УДК 513

Е. Е. Маренич

Факториальность проективного предела факториальных колец

В настоящей статье найдены условия, при которых проективный предел факториальных колец является факториальным кольцом. Рассмотрены примеры применения этого результата.

Все рассмотренные в работе кольца предполагаются областями целостности и считается, что при гомоморфизме колец единица переходит в единицу. $K_1 < K_2$ обозначает, что K_1 — подкольцо K_2, $K_1 \cong K_2$ обозначает, что кольца K_1 и K_2 изоморфны, K_1^* обозначает множество всех обратимых элементов кольца K_1. $\{K_n,\ i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — проективная система колец, где $i_{n+1}: K_{n+1} \to K_n$ — гомоморфизмы. Напомним, что проективным пределом $\varprojlim K_n$ называется кольцо согласованных последовательностей $(a_n)_1^\infty$, т. е. таких последовательностей, что $i_{n+1}(a_{n+1}) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $a = (a_n)$ — согласованная последовательность. Положим $j_n(a) = a_n$, j_n — гомоморфизм, $j_n: \varprojlim K_n \to K_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Определим порядок Pa последовательности a: $Pa = \begin{cases} m, & \text{если } a_m \neq 0 \text{ и для всех } n < m,\ a_n = 0; \\ \infty, & \text{если } a \text{ — последовательность нулей.} \end{cases}$

1. Факториальность проективного предела факториальных колец.

Теорема 1. *Пусть $\{K_n, i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — проективная система колец, где $i_{n+1}: K_{n+1} \to K_n$ — эпиморфизмы, $i_{n+1}^{-1} K_n^* = K_{n+1}^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если кольца K_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, факториальны, то $\varprojlim K_n$ — факториальное кольцо.*

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если в согласованной последовательности (a_n) хотя бы один элемент a_m обратим в K_m, то (a_n) обратима в $\varprojlim K_n$;*

2) *если в необратимой в $\varprojlim K_n$ согласованной последовательности (a_n) хотя бы один элемент a_m является простым в K_m, то (a_n)* — простой *элемент $\varprojlim K_n$.*

Доказательство леммы. 2). Предположим противное: (a_n) — составной элемент $\varprojlim K_n$. Тогда $(a_n) = (b_n)(c_n)$, где (b_n), (c_n) неравные 0, необратимые элементы $\varprojlim K_n$. Так как $a_m = b_m c_m$ — простой элемент K_m, то b_m или c_m обратим в K_m. Поэтому (b_n) или (c_n) обратима в $\varprojlim K_n$ Лемма доказана.

Пусть a — элемент K_n, $a \neq 0$, a необратим и каноническое разложение a в K_n имеет вид $a = u p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}$, где u — обратимый элемент K_n; $p_1, \ldots, p_s$ — попарно неассоциированные простые элементы K_n. Обозначим $\Omega_n(a)$ число всех простых элементов, учитывая их кратность в каноническом разложении a в K_n, т. е. $\Omega_n(a) = r_1 + \ldots + r_s$. Для всех a, b из K_n, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\Omega_n(ab) = \Omega_n(a) + \Omega_n(b)$. Обозначим через $W_n(a)$ число попарно неассоциированных простых элементов без учета их кратности в каноническом разложении a в K_n, т. е. $W_n(a) = s$.

Лемма 2. *Пусть a — элемент $\varprojlim K_n$, $a \neq 0$, a — необратим. Существуют N и набор целых неотрицательных чисел $r_1, \ldots, r_s$ таких, что для всех $n > N$ каноническое разложение $j_{n+1}a$ в K_{n+1} имеет вид*

$$j_{n+1}a = u p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}, \tag{1}$$

где u — обратимый элемент K_{n+1}; $p_1, \ldots, p_s$ — попарно неассоциированные простые элементы K_{n+1}, $i_{n+1}p_1, \ldots, i_{n+1}p_s$ — попарно неассоциированные простые элементы K_n.

Доказательство. Пусть $Pa = m$, $n \geqslant m$. Рассмотрим каническое разложение $j_{n+1}a$ в K_{n+1}, которое имеет вид (1). Из (1) находим $j_n a = (i_{n+1}u)(i_{n+1}p_1)^{r_1} \dots (i_{n+1}p_s)^{r_s}$, элементы $i_{n+1}p_1, \dots, i_{n+1}p_s$ не равны 0 и необратимы в K_n, $i_{n+1}u$ обратим в K_n. Имеем $\Omega_n(j_n a) = r_1\Omega_n(i_{n+1}p_1) + \dots + r_s\Omega_n(i_{n+1}p_s) \geqslant r_1 + \dots + r_s = \Omega_{n+1}(j_{n+1}a)$, причем равенство $\Omega_n(j_n a) = \Omega_{n+1}(j_{n+1}a)$ возможно только тогда, когда $\Omega_n(i_{n+1}p_1) = \dots = \Omega_n(i_{n+1}p_s) = 1$, т. е. когда $i_{n+1}p_1, \dots, i_{n+1}p_s$ — простые элементы K_n. Последовательность $(\Omega_n(j_n a))_{n=m}^{\infty}$ монотонно не возрастает и все ее члены $\geqslant 1$. Поэтому, начиная с некоторого номера, эта последовательность стационарна. Может случиться, что среди $i_{n+1}p_1, \dots, i_{n+1}p_s$ есть элементы, попарно ассоциированные в K_n, поэтому $W_n(j_n a) \leqslant W_{n+1}(j_{n+1}a)$, начиная с некоторого номера. Так как последовательность $(W_n(j_n a))_{n=m}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, монотонно не убывает и $W_n(j_n a) \leqslant \Omega_n(j_n a)$, то, начиная с некоторого номера, эта последовательность также стационарна. Отсюда следуют все утверждения леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть a — элемент $\underleftarrow{\lim} K_n$, $a \neq 0$, a — необратим. Сначала докажем, что a можно разложить в произведение простых элементов. Пусть число N определено леммой 2. Для $n = N + 1$ имеем

$$j_n a = u_n p_{1n}^{r_1} \dots p_{sn}^{r_s}, \tag{2}$$

где u_n обратим в K_n; $p_{1n}, \dots, p_{sn}$ — попарно неассоциированные простые элементы K_n. В K_{n+1} каноническое разложение $j_{n+1}a$ имеет вид $j_{n+1}a = up_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$, где u обратим в K_{n+1}, $p_1, \dots, p_s$ — попарно неассоциированные простые элементы K_{n+1} такие, что $i_{n+1}p_1, \dots, i_{n+1}p_s$ — попарно неассоциированные простые элементы K_n. Из последнего канонического разложения находим $j_n a = (i_{n+1}u)(i_{n+1}p_1)^{r_1} \dots (i_{n+1}p_s)^{r_s}$. Сравнивая это каноническое разложение с (2), видим, что без потери общности можно считать, что $i_{n+1}p_r$ ассоциирован с p_{rn} в K_n, $r = 1, \dots, s$, так как достаточно $p_1, \dots, p_s$ перенумеровать в нужном порядке. Поэтому существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K_n^*$ такие, что $i_{n+1}p_r = \alpha_r p_{rn}$, $r = 1, \dots, s$. Выберем $\beta_r \in K_{n+1}^*$ так, что $i_{n+1}\beta_r = \alpha_r$, $r = 1, \dots, s$. Обозначим $\beta_r^{-1}p_r = p_{r,n+1}$, $r = 1, \dots, s$. Имеем

$$j_{n+1}a = u_{n+1}p_{1,n+1}^{r_1} \dots p_{s,n+1}^{r_s}, \tag{3}$$

где $u_{n+1} = u\beta_1^{r_1} \dots \beta_s^{r_s}$ обратим в K_{n+1}, $p_{1,n+1}, \dots, p_{s,n+1}$ — попарно неассоциированные простые элементы K_{n+1}. Итак, построено (3) — каноническое разложение $j_{n+1}a$ в K_{n+1} такое, что $i_{n+1}(p_{r,n+1}) = p_{r,n}$, $i_{n+1}(u_{n+1}) = u_n$, $r = 1, \dots, s$. Повторяя приведенные выше рассуждения для чисел $n+2$, $n+3, \dots$, получаем неполные согласованные последовательности $(u_n)_{N+1}^{\infty}$, $(p_{rn})_{N+1}^{\infty}$, $r = 1, \dots, s$ такие, что

$$j_n a = u_n p_{1n}^{r_1} \dots p_{sn}^{r_s}, \tag{4}$$

где u_n обратим в K_n; $p_{1n}, \dots, p_{sn}$ — попарно неассоциированные простые в K_n, $n = N+1, N+2, \dots$. Доопределим указанные выше неполные согласованные последовательности до согласованных последовательностей $(u_n)_1^{\infty}$, $(p_{rn})_1^{\infty}$, $r = 1, \dots, s$. Очевидно, что (4) будет выполнено для $n = 1, 2, 3, \dots$. Из (4) следует $a = (u_n)_1^{\infty}(p_{1n})_1^{\infty} \dots (p_{rn})_1^{\infty}$, где (u_n) обратима в $\underleftarrow{\lim} K_n$, (p_{rn}) — простой элемент $\underleftarrow{\lim} K_n$, $r = 1, \dots, s$.

Для доказательства единственности разложения на простые множители в $\underleftarrow{\lim} K_n$ достаточно доказать следующее утверждение: пусть a, b — элементы $\underleftarrow{\lim} K_n$, p — простой элемент $\underleftarrow{\lim} K_n$, если $p \mid ab$, то $p \mid a$ или $p \mid b$. Докажем это утверждение.

Если $p \mid a$, то утверждение доказано. Пусть $p \nmid a$. Тогда существует N такое, что для всех $n > N$, $j_n p \nmid j_n a$ в K_n, $j_n p$ — простой элемент K_n. Так как $j_n p \mid j_n a j_n b$ в K_n, то $j_n p \mid j_n b$ в K_n для $n > N$. Поэтому для всех n, $j_n p \mid j_n b$ в K_n. Отсюда следует, что $p \mid b$ в $\underleftarrow{\lim} K_n$ Теорема доказана.

2. Примеры. 1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — последовательность попарно коммутирующих переменных; $R[[x]]$ — кольцо ф. с. р. от счетного числа переменных над кольцом R; $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ — последовательность всех простых натуральных чисел, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., взятых в естественном порядке; мультииндекс $r = (r_1, r_2, r_3, \ldots)$ — последовательность целых неотрицательных чисел, почти все члены которой равны 0; $p^r = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots$ — целое неотрицательное число.

Теорема 2. *Если кольца $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ факториальны, то кольцо ф. с. р. $R[[x]]$ факториально.*

Доказательство. Пусть $K_n = R[[x_1, \ldots, x_n]]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Рассмотрим ф. с. р. $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ из K_{k+1}, определим i_{n+1}, $i_{n+1} f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n, 0)$, i_{n+1} — эпиморфизм, $i_{n+1} : K_{n+1} \to K_n$, для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Для проективной системы $\{K_n, i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ рассмотрим $\varprojlim K_n$. Пусть $(f_n)_1^\infty$ — согласованная последовательность $\varprojlim K_n$. Так как свободные члены всех f_n совпадают, то $i_{n+1}^{-1} K_n^* = K_{n+1}^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. По теореме 1 кольцо $\varprojlim K_n$ факториально. Нетрудно проверить, что $\varprojlim K_n \cong R[[x]]$. Теорема доказана.

Используя [1, с. 597, 601], получаем следствие 1.

Следствие 1. *Если R — или кольцо дискретного нормирования, или поле, или кольцо главных идеалов, то кольцо $R[[x]]$ факториально.*

В теореме 2 и следствии 1 дано новое доказательство результатов, известных из [1, с. 599, 601].

Пусть $A(R)$ — кольцо функций f, $f : \mathbb{N} \to R$. В $A(R)$ операции сложения и умножения определены следующим образом: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$, $(f \cdot g)(n) = \Sigma f(\alpha) g(n/d)$ — суммируется по всем $d|n$.

Пусть f — ф. с. р. из $R[[x]]$, $f = \Sigma a_r(f) x^r$. Положим, $\gamma_1(f)(n) = a_r(f)$, если $p^r = n$, γ_1 — изоморфизм, $\gamma_1 : R[[x]] \to A(R)$.

Рассмотрим кольцо $D(R)$ формальных рядов Дирихле, т. е. рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $a_n \in R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, относительно обычных операций сложения и умножения рядов Дирихле. Определим γ_2, $\gamma_2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, γ_2 — изоморфизм, $\gamma_2 : A(R) \to D(R)$.

Следствие 2. *Если R — или кольцо дискретного нормирования, или поле, или кольцо главных идеалов, то кольца $A(R)$, $D(R)$ факториальны.*

В следствии 2 дано новое доказательство известных из [3, 4, с. 51] результатов.

Пример 2. Пусть $c = (c_n)$ — последовательность положительных действительных чисел, $0_n = (0, \ldots, 0)$ — кортеж из n нулей. Поликругом $E[c]$ назовем множество $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$ таких, что $|z_n| \leqslant c_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть f — функция счетного числа комплексных переменных z, определенная в $E[c]$. Функцию f назовем слабо голоморфной функцией счетного числа переменных в $E[c]$, если $f(z)$ для $z \in E[c]$ разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд счетного числа переменных с комплексными коэффициентами.

Теорема 3. *Кольцо слабо голоморфных функций счетного числа переменных факториально.*

Доказательство. Пусть K — кольцо слабо голоморфных функций счетного числа переменных; K_n — кольцо функций n комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфных в точке O_n, в силу известной теоремы Вейерштрасса [2, с. 89—95], кольца K_n факториальны, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Определим i_{n+1}, $i_{n+1} f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = f(z_1, \ldots, z_n, 0)$, i_{n+1} — гомоморфизм, $i_{n+1} : K_{n+1} \to K_n$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Для проективной системы $\{K_n, i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ рассмотрим $\varprojlim K_n$. Функция f_n обратима в K_n тогда и только тогда, когда $f_n(0_n) \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Поэтому $i_{n+1}^{-1} K_n^* = K_{n+1}^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ По теореме 1 кольцо $\varprojlim K_n$ факториально. Нетрудно проверить что $K \cong \cong \varprojlim K_n$. Теорема доказана.

1. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Мир, 1971.— 707 с.
2. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных.— М. : Мир, 1969.— 395 с.
3. *Маренич Е. Е.* Решение одной задачи С. Улама // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Мат. — Казань : 1983, № 5.
4. *Улам С.* Нерешенные математические задачи.— М. : Наука, 1964.— 168 с.

Мурман. пед. ин-т

Получено 12.01.87