;\eta)$, $M = \max\limits_{\zeta\in K}\max\limits_{\eta\in C}\Phi(\zeta;\eta)$, где $K = \{\zeta : |\zeta - a| \leqslant \rho\}$, $C = \{\eta : |\eta - n(\zeta^2-1)/2| = n(\rho^2 - |\zeta - a|^2)/2$, $\Phi(\zeta;\eta)$ определяется по формуле (10).

Далее, как и в предыдущем доказательстве, находим $\min\limits_{\eta\in C}\Phi(\zeta;\eta) = \Phi_1(\zeta)$, $\max\limits_{\eta\in C}\Phi(\zeta;\eta) = \Phi_2(\zeta)$, $\max\limits_{\zeta\in K}\Phi_2(\zeta) = \begin{cases}\Phi_2(\zeta_0), & \text{если } 0 < \rho \leqslant \nu, \quad n \neq 1,\\ \Phi_2(\zeta_1), & \text{если } \nu < \rho < \infty,\end{cases}$
где $\Phi_1(\zeta) = -\Phi_2(\bar\zeta)$, $\Phi_2(\zeta) = [(n-1)\operatorname{Im}\zeta^2 + n(\rho^2 - |\zeta - a|^2)]/\operatorname{Re}^2\zeta$, $\zeta_0 = (1 + i\rho)/a$, $\zeta_1 = (1 + i\nu)/a$.

Выполнив соответствующие подстановки, получим требуемые оценки. Экстремальные функции (6) и (17) находим из уравнения (3), в котором согласно теореме 1 [3] полагаем $p(z) = (1-\lambda)\dfrac{1 + z^n e^{-i\theta_1}}{1 - z^n e^{-i\theta_1}} + \lambda\dfrac{1 + z^n e^{-i\theta_2}}{1 - z^n e^{-i\theta_2}}$, где постоянные λ и θ_k, $k = 1, 2$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, определяем из соотношений $2z_0 p'(z_0) = n(p^2(z_0) - 1) \pm in(\rho^2 - |p(z_0) - a|^2)$, а $p(z_0) = (1 \pm i\rho)/a$ в случае (15) и $p(z_0) = (1 \pm i\nu)/a$ в случае (16). Теорема 2 доказана.

Из теорем 1, 2 при $n = 1$ получаем следующее следствие (ср. с теоремой 6 [1]).

Следствие. *В классе S^0 для уклонения $A(z_0; f)$ линий уровня в точке $w_0 = f(z_0)$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, справедливы точные оценки*

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2 \leqslant A(z_0; f) \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2. \tag{18}$$

Знак равенства в (18) *слева имеет место только для функции $f_-(z)$, а справа — только для функции $f_+(z)$. Здесь*

$$f_\pm(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1 - ze^{-i(\varphi\pm\theta_1)})^{2(1-\lambda)}(1 - ze^{-i(\varphi+\theta_2)})^{2\lambda}},$$

$2\lambda = 1 - \rho/\sqrt{1 + a^2}$, $e^{i\theta_k} = (-1)^k(a - i)/\sqrt{1 + a^2}$, $k = 1, 2$, *a и ρ определяются по формулам* (8) *при* $n = 1$.

Теорема 3. *В классах $\tilde S_n^0$ и S_n^0 уклонение ортогональных траекторий к линиям уровня является неограниченным снизу и сверху.*

Доказательство. Так как $S_n^0 \subset \tilde S_n^0 \subset S^0$, $n = 2, 3, \ldots$, и $S_1^0 \equiv \tilde S_1^0 \equiv S^0$, то достаточно доказать теорему для класса S_n^0, $n = 2, 3, \ldots$. Выбирая θ так, чтобы $\sin(\theta - n\varphi) \neq 0$, для функции $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{(1 - z^n e^{-i\theta})^{2/n}}$, принадлежащей классу S_n^0 при любом действительном θ, по формуле (2) находим ($z_0 = re^{i\varphi}$) $A(z_0; f) = \dfrac{(n-1)(1 - r^{2n})}{6r^n\sin(\theta - n\varphi)}$.
Отсюда следует, что при $n = 2, 3, \ldots$ $A(z_0; f) \to +\infty$, если $\theta \to n\varphi + 0$, и $A(z_0; f) \to -\infty$, если $\theta \to n\varphi - 0$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует установленный в работе [1] результат о неограниченности снизу и сверху уклонения ортогональных траекторий к линиям уровня в классе S, поскольку $S^0 \subset S$.

1. *Черников В. В.*, *Копанев С. А.* Об уклонении линий уровня и их ортогональных траекторий при однолистных конформных отображениях // Сиб. мат. журн.— 1986.— **27**, № 2. С. 193—201.
2. *Зморович В. А.* О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. мат. журн.— 1952.— **4**, № 3.— С. 276—298.
3. *Зморович В. А.*, *Коробкова И. К.* К теории аналитических функций с положительной вещественной частью в круге // Там же.— 1974.— **26**, № 4.— С. 545—549.

Ставроп. пед. ин-т Получено 27,01,87