УДК 531.381

В. Н. Кошляков

О неустойчивости вертикального вращения тяжелого тела

Настоящая статья является продолжением и развитием публикаций [1—4]. В отличие от указанных работ в данной статье построено точное решение исходной нелинейной системы, соответствующее невозмущенному движению. Получены условия неустойчивости такого решения.

1. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку O, не совпадающую с его центром тяжести. В точке O расположим начало неподвижного трехгранника $O\xi\eta\zeta$ и связанного с телом трехгранника $Oxyz$, оси которого совпадают с направлениями главных осей инерции тела в точке O. В работах [1—4] получены уравнения движения в следующем виде:

$$2ABCd^2\lambda/dt^2 + Q\lambda = 0, \tag{1}$$

где $\lambda = \| \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \|$ — транспонированная матрица-столбец параметров Родрига — Гамильтона; A, B, C — моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz; Q — матрица вида*

$$Q = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{Vmatrix},$$

где $a_1 = 2\mathrm{ABC}(\dot\lambda_0^2 + \dot\lambda_1^2 + \dot\lambda_2^2 + \dot\lambda_3^2)$, $a_2 = BC[M_x - (C-B)qr]$, $a_3 = CA \times \times [M_y - (A-C)rp]$, $a_4 = AB[M_z - (B-A)pq]$. Здесь p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy и Oz; M_x, M_y, M_z — проекции на эти же оси момента силы веса, действующей на тело.

Параметры λ_k связаны между собой условием нормировки

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{2}$$

Распределение масс полагаем произвольным. Отметим лишь соотношения, вытекающие из определения осевых моментов инерции тела $A + B \geqslant C$, $B + C \geqslant A$, $C + A \geqslant B$ и соответственно $A - B \leqslant C$, $B - C \leqslant A$, $C - A \leqslant B$. Допустим, что в начальный момент к телу прикладывается вращательный импульс относительно главной оси Oz, совпадающей в этот момент с неподвижной вертикалью $O\zeta$, вследствие чего тело приобретает значительную угловую скорость ω относительно вертикали. Диссипация энергии считается пренебрежимо малой и не учитывается. Центр тяжести тела с координатами x_c, y_c, z_c в системе осей $Oxyz$ полагается не лежащим на оси Oz. Случаи стационарных вращений Штауде относительно множества вертикальных осей, не являющихся главными для точки O, из рассмотрения исключаются [5].

Начальной ориентации оси Oz соответствует равенство нулю угла нутации ϑ. В этом случае вращение тела вырождается в его поворот на угол $\psi + \varphi$ относительно оси $O\zeta$ (ψ — угол прецессии, φ — угол чистого вращения). Полагая $\psi + \varphi = 2\chi$, имеем [1—4] $\chi = \chi(0) + \omega t/2$, где $\chi(0)$ — начальное значение угловой величины χ.

Далее осуществляем преобразование вращения с угловой величиной χ к некоторым новым переменным u_k, $k = 0, 1, 2, 3$, которое, в отличие от публикаций [1—4], непосредственно применяем к системе (1), полагая

$$\lambda = \Lambda u, \tag{3}$$

где

$$u = \| u_0, u_1, u_2, u_3 \|^T, \quad \Lambda = \begin{Vmatrix} \cos\chi & 0 & 0 & \sin\chi \\ 0 & -\cos\chi & -\sin\chi & 0 \\ 0 & -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ \sin\chi & 0 & 0 & -\cos\chi \end{Vmatrix}.$$

В результате уравнение (1) приводится к нелинейному матричному уравнению вида

$$a_0 d^2u/dt^2 + a_0\Omega du/dt + Su = 0, \tag{4}$$

* Исправим неточность, допущенную в работе [3]: в матрице (2) указанной работы следует изменить знаки элементов a_2, a_3 и a_4 на противоположные. В дальнейшем изложении работы [3] это обстоятельство не отражается.

где

$$a_0 = 2ABC, \quad \Omega = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$S = \left\| \begin{matrix} s & -a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & s & a_4 & a_3 \\ -a_3 & -a_4 & s & a_2 \\ a_4 & -a_3 & -a_2 & s \end{matrix} \right\|,$$

а также $s = a_0 [\dot{u}_0 (\dot{u}_0 + \omega u_3) + \dot{u}_1 (\dot{u}_1 + \omega u_2) + \dot{u}_2 (\dot{u}_2 - \omega u_1) + \dot{u}_3 (\dot{u}_3 - \omega u_0)]$. Проекции p, q, r угловой скорости тела на связанные с ним оси выражаются через переменные u_k следующим образом:

$$p = 2 [u_1 \dot{u}_0 - u_0 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_3 + \omega (u_1 u_3 - u_0 u_2)],$$

$$q = 2 [-u_2 \dot{u}_0 - u_3 \dot{u}_1 + u_0 \dot{u}_2 + u_1 \dot{u}_3 - \omega (u_0 u_1 + u_2 u_3)],$$

$$r = \omega - 2\omega (u_1^2 + u_2^2) + 2 (u_3 \dot{u}_0 - u_2 \dot{u}_1 + u_1 \dot{u}_2 - u_0 \dot{u}_3).$$

Соответственные выражения для проекций M_x, M_y и M_z имеют вид

$$M_x = P \{2 (u_0 u_1 + u_2 u_3) z_c + [1 - 2 (u_1^2 + u_2^2)] y_c\},$$

$$M_y = P \{2 (u_0 u_2 - u_1 u_3) z_c + [1 - 2 (u_1^2 + u_2^2)] x_c\},$$

$$M_z = 2P [(u_0 u_1 + u_2 u_3) x_c + (u_1 u_3 - u_0 u_2) y_c],$$

где P — вес тела.

2. Уравнение (4) допускает точное частное решение, соответствующее постоянным u_k, получаемое путем обращения в нуль составляющих a_j, $j = 2, 3, 4$, матрицы S. Имеем, таким образом, три уравнения для определения надлежащих значений u_k. К ним присоединяем уравнение (2), распространяющееся в силу неособенного преобразования (3) и на переменные u_k. Обозначая через u_k^* значения переменных u_k, удовлетворяющих названным уравнениям, получаем

$$\begin{gathered} 2 \{(C - B) [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] \omega^2 - P z_c\} (u_0^* u_1^* + u_2^* u_3^*) = P [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] y_c, \\ 2 \{(C - A) [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] \omega^2 - P z_c\} (u_0^* u_2^* - u_1^* u_3^*) = P [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] x_c, \\ P (u_1^* x_c - u_2^* y_c) = 2 (B - A) \omega^2 u_0^* u_1^* u_2^*, \quad u_0^{*2} + u_1^{*2} + u_2^{*2} + u_3^{*2} = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Уравнения (5) допускают следующее решение:

$$u_3^* = 0, \quad u_0^* = \sqrt{1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})}, \tag{6}$$

где u_1^* и u_2^* удовлетворяют системе двух нелинейных уравнений

$$\begin{gathered} 2 \{(C - B) [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] \omega^2 - P z_c\} \sqrt{1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})}\, u_1^* = \\ = P [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] y_c, \\ 2 \{(C - A) [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] \omega^2 - P z_c\} \sqrt{1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})}\, u_2^* = \\ = P [1 - 2 (u_1^{*2} + u_2^{*2})] x_c. \end{gathered} \tag{7}$$

Чтобы показать это, находим из первых двух уравнений системы (5) величины $u_0^* u_1^*$ и $u_0^* u_2^*$, полагая $u_3^* \equiv 0$. Далее подставляя названные величины в третье из уравнений системы (5), записанное в виде

$$P\,(u_0^* u_1^* x_c - u_0^* u_2^* y_c) = 2\,(B - A)\,\omega^2\,(u_0^* u_1^*)\,(u_0^* u_2^*),$$

убеждаемся в его тождественном удовлетворении. Полагая затем $u_3^* = 0$ в последнем из уравнений (5), убеждаемся в справедливости выражений (6) и (7). Из них легко получаются приближенные значения u_0^*, u_1^* и u_2^*, если пренебречь квадратами величин u_1^* и u_2^* в сравнении с единицей. Имеем [1 — 4]

$$u_0^* = 1, \quad u_1^* = \frac{1}{2}\,\frac{Py_c}{(C-B)\,\omega^2 - Pz_c}\,, \quad u_2^* = \frac{1}{2}\,\frac{Px_c}{(C-A)\,\omega^2 - Pz_c}\,.$$

3. Движение тела, соответственное решениям (6) и (7), выберем в качестве невозмущенного. В возмущенном движении полагаем

$$u_k = u_k^* + x_k, \tag{8}$$

где x_k — вариации величин u_k. Учитывая уравнения (5), осуществляем далее подстановку (8) в матричном уравнении (4). В результате приходим к уравнению вида

$$a_0 d^2x/dt^2 + D^* dx/dt + S' u^* = X, \tag{9}$$

где $x = \| x_0, x_1, x_2, x_3 \|^T$, $u^* = \| u_0^*, u_1^*, u_2^*, u_3^* \|^T$, X — матрица с элементами, зависящими от x_k и $\dot{x}_k$ в степени выше первой, D^* и S' — матрицы вида

$$D^* = a_0\omega \left\| \begin{matrix} u_0^*u_3^* & u_0^*u_2^* & -u_0^*u_1^* & 1 - u_0^{*2} \\ u_1^*u_3^* & u_1^*u_2^* & 1 - u_1^{*2} & -u_1^*u_0^* \\ u_2^*u_3^* & -(1 - u_2^{*2}) & -u_1^*u_2^* & -u_2^*u_0^* \\ -(1 - u_3^{*2}) & u_3^*u_2^* & -u_3^*u_1^* & -u_0^*u_3^* \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

$$S' = \left\| \begin{matrix} 0 & -a_2' & a_3' & -a_4' \\ a_2' & 0 & a_4' & a_3' \\ -a_3' & -a_4' & 0 & a_2' \\ a_4' & -a_3' & -a_2' & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Здесь через a_j' обозначены составляющие величин a_2, a_3 и a_4, относящиеся к возмущенному движению и линейно зависящие от вариаций x_k и их производных.

Из представлений (10) и (11) следует $\mathrm{Sp}D^* = \mathrm{Sp}S' = 0$. Явные выражения для величин a_j', получающиеся в результате применения подстановки (8) к уравнению (4), приводятся ниже.

Имеем

$$a_2' = -2BC\left[\sum_{j=0}^{3} k_{2j}x_j + (C - B)\,\omega \sum_{j=0}^{3} l_{2i}\dot{x}_j\right]. \tag{12}$$

Коэффициенты k_{2j} и l_{2j} для сокращения записи удобно выразить посредством матриц u^*, $K_2 = \| k_{20}, k_{21}, k_{22}, k_{23} \|^T$ и $L_2 = \| l_{20}, l_{21}, l_{22}, l_{23} \|^T$. Получаем

$$K_2 = M_2 u^*, \quad L_2 = N_2 u^*, \tag{13}$$

где

$$M_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & -m_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2' & m_2 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad N_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -n_2 & -2n_2' \\ 0 & 0 & 2n_2' & n_2 \\ n_2 & -2n_2' & 0 & 0 \\ 2n_2' & n_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

Здесь введенны обозначения

$$m_2 = Pz_c - (C - B)\,\omega^2 n_2, \quad n_2 = 1 - 2\,(u_1^{*2} + u_2^{*2}),$$
$$m_2' = Py_c - 4\,(C - B)\,\omega^2 n_2', \quad n_2' = u_0^* u_1^* + u_2^* u_3^*. \tag{15}$$

Далее имеем

$$a_3' = 2CA\left[\sum_{j=0}^{3} k_{3j} x_j + (C - A)\,\omega \sum_{j=0}^{3} l_{3j}\dot{x}_j\right]. \tag{16}$$

Вводя матрицы $K_3 = \| k_{30}, \ldots, k_{33} \|^T$, $L_3 = \| l_{30}, \ldots, l_{33} \|^T$, получаем

$$K_3 = M_3 u^*, \quad L_3 = N_3 u^*, \tag{17}$$

где

$$M_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & -m_3' & 0 & -m_3 \\ m_3 & 0 & -m_3' & 0 \\ 0 & -m_3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad N_3 = \begin{Vmatrix} 0 & n_2 & 0 & -2n_3 \\ -n_2 & 0 & 2n_3 & 0 \\ 0 & -2n_3 & 0 & -n_2 \\ 2n_3 & 0 & n_2 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

При этом

$$m_3 = Pz_c - (C - A)\,\omega^2 n_2, \quad m_3' = Px_c - 4\,(C - A)\,\omega^2 n_3, \quad n_3 = u_0^* u_2^* - u_1^* u_3^*. \tag{19}$$

Наконец,

$$a_4' = 2AB\left[\sum_{j=1}^{3} k_{4j} x_j + 2\,(B - A)\,\omega \sum_{j=0}^{3} l_{4j}\dot{x}_j\right]. \tag{20}$$

Полагая $K_4 = \| k_{40}, \ldots, k_{43} \|^T$, $L_4 = \| l_{40}, \ldots, l_{43} \|^T$, имеем

$$K_4 = M_4 u^*, \quad L_4 = N_4 u^*, \tag{21}$$

где

$$M_4 = \begin{Vmatrix} 0 & m_4 & -m_4' & 0 \\ m_4 & 0 & 0 & m_4' \\ -m_4' & 0 & 0 & m_4 \\ 0 & m_4' & m_4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad N_4 = \begin{Vmatrix} 0 & n_2' & -n_3 & 0 \\ -n_2' & 0 & 0 & -n_3 \\ n_3 & 0 & 0 & -n_2' \\ 0 & n_3 & n_2' & 0 \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Здесь

$$m_4 = Px_c - 2\,(B - A)\,\omega^2 n_3, \quad m_4' = Py_c + 2\,(B - A)\,\omega^2 n_2'. \tag{23}$$

Из полученных выражений следует, что члены с $\dot{x}_k$ входят помимо слагаемого $D^*\dot{x}$ в слагаемое $S'u^*$ матричного уравнения (9). Поэтому его всегда можно представить в виде

$$a_0 d^2x/dt^2 + V dx/dt + Wx = X, \tag{24}$$

где V и W — некоторые постоянные квадратные матрицы.

Далее целесообразно осуществить разбиение матриц V и W на симметрические и кососимметрические части. Тогда будем иметь

$$a_0 d^2x/dt^2 + D dx/dt + H dx/dt + \Pi x + Fx = X,$$

где матрицы D и Π симметрические, H и F — кососимметрические. В состав сил $D\dot{x}$ помимо диссипативных (в рассматриваемой задаче эти силы не учитываются), могут входить и «ускоряющие» силы [6], характеризующиеся отрицательными значениями формы $1/2\, D\dot{x}\cdot\dot{x}$. В конкретных системах ускоряющие силы обычно создаются с помощью специальных устройств, но могут возникать и в силу каких-либо дестабилизирующих факторов, отрицательно влияя на устойчивость.

Симметрическая матрица Π (ее удобно представлять в диагональной форме) соответствует потенциальным силам. Матрицы $H = \| h_{jk} \|_0^3$ и $F = \| f_{jk} \|_0^3$, имеющие кососимметрическую структуру, соответствуют гироскопическим силам и неконсервативным позиционным силам. Можно заметить, что неконсервативные структуры в уравнениях возмущенного движения могут иметь место и в случаях нестационарного движения консервативных систем.

4. Характеристическое уравнение, соответствующее линейной части матричного уравнения (28), имеет вид

$$\alpha_0\rho^8 + \alpha_1\rho^7 + \ldots + \alpha_7\rho + \alpha_8 = 0, \tag{25}$$

где α_i — некоторые постоянные. При этом $\alpha_1 = \operatorname{Sp} D$, $\alpha_8 = \det(\Pi + F)$. В рассматриваемом случае $\operatorname{Sp} D \equiv \sum_k d_{kk} = 0$, в чем легко убедиться путем непосредственных вычислений. Действительно, используя формулы (10) — (23), где полагаем $u_3^* = 0$ в силу частного решения (6), получаем

$$\begin{aligned}
d_{00} &= 2C\omega\,[A(C-A) - B(C-B)]\,[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]\,u_1^*u_2^*,\\
d_{11} &= -4B\omega\,[C(C-B) + A(B-A)]\,u_0^{*2}u_1^*u_2^*,\\
d_{22} &= 4A\omega\,[C(C-A) - B(B-A)]\,u_0^{*2}u_1^*u_2^*,\\
d_{33} &= 8AB\omega(B-A)\,u_0^*u_1^*u_2^* - 2C\omega\,[A(C-A) - B(C-B)]\times\\
&\qquad\times[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2}) + 2u_0^{*2}]\,u_1^*u_2^*.
\end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда следует, что $\sum_{k=0}^{3} d_{kk} = 0$ и, следовательно, $\alpha_1 = 0$.

В такой ситуации асимптотическая устойчивость рассматриваемой системы не имеет места, поскольку нарушается критерий Гурвица. Лишь в весьма частных случаях, при отсутствии в уравнениях (25) нечетных степеней и при определенных соотношениях между коэффициентами (когда, например, оно разбивается на два биквадратных), можно получить чисто мнимые корни. Подобные случаи исключаются, если дополнительно к условию $\alpha_1 = 0$ выполняется условие $\alpha_7 \neq 0$.

В состав коэффициента α_7 входят произведения элементов h_{jk} и f_{jk} матриц H и F [6, 7]. Пусть v_{12} и v_{21} — составляющие матрицы V, относящиеся к переменным x_1 и x_2. Пользуясь уравнением (9) и формулами (12) — (23), находим при $u_3^* = 0$: $v_{12} = \omega a_0(1 - u_1^{*2}) - 2BC(C-B)\,\omega u_0^* l_{22} + 4AB(B-A)\,\omega u_2^* l_{42} = \omega a_0(1 - u^{*2}) - 2BC(C-B)\,\omega u_0^{*2}(n_2 - 2u_1^{*2}) + 4AB\times(B-A)\,\omega u_0^{*2}u_2^{*2}$. В предположении малости величин u_k^*, $k = 1, 2$, следует $v_{12} = 2BC(A+B-C)\,\omega + O(u_k^{*2})$, где символом $O(u_k^{*2})$ обозначены члены второго и высшего порядков относительно величин u_1^* и u_2^*. Аналогично $v_{21} = -\omega a_0(1 - u_2^{*2}) - 2CA(C-A)\,\omega u_0^* l_{31} - 4AB(B-A)\,\omega u_1^* l_{41} = -\omega a_0 \times (1 - u_2^{*2}) + 2CA(C-A)\,\omega u_0^{*2}(n_2 - 2u_2^{*2}) + 4AB(B-A)\,\omega u_0^{*2}u_1^{*2}$. Соответственно получаем $v_{21} = -2AC(A+B-C)\,\omega + O(u_k^{*2})$. Таким образом, с точностью до выписанных членов имеем

$$h_{12} = -h_{21} \equiv 1/2\,(v_{12} - v_{21}) = C(A+B)(A+B-C)\,\omega. \tag{27}$$

В пределах этого допущения составляющие h_{12} и h_{21} обращаются в нули, если выполняется условие $A + B = C$, т. е. в случае вырождения тела в бесконечно тонкую пластинку в плоскости Oxy.

Для нахождения составляющих w_{12} и w_{21} матрицы W воспользуемся уравнением (9) и формулами (12)—(23). С учетом (6) имеем

$$w_{12} = -2BCu_0^*k_{22} + 2ABu_2^*k_{42} = 2BCu_0^*\,[Py_c - 4(C-B)\,\omega^2 u_0^* u_1^*]\,u_2^* -$$

$$-\frac{1}{u_0^*}ABP^2x_cy_c\,[1+(B-A)\,\omega^2u_0^*\varkappa_2]\,\varkappa_1, \tag{28}$$

$$w_{21}=-2CAu_0^*k_{31}-2ABu_1^*k_{41}=2ACu_0^*\,[Px_c-4\,(C-A)\,\omega^2u_0^*u_2^*]\,u_1^*-$$

$$-\frac{1}{u_0^*}ABP^2x_cy_c\,[1-(B-A)\,\omega^2u_0^*\varkappa_1]\,\varkappa_2,$$

где $\varkappa_1=[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\{(C-A)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\omega^2-Pz_c\}^{-1}$, $\varkappa_2=[1-$ $-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\{(C-B)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\omega^2-Pz_c\}^{-1}$.

Отсюда аналогично (27) получаем

$$f_{12}=f_{21}=\frac{1}{2}P^2x_cy_c\left[\frac{AB}{u_0^*}(\varkappa_2-\varkappa_1)+C\,(B\varkappa_1-A\varkappa_2)+\right.$$

$$\left.+\,2\,(B-A)\,(C-B)\,(A-C)\,\omega^2\varkappa_1\varkappa_2\right]. \tag{29}$$

Из последнего выражения следует, что f_{12} обращается в нуль, если x_c или y_c равны нулю, что соответствует нахождению центра тяжести тела в одной из главных плоскостей инерции Oxz или Oyz, а также в случае симметрии, когда $A=B$. Если ограничиться точностью соответственной представлению (27), то будем иметь

$$f_{12}=\frac{1}{2}\;P^2x_cy_c\,(A-B)\,(C-B)\,(C-A)\,\omega^2+CPz_c]\,\varkappa_1\varkappa_2+O(u_k^{*2}).$$

Здесь следует считать $\varkappa_1=[(C-A)\,\omega^2-Pz_c]^{-1}$, $\varkappa_2=[(C-B)\,\omega^2-Pz_c]^{-1}$. Продолжая описываемый процесс, можно восстановить все остальные элементы матриц H и F. В этом, однако, необходимости нет.

Чтобы убедиться в справедливости приведенного утверждения, исключим из уравнений возмущенного движения члены, входящие в матрицу D и не влияющие на устойчивость, поскольку выше было установлено, что $\mathrm{Sp}\,D=0$. Наличие таких членов обусловлено спецификой применяемого аппарата параметров Родрига — Гамильтона.

Условие (2) нормировки параметров λ_k распространяется в силу преобразования (3) на переменные u_k и, естественно, справедливо и в возмущенном движении. Поэтому имеем

$$(u_0^*+x_0)^2+(u_1^*+x_1)^2+(u_2^*+x_2)^2+(u_3^*+x_3)^2=1.$$

Если ограничиться членами первого порядка малости в отношении переменных x и их производных, то, учитывая постоянство величин u_s^*, имеем выражения вида

$$u_0^*\dot{x}_0+u_1^*\dot{x}_1+u_2^*\dot{x}_2+u_3^*\dot{x}_3=0,\quad u_0^*\ddot{x}_0+u_1^*\ddot{x}_1+u_2^*\ddot{x}_2+u_3^*\ddot{x}_3=0, \tag{30}$$

с помощью которых и производится указанное выше исключение. Представим уравнение относительно переменной x_3 с учетом формул (12), (16) и (19) в форме

$$a_0\ddot{x}_3-a_0\omega\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})\,\dot{x}_0+a_0\omega n_2'\dot{x}_1+a_0\omega n_3\dot{x}_2+2ABu_0^*\Big[\sum_{j=0}^{3}k_{4j}x_j+2\,(B-A)\,\times$$

$$\times\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{4j}\dot{x}_j+2\,(B-A)\,\omega l_{43}\dot{x}_3\Big]-2CAu_1^*\Big[\sum_{j=0}^{3}k_{3j}x_j+(C-A)\,\times$$

$$\times\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{3j}\dot{x}_j+(C-A)\,\omega l_{33}\dot{x}_3\Big]+2BCu_2^*\Big[\sum_{j=0}^{3}k_{2j}x_j+(C-B)\,\times$$

$$\times\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{2j}\dot{x}_j+(C-B)\,\omega l_{23}\dot{x}_3\Big]=0. \tag{31}$$

Исключая в этом уравнении члены с $\dot{x}_3$ с помощью первого из выражений (30), получаем

$$u_3^*\left\{a_0\ddot{x}_3 - a_0\omega\left(u_1^{*2}+u_2^{*2}\right)\dot{x}_0 + a_0\omega n_2'\dot{x}_1 + a_0\omega n_3\dot{x}_2 + 2ABu_0^*\left[\sum_{j=0}^{3}k_{4j}x_j + \right.\right.$$

$$\left.+ 2(B-A)\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{4j}\dot{x}_j\right] - 2CAu_1^*\left[\sum_{j=0}^{3}k_{3j}x_j + (C-A)\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{3j}\dot{x}_j\right] +$$

$$\left.+ 2BCu_2^*\left[\sum_{j=0}^{3}k_{2j}x_j + (C-B)\,\omega\sum_{j=0}^{2}l_{2j}\dot{x}_j\right]\right\} + 2\omega\left[-2AB(B-A)\,l_{43}u_0^* + \right.$$

$$\left.+ CA(C-A)\,l_{33}u_1^* - BC(C-B)\,l_{23}u_2^*\right]\left[u_0^*\dot{x}_0 + u_1^*\dot{x}_1 + u_2^*\dot{x}_2\right] = 0.$$

В силу частного решения (6) и первого из условий (30), где полагаем $u_3^* = 0$, убеждаемся, что уравнение (31) тождественно удовлетворяется. Равным образом, полагая $u_3^* = 0$ во втором из условий (30) и исключая с его помощью производную $\ddot{x}_0$ в первом уравнении системы (9), убеждаемся, что и оно в рамках принятой точности удовлетворяется тождественно. Остаются, таким образом, уравнения относительно искомых переменных x_1 и x_2, объединенных матричным уравнением той же структуры, что и (26). В силу отсутствия диссипативных и ускоряющих сил характеристическое уравнение такой системы имет вид [2—4]

$$\alpha_0'\rho^4 + \alpha_2'\rho^2 + \alpha_3'\rho + \alpha_4' = 0, \tag{32}$$

где α_s' — некоторые постоянные. Коэффициент α_3' в этом уравнении равен произведению $h_{12}f_{12}$, где элементы h_{12} и f_{12} выражаются соответственно формулами (27) и (29).

Всякий раз, когда названное произведение не обращается в нуль, уравнение (32) будет иметь по крайней мере один корень с положительной вещественной частью. А это свидетельствует о неустойчивости тривиального решения системы (24) и притом независимо от членов второго и высшего порядков, входящих в матрицу X.

Исключения составляют отмеченные выше обращения в нуль хотя бы одного из элементов h_{12} и f_{12}. Анализ устойчивости в этих случаях требует специального рассмотрения.

1. *Кошляков В. Н., Богуславская Е. С.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига—Гамильтона // Системы курсоуказания и инерциальной навигации.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 3—9.
2. *Кошляков В. Н.* Параметры Родрига—Гамильтона в задачах динамики твердого тела // Механика и научно-технический прогресс : В 4-х т.— М. : Наука, 1985.— Т. 1.— С. 117—127.
3. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига—Гамильтона // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 182—192.
4. *Кошляков В. Н.* Об одном случае неустойчивости быстровращающегося тяжелого тела // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела.— 1988.— № 4.— С. 43—50.
5. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение: В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— Т. 1.— 351 с.
6. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения.— М. : Наука, 1971.— 312 с.
7. *Агафонов С. А.* Об асимптотической устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела.—1988.—№ 3.— С. 3—8.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.12.88