УДК 512.643+512.542

Ю. Д. Жданова

Спектральное разложение для функции от матрицы, связанной с конечной разрешимой группой

1. Постановка задачи. Пусть G_N — разрешимая группа; A_{G_N} — $N \times N$-матрица, связанная с G_N следующим образом: элементами A_{G_N} являются функции v: $G_N \times G_N \to R$. Для любых $g_i, g_j \in G_N$ $v(g_i, g_j) = v(e, g_i^{-1} g_j)$, где $e = g_0$ — единица группы G_N. Если положить $v(e, g_k) = a_k$, $k = \overline{0, N-1}$, то матрица A_{G_N} полностью определяется первой строкой.

Матрица A_{G_N} действует на произвольный вектор-столбец $u = \{u(g_i), g_i \in G_N\}$ следующим образом; $A_{G_N} u(g_k) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j u(g_k g_j)$.

Задача состоит в получении спектрального разложения для функции от матрицы A_{G_N} с помощью характеристик, определяемых группой G_N.

2. Пусть G_N — двуступенно разрешимая группа. Будем рассматривать группу G_N, $N = n_1 n_2$, как произвольное расширение абелевой группы A, $|A| = n_1$, с помощью абелевой группы B, $|B| = n_2$. Известно [1], что расширение G_N группы A при выборе представителей в смежных классах G_N по A задается системой факторов $f : B \times B \to A$ и системой автоморфизмов $a \to a^b$, $a^b = bab^{-1}$.

С помощью одномерных представлений (характеров) абелевых групп A и B построим нормированные векторы-столбцы $\chi_k^B = \{\chi_k^B(b), b \in B, k = \overline{0, n_2 - 1}\}$, $\chi_l^A = \{\chi_l^A(a), a \in A, l = \overline{0, n_1 - 1}\}$, ортогональные в том смысле, что $\chi_k^{*B} \chi_r^B = \delta_{kr}$, $\chi_l^{*A} \chi_s^A = \delta_{ls}$.

Определим G_N-тензорное произведение векторов χ_k^B, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, χ_l^A, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, следующим образом: $\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A = \{\chi_{kl}(b_i a_j) \overset{\text{def}}{=} \chi_k^B(b_i) \times \chi_l^A(a_j^{b_i}), i = \overline{0, n_2 - 1}, j = \overline{0, n_1 - 1}\}$.

Лемма 1. *G_N-тензорное произведение векторов χ_k^B, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, χ_l^A, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, обладает такими свойствами:*

1) $(\gamma \chi_k^B) \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A = \chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} (\gamma \chi_l^A) = \gamma (\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A)$, $\gamma \in C$;

2) $\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} (\chi_l^A + \chi_s^A) = (\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A) + (\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_s^A)$;

3) $(\chi_k^B + \chi_r^B) \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A = (\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A) + (\chi_r^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A)$;

4) $(\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A)^* = \chi_k^{*B} \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^{*A}$;

5) $(\chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A) \underset{G_N}{\otimes} (\chi_k^{*B} \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^{*A}) = \chi_k^B \chi_k^{*B} \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A \chi_l^{*A}$.

Доказательство. Свойства 1—4 вытекают непосредственно из определения и аналогичны свойствам обычного тензорного произведения [2].

Докажем свойство 5. Произвольный элемент матрицы в левой части равен $\chi_{kl}(b_i a_r)\chi_{kl}^*(b_j a_s) = \chi_{kl}(b_i b_j^{-1} f(b_i, b_j^{-1}) a_r^{b_i} a_s^{-b_j^{-1}}) = \chi_k^B(b_i b_j^{-1}) \chi_l^A((f(b_i, b_j^{-1}) a_r^{b_i} a_s^{-b_j^{-1}})^{f(b_i, b_j^{-1}) b_i b_j^{-1}})$, т. е. является элементом матрицы $\chi_k^B \chi_k^{*B} \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A \chi_l^{*A}$. Лемма доказана.

Обозначим $\psi_{kl}^{G_N} = \chi_k^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^A$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$.

Лемма 2. *Векторы* $\psi_{kl}^{G_N}$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, *образуют ортонормированную систему, являющуюся базисом в пространстве* C^N.

Доказательство. По свойствам 4, 5 из леммы 1 $\psi_{kl}^{*G_N} \psi_{kl}^{G_N} = (\chi_k^{*B} \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^{*A})(\chi_r^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_s^A) = \chi_k^{*B}\chi_r^B \underset{G_N}{\otimes} \chi_l^{*A}\chi_s^A = \delta_{kr}\delta_{ls}$.

Если x — произвольный вектор пространства C^N, то существуют такие комплексные числа α_{kl}, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, что

$$x = \sum_{k=0}^{n_2-1} \sum_{l=0}^{n_1-1} \alpha_{kl} \psi_{kl}^{G_N}.$$

Умножая слева на $\psi_{rs}^{*G_N}$ и используя ортогональность системы векторов $\psi_{kl}^{G_N}$, получаем $\psi_{rs}^{*G_N} x = \alpha_{rs}$, $r = \overline{0, n_2 - 1}$, $s = \overline{0, n_1 - 1}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Векторы* $\psi_{kl}^{G_N}$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$ *являются собственными векторами матрицы* A_{G_N}.

Доказательство. На вектор $\psi_{kl}^{G_N}$ матрица A_{G_N} действует следующим образом: $A_{G_N}\psi_{kl}^{G_N}(g_r) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \psi_{kl}^{G_N}(g_r g_j) = \left(\sqrt{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \psi_{kl}^{G_N}(g_j)\right) \times \psi_{kl}^{G_N}(g_r)$, т. е. матрица A_{G_N} переводит каждый вектор $\psi_{kl}^{G_N}$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, в ему пропорциональный. Положим $\mu_{kl} = \sqrt{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \psi_{kl}^{G_N}(g_j)$. Тогда

$$A_{G_N}\psi_{kl}^{G_N} = \mu_{kl}\psi_{kl}^{G_N}. \tag{1}$$

Лемма доказана.

Обозначим через F_{G_N} матрицу, столбцами которой являются векторы $\psi_{kl}^{G_N}$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$.

Лемма 4. *Для матрицы* F_{G_N} *имеют место равенства* $F_{G_N} F_{G_N}^* = F_{G_N}^* F_{G_N} = I$, *т. е.* F_{G_N} — *унитарная матрица.*

Доказательство вытекает из леммы 2.

Пусть $M = \operatorname{diag}\{\mu_{kl}, k = \overline{0, n_2 - 1}, l = \overline{0, n_1 - 1}\}$. Тогда уравнения (1) можно представить в виде матричного уравнения $A_{G_N} F_{G_N} = F_{G_N} M$, откуда в силу леммы 4 $A_{G_N} = F_{G_N} M F_{G_N}^*$.

Лемма 5. *Матрица* F_{G_N} *допускает следующую факторизацию:* $F_{G_N} = F_B \underset{G_N}{\otimes} F_A$, *где* F_B — *матрица, столбцами которой являются векторы* χ_k^B, $k = \overline{0, n_2 - 1}$. F_A — *матрица, столбцами которой являются векторы* χ_l^A, $l = 0, \overline{n_1 - 1}$.

Доказательство вытекает из определения G_N-тензорного произведения векторов χ_k^B, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, χ_l^A, $l = \overline{0, n_1 - 1}$.

Введем матрицы

$$\Pi_{kl} = \psi_{kl}^{G_N} \underset{G_N}{\otimes} \psi_{kl}^{*G_N}, \ k = \overline{0, n_2 - 1}, \ l = \overline{0, n_1 - 1}, \tag{2}$$

Лемма 6. Матрицы Π_{kl}, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, *обладают свойствами*: 1) $\Pi_{kl}\Pi_{rs} = \delta_{kr}\delta_{ls}\Pi_{kl}$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n_2-1}\sum\limits_{l=0}^{n_1-1}\Pi_{kl} = I$.

Доказательство.

1. $\Pi_{kl}\Pi_{rs} = (\psi_{kl}^{G_N} \underset{G_N}{\otimes} \psi_{kl}^{*G_N})(\psi_{rs}^{G_N} \underset{G_N}{\otimes} \psi_{rs}^{*G_N})$. Произвольный элемент произведения $\Pi_{kl}\Pi_{rs}$ равен $\sum\limits_{j=0}^{n_2-1}\sum\limits_{q=0}^{n_1-1} \chi_{kl}(b_i a_p)\chi_{kl}^*(b_j a_q)\chi_{rs}(b_j a_q)\chi_{rs}^*(b_m a_t) = \delta_{kr}\delta_{ls}\chi_{kl} \times$ $\times (b_i b_m^{-1} f(b_i, b_m^{-1}) a_p^{b_i} a_t^{-b_m^{-1}}) = \delta_{kr}\delta_{ls}\chi_k^B(b_i b_m^{-1})\chi_l^A((f(b_i, b_m^{-1}) a_p^{b_i} a_t^{-b_m^{-1}})^{f(b_i, b_m^{-1}) b_i b_m^{-1}})$, т. е. является элементом матрицы $\delta_{kr}\delta_{ls}\Pi_{kl}$.

2. Так как $F_{G_N}F_{G_N}^* = I$ по лемме 4 и $\psi_{kl}^{G_N}$ — столбцы матрицы F_{G_N}, $\psi_{kl}^{*G_N}$ — строки матрицы F_{G_N}, то $\sum\limits_{k=0}^{n_2-1}\sum\limits_{l=0}^{n_1-1}\psi_{kl}^{G_N} \underset{G_N}{\otimes} \psi_{kl}^{*G_N} = I$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если A_{G_N} — матрица, связанная с группой G_N, и функция h определена на спектре матрицы A_{G_N}, то* $h(A_{G_N}) = \sum\limits_{k=0}^{n_2-1}\sum\limits_{l=0}^{n_1-1} h(\mu_{kl})\Pi_{kl}$, *где матрицы Π_{kl} определены равенством* (2). *Матрицы Π_{kl} линейно независимы как элементы пространства комплексных $N \times N$- матриц $C^{N\times N}$ и коммутируют между собой и с матрицей A_{G_N}.*

Доказательство проводится так же, как в [2], с учетом леммы 6.

К функциям от матриц применимы понятия анализа [3]. В частности, если функция h разлагается в ряд Тейлора в точке λ $h(\mu) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\alpha_p(\mu - \lambda)^p$ с кругом сходимости $|\mu - \lambda| < r$ и если $|\mu_{kl} - \lambda| < r$, $k = \overline{0, n_2 - 1}$, $l = \overline{0, n_1 - 1}$, то это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент μ заменить матрицей A_{G_N}, связанной с группой G_N.

3. Пусть G_N — разрешимая группа ступени разрешимости > 2. Известно [4], что конечные разрешимые группы — это группы, которые можно построить из абелевых групп посредством нескольких последовательных расширений. Если $N = n_1 n_2 \ldots n_s$, то группа G_N обладает субнормальным рядом $E = G_{n_0} < G_{n_1} < G_{n_1 n_2} < \ldots < G_{n_1 n_2 \ldots n_s} = G_N$, все факторы которого $G_{RN_{r+1}}/G_R = H_{n_{r+1}}$, $R = n_1 n_2 \ldots n_r$, $r < s$, абелевы.

Матрица F_{G_N} допускает следующую факторизацию: $F_{G_N} = F_{H_{n_s}} \underset{G_N}{\otimes} F_{G_{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}}$. Например, при $N = n_1 n_2$ $F_{G_{n_1 n_2}} = F_{H_{n_2}} \underset{G_{n_1 n_2}}{\otimes} F_{G_{n_1}}$; при $N = n_1 n_2 n_3$ $F_{G_{n_1 n_2 n_3}} = F_{H_{n_3}} \underset{G_{n_1 n_2 n_3}}{\otimes} F_{G_{n_1 n_2}} = F_{H_{n_3}} \underset{G_{n_1 n_2 n_3}}{\otimes} (F_{H_{n_2}} \underset{G_{n_1 n_2}}{\otimes} F_{G_{n_1}})$.

Столбцами матрицы F_{G_N} являются векторы $\psi_{l_1, l_2, \ldots, l_{s-1}, l_s}^{G_N} = \chi_{l_s}^{H_{n_s}} \underset{G_N}{\otimes} \psi_{l_1, l_2, \ldots, l_{s-1}}^{G_{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}}$, $l_r = \overline{0, n_r - 1}$, $r = \overline{1, s}$, где $\chi_{l_s}^{H_{n_s}}$ — нормированный вектор, составленный из характеров абелевой группы H_{n_s}.

Положим $\mu_{l_1, l_2, \ldots, l_s} = \sqrt{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j \psi_{l_1, l_2, \ldots, l_s}^{G_N}(g_j)$, $l_r = \overline{0, n_r - 1}$, $r = \overline{1, s}$.

Теорема 2. *Для матрицы* $h(A_{G_N})$, *где* h — *функция, определенная на спектре матрицы* A_{G_N}, *справедливо специальное разложение* $h(A_{G_N}) = \sum\limits_{l_1=0}^{n_1-1} \sum\limits_{l_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum\limits_{l_s=0}^{n_s-1} h(\mu_{l_1,l_2,\ldots,l_s}) \Pi_{l_1,l_2,\ldots,l_s}$, где $\Pi_{l_1,l_2,\ldots,l_s} \psi^{G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_s} \underset{G_N}{\otimes} \psi^{*G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_s}$.

1. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1982.— 272 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Киев. пед. ин-т
Получено 29.06.87