УДК 517.946

С. Г. Крейн, С. Я. Львин

Решение переопределенных и недоопределенных эллиптических задач в случае негладких данных

1. Постановка задачи. Пространства. Формула Грина. Пусть G — ограниченная область с гладкой границей Γ в конечномерном евклидовом пространстве. Рассмотрим краевую задачу

$$A(x, D)\,u_0(x) = f_0(x) \ \text{ в } \ G, \ \ B(x,D)\,u_0(x) = \varphi(x) \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{1}$$

где $u_0(x)$ — неизвестная комплекснозначная n-мерная вектор-функция, $f_0(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные соответственно m- и μ-мерные вектор-функции, $A(x, D)$ и $B(x, D)$ — матрицы размера $m \times n$ и $\mu \times n$ соответственно из линейных дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами. Матрица A состоит из дифференциальных операторов r-го порядка, i-я строка матрицы B состоит из операторов ρ_i-го порядка, $\rho_i < r$, $0 \leqslant \mu \leqslant p$, где $p = r \min\{m, n\}$.

Считая, что (1) — переопределенная или недоопределенная эллиптическая задача, рассмотрим ее, следуя [1], в аппроксимационной постановке. В переопределенном случае будем искать аппроксимационное решение задачи, т. е. такую вектор-функцию $u_0(x)$, удовлетворяющую граничным условиям $Bu_0 = \varphi$, что $A(x, D)\,u_0(x)$ наилучшим образом в смысле нормы $L_2(G; \mathbb{C}^m)$ аппроксимирует $f_0(x)$. В недоопределенном случае будем искать решение задачи (1), ближайшее в $L_2(G; \mathbb{C}^m)$ к заданной вектор-функции $\tilde{u}_0(x)$.

Будем рассматривать (1) в шкале пространств обобщенных функций, гладкость которых определяется параметром $s \geqslant 0$ и возрастает с ростом s (при $s < 0$ аппроксимационная постановка теряет смысл). Случай $s = r$ был рассмотрен в [1]. Таким образом, в отличие от [1], гладкость f_0, φ и $\tilde{u}_0$ произвольна (с учетом ограничений, вытекающих из аппроксимационной постановки). В частности, при $s = 0$ в переопределенном случае f_0 из $L_2(G; \mathbb{C}^m)$, в недоопределенном случае при $s = 0$ u_0 из $L_2(G; \mathbb{C}^n)$.

Будем использовать наряду с пространствами Соболева $H^s(G)$ и $H^s(\Gamma)$ пространство $\tilde{H}^{s,(l)}(G)$, введенное Я. А. Ройтбергом (см., например, [2]), полученное замыканием множества гладких функций по норме

$$\|u\|_{\tilde{H}^{s,(l)}(G)} = \Big\{\|u\|^2_{H^s(G)} + \sum_{j=1}^{l} \|D_n^{j-1}u\|^2_{H^{s-j+1/2}(\Gamma)}\Big\}^{1/2},\ s \text{ — любое вещественное,}$$

$l \geqslant 0$ — целое, $s \neq 1/2 \pmod 1$, D_n — производная по нормали к Γ. Опишем существенные для нас свойства пространств $\tilde{H}^{s,(l)}(G)$, установленные Я. А. Ройтбергом. Замыкание отображения $u \to \{u|_G, u|_\Gamma, \ldots, (D_n^{l-1}u)|_\Gamma\}$, $u \in C^\infty(\bar{G})$, устанавливает изометрическое соответствие между элементом $u \in \tilde{H}^{s,l}(G)$ и набором $\{u_0, u_1, \ldots, u_l\}$, где $u_0 \in H^s(G)$, $u_j \in H^{s-j+1/2}(\Gamma)$ при $1 \leqslant j \leqslant l$, причем функция u_j — след $D_n^{j-1}u_0$ на Γ при $s - j \geqslant 0$, u_j — произвольная функция из $H^{s-j+1/2}(\Gamma)$ при $s - j < 0$. Тот факт, что функция $u_0 \in H^s(G)$ соответствует элементу $u \in \tilde{H}^{s,(l)}(G)$, представим в виде $u_0 = u|_G$. Из этого следует, что каждую функцию $u_0 \in H^s(G)$ можно достроить (однозначно при $s - l \geqslant 0$) до элемента $u \in \tilde{H}^{s,(l)}(G)$ такого, что $u|_G = u_0$.

Пусть $u = \{u_0, u_1, \ldots, u_l\} \in \tilde{H}^{s,(l)}(G)$. По определению полагается, что $(D_n^{j-1}u)|_\Gamma = u_j$, $j = 1, \ldots, l$. Тогда, если $b(x, D)$ — граничный линейный дифференциальный оператор порядка r, $r < l$, то определено значение bu на Γ как линейная комбинация u_j и их производных по касательным к Γ направлениям $(1 \leqslant j \leqslant l)$, причем $\|(bu)|_\Gamma\|_{H^{s-r-1/2}(\Gamma)} \leqslant c\,\|u\|_{\tilde{H}^{s,(l)}(G)}$.

Пусть теперь $a(x, D)$ — линейный дифференциальный оператор порядка $r, r \leqslant l$. По определению $au = \{f_0, f_1, \ldots, f_{l-r}\}$, где $f_0 - \lim\limits_{k\to\infty} av_k$ в $H^{s-r}(G)$, $v_k \in C^\infty(\overline{G})$, $v_k \to u$ в $\widetilde{H}^{s,(l)}(G)$; $f_j - \lim\limits_{k\to\infty}(D_n^{j-1}av_k)|_\Gamma$ в $H^{s-r-j+1/2}(\Gamma)$ или, что то же самое, — результат применения граничного оператора $D_n^{j-1}a$ к элементу u, $j = 1, \ldots, l-r$. При этом $\|au\|_{\widetilde{H}^{s-r,(l-r)}(G)} \leqslant$ $\leqslant c\|u\|_{\widetilde{H}^{s,(l)}(G)}$. Если же $s \geqslant r$, то $f_0 = (au)|_G$ совпадает с $a(u|_G)$.

В дальнейшем используем обозначения $H^s(G; \mathbb{C}^n) = \bigotimes\limits_{j=1}^{n} H^s(G)$, $\widetilde{H}^{s,(l)}(G) = \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \widetilde{H}^{s,(l)}(G)$, $H^{s-\rho}(\Gamma; \mathbb{C}^\mu) = \bigotimes\limits_{j=1}^{\mu} H^{s-\rho_j}(\Gamma)$.

Предположим, что для гладких вектор-функций u и v интегрированием по частям можно получить формулу Грина

$$(Au, v)_{L_2(G;\mathbb{C}^m)} + (Bu, C'v)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} = (u, A^*v)_{L_2(G;\mathbb{C}^n)} + (Cu, B'v)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^{p-\mu})}, \tag{2}$$

где A^* — формально сопряженный к A оператор (размера $n \times m$), матрицы C, C' и B' имеют размеры $(p-\mu) \times n$, $\mu \times m$ и $(p-\mu) \times m$ соответственно. Формулу Грина можно продолжить по непрерывности для $u \in \widetilde{H}^{s,(l)}(G; \mathbb{C}^n)$, $v \in \widetilde{H}^{r-s,(l_1)}(G; \mathbb{C}^m)$, $l \geqslant r$, $l_1 \geqslant r$, s — любое, до формулы

$$((Au)_G, v|_G)_{L_2(G;\mathbb{C}^m)} + (Bu, C'v)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} = (u|_G, (A^*v)|_G)_{L_2(G;\mathbb{C}^n)} + (Cu, B'v)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^{p-\mu})}. \tag{2'}$$

Задачу

$$A^*(x, D)v(x) = g(x) \text{ в } G,\ B'(x, D)v(x) = \psi(x) \text{ на } \Gamma \tag{3}$$

называют формально сопряженной задаче (1) относительно формулы Грина.

2. Переопределенная эллиптическая задача. Пусть (1) — переопределенная эллиптическая задача, т. е. $m \geqslant n$, ранг главной части символа A равен n, соответствующая модельная задача на полуоси имеет нулевое ядро и справедлива формула Грина (2) (см. подробные определения в [1]). Будем искать аппроксимационное решение задачи (1).

Теорема 1. *Пусть (1) — переопределенная эллиптическая задача и* $f_0 \in H^s(G; \mathbb{C}^m)$, $\varphi \in H^{s+r-\rho-1/2}(\Gamma; \mathbb{C}^\mu)$, $s \geqslant 0$. *Выберем любой элемент* $f \in \widetilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^m)$ *такой, что* $f|_G = f_0$.

Тогда задача

$$A^*Au = A^*f \text{ в } G,\ B'Au = B'f,\ Bu = \varphi \text{ на } \Gamma \tag{4}$$

является хорошо поставленной эллиптической задачей, ее решение $u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G; \mathbb{C}^n)$ *всегда существует. При этом вектор-функция* $u_0 = u|_G$, *где* u *— решение задачи* (4), *является аппроксимационным решением переопределенной эллиптической задачи* (1).

Обратно, каждое аппроксимационное решение $u_0 \in H^{s+r}(G; \mathbb{C}^n)$ *задачи* (1) *есть* $u_0 = u|_G$, *где* $u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G; \mathbb{C}^n)$ *— решение задачи* (4) *с некоторой* $f \in \widetilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^m)$ *такой, что* $f|_G = f_0$.

Доказательство. Тот факт, что (4) — хорошо поставленная эллиптическая задача, доказан в [1]. Такие задачи в пространствах $\widetilde{H}^{s,(l)}$ изучал Я. А. Ройтберг (см., например, [2], скалярный случай — [3]). Он доказал, что из эллиптичности задачи (4) вытекает, что ее ядро в пространстве $\widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G; C\ )$ (s — любое) состоит из бесконечно дифференцируемых функций, а необходимым и достаточным условием разрешимости (4) в этом пространстве есть ортогональность правых частей ядру формально сопряженной задачи.

Из формулы (2) для гладких u и v вытекает равенство

$$(A^*Au, v)_{L_2(G;\mathbb{C}^n)} + (B'Au, Cv)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^{p-\mu})} + (Bu, C'Av)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} =$$

$$= (Au,\ Av)_{L_2(G;\mathbb{C}^m)} + (C'Au,\ Bv)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} + (Bu,\ C'Av)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)}, \qquad (5)$$

которое можно продолжить по непрерывности для $u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ и $v \in \widetilde{H}^{r-s,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$, при этом первые слагаемые в правой и левой части (5) следует понимать как $((A^*Au)|_G,\ v|_G)_{L_2(G;\mathbb{C}^n)}$ и $((Au)|_G,\ (Av)|_{L_2(G;\mathbb{C}^m)}$ соответственно.

При $s \geqslant 0$ из $v \in \widetilde{H}^{r-s,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ следует $v \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$. Поэтому (5) справедливо и при $u,\ v \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$. Из (5) вытекает формальная самосопряженность задачи (4).

Если $u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ из ядра задачи (4), то, применяя (5) при $u=v$, получаем $(Au,\ Au)_{L_2(G;\mathbb{C}^m)} = 0$, откуда следует, что u — из ядра задачи (1). Обратное включение очевидно. Итак, в пространстве $\widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ ядра задачи (1) и формально самосопряженной задачи (4) совпадают.

Как отмечалось, условие разрешимости задачи (4) в пространстве $\widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ — ортогональность правых частей ядру формально сопряженной задачи, т. е. выполнение равенства

$$((A^*f)|_G)_{L_2(G;\mathbb{C}^n)} + (B'f,\ Cv)_{L_2(G;\mathbb{C}^{p-\mu})} + (\varphi,\ C'Av)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} = 0 \qquad (6)$$

для всех $v \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ из ядра формально сопряженной к (4) задачи, или в силу изложенного выше для всех v из ядра задачи (1). Однако справедливость (6) для всех v из ядра задачи (1) очевидна в силу (2′). Итак, задача (4) разрешима в пространстве $\widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$, $s \geqslant 0$.

Положим $M = \{f_0 \in H^s(G;\ \mathbb{C}^m) : \exists u_0 \in H^{s+r}(G;\ \mathbb{C}^n),\ \ Au_0 = f_0,\ \ Bu_0|_\Gamma = 0\}$. Из описанных выше свойств пространств $\widetilde{H}^{s,(l)}$ и неотрицательности s вытекает $M = \widetilde{M}$, где $\widetilde{M} = \{f_0 \in H^s(G;\ \mathbb{C}^m) : \exists u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n),\ \ Au = f,\ Bu|_\Gamma = 0,\ f|_G = f_0\}$.

Пусть $\varphi \equiv 0$, $u \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ — решение задачи (4) и $u_0 = u|_G$. Тогда $z = f - Au \in \widetilde{H}^{s,(r)}(G;\ \mathbb{C}^m)$ — элемент ядра задачи (3). В силу формулы (2′) $z|_G$ ортогонален $\widetilde{M}$. С другой стороны, $z|_G = f|_{\bar{G}} - |(Au)_G = f_0 - Au_0$. Так как $Au_0 \in M$, $f_0 - Au_0$ ортогонален M, то Au_0 — проекция f_0 на M в $L_2(G;\ \mathbb{C}^m)$, т. е. ближайший к f_0 элемент из M. Но тогда u_0 — аппроксимационное решение задачи (1) (в случае $\varphi \equiv 0$).

Другие аппроксимационные решения задачи (1) имеют вид $u_0 + w_0$, где $u_0 = u|_G$ — найденное решение, а элемент $w_0 \in H^{s+r}(G;\ \mathbb{C}^n)$ — из ядра задачи (1). Выберем элемент $w \in \widetilde{H}^{s+r,(2r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ такой, что $w|_G = w_0$ и положим $g = Aw$. Заметим, что $Bw|_\Gamma = 0$, $g|_G = 0$. Но тогда $u + w$ — решение задачи (4), где вместо f следует написать $F = f + g$, при этом $F|_G = f|_G = f_0$. Итак, каждое аппроксимационное решение — $u_0 + w_0 = (u + w)|_G$, где $u + w$ — решение задачи (4).

Теорема полностью доказана в случае $\varphi \equiv 0$. Переход к случаю $\varphi \neq 0$ — стандартный [1].

3. Недоопределенная эллиптическая задача. В недоопределенном случае сразу рассмотрим обобщенные решения задачи (1), поэтому перепишем ее в виде

$$Au = f \text{ в } G,\ Bu = \varphi \text{ на } \Gamma. \qquad (7)$$

Итак, пусть (7) — недоопределенная эллиптическая задача, т. е. $m \leqslant n$, ранг главной части символа A равен m, справедлива формула Грина (2) и соответствующая сопряженная модельная задача на полуоси имеет только нулевое ядро (см. подробные определения в [1]). Предположим, что при заданных $f \in H^{s-r}(G;\ \mathbb{C}^m)$, $\varphi \in H^{s-\rho-1/2}(\Gamma;\ \mathbb{C}^\mu)$ задача (7) разрешима в пространстве $\widetilde{H}^{s,(r)}(G;\ \mathbb{C}^n)$ и пусть $\widetilde{u}_0 \in H^s(G;\ \mathbb{C}^n)$ — заданная вектор-функция. Будем искать решение $u \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$ задачи (7) такое, что

$$\| u|_G - \tilde{u}_0 \|_{L_2(G;\mathbb{C}^n)} \to \min. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in H^{s-r}(G; \mathbb{C}^m)$, $\varphi \in H^{s-\rho-1/2}(\Gamma; \mathbb{C}^\mu)$, $\tilde{u}_0 \in H^s(G; \mathbb{C}^n)$, $s \geqslant 0$, *и при заданных* f *и* φ *недоопределенная эллиптическая задача* (7) *разрешима в пространстве* $\tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$. *Выберем любой элемент* $\tilde{u} \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$ *такой, что* $\tilde{u}|_G = \tilde{u}_0$.

Тогда задача

$$AA^*v = f - A\tilde{u} \text{ в } G, \; BA^*v = \varphi - B\tilde{u}, \; B'v = 0 \text{ на } \Gamma \tag{9}$$

является хорошо поставленной эллиптической задачей, ее решение $v \in \tilde{H}^{s+r,(2r)}(G; \mathbb{C}^n)$ *всегда существует. Решение аппроксимационной задачи* (7), (8) *находится по формуле*

$$u = \tilde{u} + A^*v, \tag{10}$$

где v — *решение задачи* (9).

Обратно, каждое решение задачи (7), (8) *находится по формуле* (10) *с некоторым* $\tilde{u} \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$ *таким, что* $\tilde{u}|_G = \tilde{u}_0$. *Для всех решений и задачи* (7), (8) *элемент* $u|_G$ *один и тот же.*

Доказательство. Тот факт, что (9) — хорошо поставленная эллиптическая задача, доказан в [1]. Как и для задачи (4), из формулы Грина получаем, что задача (9) — формально самосопряженная, ее ядро совпадает с ядром задачи (3) в пространстве $\tilde{H}^{s+r,(2r)}(G; \mathbb{C}^n)$, а условие разрешимости задачи (9) — это выполнение равенства

$$((f - A\tilde{u})|_G, v|_G)_{L_2(G;\mathbb{C}^m)} + (\varphi - B\tilde{u}, C'v)_{L_2(\Gamma;\mathbb{C}^\mu)} = 0 \tag{11}$$

для всех v из ядра задачи (3).

Из разрешимости задачи (7) следует, что $f = Au_1$, $\varphi = Bu_1$ для некоторого $u_1 \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$. Но тогда равенство (11) — следствие формулы Грина (2'). Итак, задача (9) разрешима.

Пусть $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $v \in \tilde{H}^{s+r,(2r)}(G; \mathbb{C}^n)$ — решение задачи (9). Тогда $u = \tilde{u} + A^*v$ — элемент ядра задачи (7) в пространстве $\tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$. Если обозначить $N = \{u_0 \in H^s(G; \mathbb{C}^n) : \exists u \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n),\ Au = 0,\ Bu|_\Gamma = 0,\ u|_G = u_0\}$, то тогда $u|_G \in N$. В силу формулы (2') функция $(A^*v)|_G$ ортогональна N в $L_2(G; \mathbb{C}^n)$.

Итак, $u|_G = \tilde{u}_0 + (A^*v)|_G \in N$, $(A^*v)|_G$ ортогональна N, следовательно, $u|_G$ — проекция $\tilde{u}_0$ на N. Но тогда u — решение задачи (7), (8) в случае $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$.

Другие решения задачи (7), (8) отличаются от найденного u на элемент $w \in \tilde{H}^{s,(r)}(G; \mathbb{C}^n)$ из ядра задачи (7), причем $w|_G = 0$. Но тогда $u + w = \tilde{u} + w + A^*v$, где v — решение задачи (9), в которой $\tilde{u}$ можно заменить на $\tilde{u} + w$. Кроме того, $(\tilde{u} + w)|_G = \tilde{u}_0$. Тем самым теорема полностью доказана в случае $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Переход к ненулевым правым частям — стандартный [1].

1. *Крейн С. Г., Львин С. Я.* Переопределенные и недоопределенные эллиптические задачи // Функцион. анализ и мат. физика.— Новосибирск, 1985.— С. 106—116.
2. *Ройтберг Я. А.* Теорема о полном наборе изоморфизмов для общих эллиптических систем // Укр. мат. журн.— 1975.— **27**, № 4.— С. 544—548.
3. *Функциональный* анализ / Под ред. С. Г. Крейна.— М. : Наука, 1972.— 544 с.

Воронеж. лесотехн. ин-т

Получено 12.05.87