УДК 517.51

Г. Г. Цегелик

Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение

В работе [1] по аналогии к классическому определению мажоранты и диаграммы Ньютона степенного ряда [2, 3] введено понятие мажоранты и диаграммы Ньютона бесконечной числовой последовательности, установлены необходимые и достаточные условия существования диаграммы Ньютона, изучены свойства мажоранты Ньютона. Как приложение построен приближенный метод поиска информации в базах данных, использующий характеристики диаграммы Ньютона последовательности значений поискового ключа.

В данной работе строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона функций действительного переменного, заданных таблично. Как приложение предлагается алгоритм поиска максимального значения функции, заданной таблично, который может быть использован при обработке на ЭВМ дискретной информации, поступающей от системы датчиков.

Рассмотрим функцию действительного переменного $y = f(x)$, заданную своими значениями в некоторых точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть

$$|y_i| = a_i \leqslant M, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ a_1 a_n \neq 0, \tag{2}$$

где M — некоторая константа.

Определение 1. *Точку P_i $(x_i, -\ln a_i)$ с координатами $x = x_i$, $y = -\ln a_i$ в плоскости xy назовем точкой представления значения функции $y = f(x)$ в точке x_i.*

Допустим, что точки представления P_i значения функции $y = f(x)$ в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в плоскости xy построены. Множество этих точек обозначим через S, а его выпуклую оболочку — через $C(S)$. Для каждого $x \in [x_1; x_n]$ определим точку $B_x(x, \varkappa_x)$, где $\varkappa_x = \inf\limits_{(x,y)\in C(S)} y$. Множество точек $B_x(x, \varkappa_x)$, $x \in [x_1; x_n]$, образует линию $\mathfrak{D}_f$, которая ограничивает $C(S)$ снизу. Эта линия является непрерывной, выпуклой ломаной и ее уравнение имеет вид $y = \varkappa_{(x)}$, $x \in [x_1; x_n]$, где $\varkappa(x) = \varkappa_x$.

Определение 2. *Ломаную линию $\mathfrak{D}_f$, определенную в промежутке $[x_1; x_n]$, назовем диаграммой Ньютона функции $y = f(x)$ в этом промежутке.*

Диаграмма Ньютона функции $y = f(x)$ обладает такими свойствами: 1) каждая вершина $\mathfrak{D}_f$ расположена в одной из точек представления P_i значения функции в точке x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) каждая точка представления P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, находится на $\mathfrak{D}_f$ или расположена выше ее.

Обозначим $\mathfrak{M}_f(x) = \exp(-\varkappa(x))$, $x \in [x_1; x_n]$. Тогда для каждого x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство $|f(x_i)| \leqslant \mathfrak{M}_f(x_i)$. Действительно, из построения $\mathfrak{D}_f$ следует, что $-\ln|f(x_i)| \geqslant \varkappa(x_i)$, или $|f(x_i)| \leqslant \exp(-\varkappa(x_i)) = \mathfrak{M}_f(x_i)$. Кроме этого, $\mathfrak{M}_f(x_1) = |f(x_1)|$, $\mathfrak{M}_f(x_n) = |f(x_n)|$.

Определение 3. *Функцию $y = \mathfrak{M}_f(x)$, определенную в промежутке $[x_1; x_n]$, назовем мажорантой Ньютона функции $y = f(x)$ в этом промежутке.*

Пусть $\mathfrak{M}_f(x_i) = T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 4. *Величины $R_i = (T_{i-1}/T_i)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}$, $i = 2, 3, \ldots, n$; $R_1 = 0$, и $D_i = R_{i+1}/R_i$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$; $D_1 = D_n = \infty$, назовем соответственно i-м числовым наклоном и i-м отклонением диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_f$.*

Определение 5. *Если точка P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, находится в вершине $\mathfrak{D}_f$, то i назовем вершинным индексом, если же на $\mathfrak{D}_f$, то — диаграммным индексом $\mathfrak{D}_f$.*

Множество всех вершинных индексов обозначим через I, а множество диаграммных индексов — через G. Очевидно, $I \subset G$ и $T_i = a_i \ \forall\, i \in G$.

Пусть φ_i — угол между отрезком $B_{x_{i-1}}B_{x_i}$ диаграммы Ньютона и положительным направлением оси абсцисс. Тогда угловой коэффициент k_i отрезка $B_{x_{i-1}}B_{x_i}$ определится по формуле $k_i = \dfrac{\varkappa_{x_i} - \varkappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \ln R_i$. Следовательно, $R_i = \exp(\operatorname{tg}\varphi_i)$, $D_i = \exp(\operatorname{tg}\varphi_{i+1} - \operatorname{tg}\varphi_i)$. Если $\{i_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, s$; $s \leqslant n$, — последовательность вершинных индексов $\mathfrak{D}_f$, то $0 = R_1 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R_{i_s} = R_n$, $\quad R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \ldots = R_{i_{k+1}}$, $\quad D_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $D_{i_k} > 1$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Для любого индекса i, $i_{k-1} \leqslant i \leqslant i_k$, где i_{k-1}, i_k — два последовательных вершинных индекса, имеет место формула

$$T_i = \left(a_{i_{k-1}}^{x_{i_k} - x_i} a_{i_k}^{x_i - x_{i_{k-1}}}\right)^{\frac{1}{x_{i_k} - x_{i_{k-1}}}}.$$

В общем случае, если $x_{i_{k-1}} \leqslant x \leqslant x_{i_k}$, то

$$\mathfrak{M}_f(x) = \left(a_{i_{k-1}}^{x_{i_k}-x} a_{i_k}^{x-x_{i_{k-1}}}\right)^{\frac{1}{x_{i_k}-x_{i_{k-1}}}}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы для функции $y = f(x)$, заданной формулой* (1), *существовала диаграмма Ньютона, определенная в промежутке* $[x_1; x_n]$, *необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось условие* (2).

Доказательство. 1. Пусть для функции $y = f(x)$, заданной формулой (1), существует диаграмма Ньютона $\mathfrak{D}_f$, определенная в промежутке $[x_1; x_n]$. Тогда все точки представления P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, лежат на или выше некоторой прямой $y = kx + b$, где $k \neq \pm\infty$, и $\ln|y_i|$ существует при $i = \overline{1, n}$. Из этого следует, что $-\ln|y_i| \geqslant kx_i + b$, или $|y_i| \leqslant \leqslant \exp(-kx_i - b)$ для каждого x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$.

Поэтому существует константа M, для которой $|y_i| \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $a_1 a_n \neq 0$.

2. Если для функции $y = f(x)$, заданной формулой (1), выполняется условие (2), то $-\ln|y_i| \geqslant -\ln M$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $-\ln|y_1| \leqslant h$, $-\ln|y_n| \leqslant h$, где h — некоторая константа. Из этого следует, что все точки представления P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, лежат на или выше прямой $y = -\ln M$, причем точки P_1 и P_n лежат не выше прямой $y = h$. Поэтому, если строить выпуклую оболочку множества точек P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то она будет ограничена снизу некоторой ломаной линией, соединяющей точки P_1 и P_n Эта линия и будет диаграммой Ньютона функции $y = f(x)$.

Теорема 2. *Мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_f(x)$ является непрерывной и логарифмически вогнутой функцией в промежутке* $[x_1; x_n]$.

Доказательство. Поскольку $\varkappa(x)$ — непрерывная и выпуклая функция в промежутке $[x_1; x_n]$, то непрерывной и выпуклой в этом промежутке является функция $-\ln \mathfrak{M}_f(x)$. Из этого следует непрерывность $\mathfrak{M}_f(x)$ и ее логарифмическая вогнутость.

Теорема 3. *Если для функции $y = f(x)$, заданной формулой* (1), *выполняется условие* (2), *то* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(x_i)| = \max\limits_{x \in [x_1; x_n]} \mathfrak{M}_f(x)$. *При этом, если* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(x_i)| = |f(x_s)|$, *то* $\max\limits_{x \in [x_1; x_n]} \mathfrak{M}_f(x) = \mathfrak{M}_f(x_s) = T_s$, $s \in G$.

Доказательство. Предположим, что для функции $y = f(x)$, заданной формулой (1), выполняется условие (2). Тогда согласно теореме 1 для функции $y = f(x)$ существует диаграмма Ньютона $\mathfrak{D}_f$, определенная в промежутке $[x_1; x_n]$. Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(x_i)| = |f(x_s)|$. Покажем, что x_s — точка максимума мажоранты Ньютона $\mathfrak{M}_f(x)$, определенной в промежутке $[x_1; x_n]$. Действительно, для любого x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство $|f(x_s)| \geqslant |f(x_i)|$, или $-\ln|f(x_s)| \leqslant -\ln|f(x_i)|$. Из полученного неравенства и построения $\mathfrak{D}_f$ следует, что для произвольного $x \in \in [x_1; x_n]$ выполняется соотношение $\varkappa(x_s) \leqslant \varkappa(x)$, или $-\ln \mathfrak{M}_f(x_s) \leqslant \leqslant -\ln \mathfrak{M}_f(x)$. Поэтому $\mathfrak{M}_f(x_s) \geqslant \mathfrak{M}_f(x)$ для любого $x \in [x_1; x_n]$. Это означает, что x_s — точка максимума функции $\mathfrak{M}_f(x)$, определенной в промежутке $[x_1; x_n]$. Дальнейшее доказательство теоремы следует из того, что $-\ln|f(x_s)| = \varkappa(x_s)$.

Рассмотрим алгоритм определения последовательности вершинных индексов и последовательности числовых наклонов Предположим, что с помощью $k - 1$ шагов уже найдены последовательные вершинные индексы $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и числовые наклоны $0 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R^{i}{}_k$. В i-м шаге определение i_{k+1} и $R_{i_{k+1}}$ осуществляется следующим способом.

а). Определяем

$$R = \min_{i_k < i \leqslant n} \left(\frac{a_{i_k}}{a_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i_k}}}. \tag{3}$$

б). Определяем индекс i, для которого в (3) достигается минимум, и обозначаем его через i_{k+1}. Если минимум в (3) достигается для нескольких индексов $i_{k1}, i_{k2}, \ldots, i_{ks_k}$, то через i_{k+1} обозначаем больший из них: $i_{k+1} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant s_k} (i_{kj})$. Индексы i_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, будут диаграммными индексами $\mathfrak{D}_f$.

в). Полагаем $R_{i_{k+1}} = R$. В первом шаге берем $i_1 = 1$ ($R_{i_1} = 0$) и находим i_2 и R_{i_2}.

Через конечное число шагов будет найдена последовательность вершинных и диаграммных индексов, а также последовательность числовых наклонов.

Пусть m, $1 < m < n$, — произвольный индекс. Обозначим

$$r_m^+ = \min_{1\leqslant i\leqslant n-m} \left(\frac{a_m}{a_{m+i}}\right)^{\frac{1}{x_{m+i}-x_m}}, \quad r_m^- = \max_{1\leqslant i\leqslant m-1} \left(\frac{a_{m-i}}{a_m}\right)^{\frac{1}{x_m-x_{m-i}}},$$

$$d_m = r_m^+ / r_m^- .$$

Теорема 4. *Если $d_m > 1$, то $m \in I$, $D_m = d_m$, $R_m = r_m^-$, $R_{m+1} = r_m^+$; если $d_m = 1$, то $m \in G \setminus I$, $D_m = 1$, $R_m = R_{m+1} = r_m^- = r_m^+$; если же $d_m < 1$, то $m \notin G$, $D_m = 1$, $R_m = R_{m+1}$.*

Доказательство теоремы следует из построения диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_f$ функции $y = f(x)$, заданной формулой (1).

Следствие. *Если для некоторого индекса $m \in I$, $1 < m < n$, выполняется одно из соотношений: а) $R_m < 1$, $R_{m+1} > 1$;* б) *$R_m < 1$, $R_{m+1} = 1$;* в) *$R_m = 1$, $R_{m+1} > 1$, то точка x_m будет точкой максимума функции $y = f(x)$; если $R_2 \geqslant 1$, то точкой максимума будет точка x_1; если $R_n \leqslant 1$, то точкой максимума будет точка x_n.*

Данное следствие и алгоритм построения последовательности вершинных индексов и последовательности числовых наклонов фактически определяют метод поиска максимального значения функции $y = f(x)$, заданной формулой (1). Этот метод может быть использован при обработке на ЭВМ дискретной информации, поступающей от системы датчиков.

1. *Цегелик Г. Г.* Мажоранты и диаграммы Ньютона числовых последовательностей и их приложение к поиску информации в базах данных.— Киев, 1985.— 12 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики; 85-49).
2. *Ostrowski A.* Recherches sur la Méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent // Acta math.— 1940.— **72**.— P. 99—258.
3. *Костовский А. Н.* Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных.— Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1967.— 208 с.

Львов. ун-т

Получено 25.11.86