УДК 519.21

Н. А. Ружевич

Нерегулярные полумарковские процессы

Рассмотрим полумарковский процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, заданный в фазовом пространстве $(E, \mathscr{B})$ со счетно-порожденной сигма-алгеброй В.

Задача состоит в изучении нерегулярного случая, т. е. когда бесконечно среднее стационарное время пребывания в добавочном предположении правильного изменения хвоста распределения времени пребывания.

Обозначим через τ момент первого скачка, а через τ_k — момент k-го по порядку скачка процесса, т. е. $\tau = \inf\{t : t > 0,\ X(t) \neq X(0)\}$, $\tau_{k+1} = \inf\{t : t > \tau_k,\ X(t) \neq X(\tau_k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\tau_0 = 0$.

Последовательность $X_k = X(\tau_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, образует так называемую вложенную цепь Маркова. Пусть $P(x, B)$ — переходная вероятность этой цепи за один шаг, а $P^k(x, B)$ — переходная вероятность за k шагов. Предположим, что последовательность X_k, $k = 0, 1, \ldots$, эргодична в следующем смысле: предел

$$\pi(B) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, B)$$

существует для всех $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ и не зависит от x, а значит определяет единственную инвариантную вероятностную меру π вложенной цепи.

Это условие эквивалентно обычному условию эргодичности (см., например [1, с. 281]).

Далее, обозначим $\psi(s, x, y) = M_x(e^{-s\tau} \mid X(\tau) = y)$, $\varphi(s, x) = M_x e^{-s\tau} = \int\limits_0^\infty e^{-st} dF_x(t)$, $\varphi(s) = M_\pi e^{-s\tau} = \int\limits_E \varphi(s, x)\,\pi(dx)$, где $F_x(t) = P_x(\tau \leqslant t)$, P_x— регулярная условная вероятность при условии, что процесс выходит из точки x, а M_x — соответственно условное математическое ожидание при условии $X(0) = x$. Введем в рассмотрение банахово пространство $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_1(E, \mathscr{B}, \pi)$, состоящее из $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых функций g на E с нормой $\|g\| = \int\limits_E |g(x)|\,\pi(dx)$. Рассмотрим функционал $\Theta_t = \sum\limits_{k=0}^{\nu_t - 1} f(X_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)$, где ν_t — количество скачков процесса до момента t.

Теорема 1. *Пусть существуют число $\alpha \in [0, 1)$ и медленно меняющаяся в нуле функция L такие, что*

$$(1 - \varphi(s, x))/(s^\alpha L(s)) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} a(x) \qquad (1)$$

в смысле сходимости в пространстве $\mathscr{L}_1$ и π-почти всюду, и $\int\limits_E a(x)\,\pi(dx) > 0$. Тогда для всех $x \in E$, всех B-измеримых ограниченных функций f и всех точек y непрерывности предельной функции H $\lim\limits_{t\to\infty} P_x(\Theta_t/t \leqslant y) = H(y)$, где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + y}\, dH(y) = \frac{\lambda^{\alpha-1} \int\limits_E a(x)\,\pi(ax)}{\int\limits_E (\lambda + f(x))^\alpha a(x)\,\pi(dx)}, \quad \lambda > -\inf_{x\in E} f(x).$$

Доказательство. Введем величину $\eta_t = t - \sup\{u : u \leqslant t,\ X(u) \neq X(t)\}$ и рассмотрим совместное распределение трех величин Θ_t, η_t и $X(t)$. При этом, не ограничивая общности, будем считать, что

$$0 < \inf_{x\in E} f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) \leqslant 1. \qquad (2)$$

По формуле полной вероятности имеем

$$M_x(e^{-s\Theta_t},\ \eta_t > v,\quad X(t) \in B,\quad \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}) = \int\limits_B \int\limits_0^t M_x(e^{-s\Theta_{\tau_k}},\ \tau_k \in du,$$

$$X(\tau_k) \in dy)\, M_y(e^{-s\Theta_{t-u}},\ \eta_{t-u} > v,\quad \tau > t - u). \qquad (3)$$

Так как $\Theta_t = 0$. $\eta_t = t$ при $0 \leqslant t < \tau$, $\Theta_t = \Theta_{\tau_k}$ при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$, то правая часть в (3) при $t > 0$ равна $\int\limits_B \int\limits_0^{t-v} \Phi_s^{k*}(x, du, dy)\, g(y, t-u)$, где $\Phi_s^{k*}(x, du, dy) = M_x(e^{-s\Theta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, X(\tau_k) \in dy)$, $g(y, t) = 1 - F_y(t)$. Значит при $t > v$

$$M_x(e^{-s\Theta_t}, \eta_t > v, X(t) \in B) = \int\limits_B \int\limits_0^{t-v} R_s(x, du, dy)\, g(y, t-u), \tag{4}$$

где $R_s(x, du, dy) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi_s^{k*}(x, du, dy)$.

Ясно, что асимптотическое поведение величины $M_x(e^{-s\Theta_t/t}, \eta_t/t > v, X(t) \in B)$, где $v \in [0, 1)$, при $t \to \infty$ определяется асимптотическими свойствами величин $R_{s/t}(x, t du, dy)$ и $g(y, t(1-u))$ при $t \to \infty$.

Сначала изучим асимптотическое поведение $g(y, t(1-u))$. Заметим, что по теореме Егорова все пространство E разбивается на счетное число множеств $D_0, D_1, \ldots$ таких, что $\pi(D_0) = 0$ и

$$\sup_{x \in D_j} \left| \frac{1 - \varphi(s, x)}{s^\alpha L(s)} - a(x) \right| \underset{s \to 0}{\to} 0, \quad j \geqslant 1.$$

Отсюда с помощью теорем тауберового типа можно показать, что $\frac{1 - F_y(ut)}{t^{-\alpha} L(1/t)} \underset{t \to \infty}{\to} \frac{a(y) u^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ равномерно по $u \in [a, b]$, $y \in D_j$ для всех $0 < a \leqslant \leqslant b < \infty$, $j \geqslant 1$.

Следовательно,

$$g(y, t(1-u))/(t^{-\alpha} L(1/t)) \underset{t \to \infty}{\to} \frac{a(y)}{\Gamma(1-\alpha)} (1-u)^{-\alpha} \tag{5}$$

равномерно по $u \in [0, 1-v]$, $y \in D_j$ при $j \geqslant 1$, $0 < v \leqslant 1$.

Зафиксируем $s > 0$, $\lambda > 0$ и последовательность $t_m \uparrow \infty$. Обозначим $s_m = s/t_m$, $\lambda_m = \lambda/t_m$, $g_m(x, y) = \varphi(s_m f(x) + \lambda_m, x, y)$. Очевидно, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_m u} \Phi_{s_m}^{1*}(x, du, B) = \int\limits_B g_m(x, y) P(x, dy)$. где напомним $\Phi_{s_m}^{1*}(x, du, dy) = e^{-sf(x)u} P_x(\tau \in du, X(\tau) \in dy)$. При таком выборе $g_m(x, y)$ интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_m u} R_{s_m}(x, du, B) \tag{6}$$

совпадает с потенциалом, определенным в [2].

Проверим равномерную π-интегрируемость последовательности $u_m(x) = M_x(1 - g_m(X_0, X_1))/M_\pi(1 - g_m(X_0, X_1))$. Так как $0 < f(x) \leqslant 1$, то $\varphi(s_m + \lambda_m, x, y) \leqslant g_m(x, y) < \varphi(\lambda_m, x, y)$ и, следовательно, $\frac{1}{c_m} \frac{1 - \varphi(\lambda_m, x)}{1 - \varphi(\lambda_m)} \leqslant u_m(x) \leqslant c_m \frac{1 - \varphi(\lambda_m + s_m, x)}{1 - \varphi(\lambda_m + s_m)}$, где $c_m = \frac{1 - \varphi(\lambda_m + s_m)}{1 - \varphi(\lambda_m)}$.

Учитывая конкретный вид s_m и λ_m и принимая во внимание условие (1), получаем $c_m \underset{m \to \infty}{\to} \left(\frac{s + \lambda}{\lambda}\right)^\alpha$.

Таким образом, последовательность u_m заключена между двумя сходящимися в $\mathscr{L}_1$ последовательностями, что и обеспечивает ее равномерную π-интегрируемость.

Отсюда по теореме 2 из [2] последовательность $\varepsilon_m \sim M_\pi(1 - g_m(X_0, X_1))$ при $m \to \infty$. Это означает, что ε_m асимптотически эквивалентно

$$t_m^{-\alpha} L(1/t_m) \int\limits_E (\lambda + sf(x))^\alpha a(x)\, \pi(dx). \tag{7}$$

Далее, из следствия теоремы 1 [2] следует, что интеграл (6) после умножения на множитель (7) сходится при $m \to \infty$ для π-почти всех $x \in E$ равномерно по $B \in \mathscr{B}$ к $\pi(B)$.

Отсюда по теореме непрерывности для преобразования Лапласа следует, что для π-почти всех $x \in E$ равномерно по $B \in \mathscr{B}$

$$\lim_{m\to\infty} t_m^{-\alpha} L(1/t_m) \int_0^\infty R_{s/t_m}(x, t_m du, B)\, h(u) = \pi(B) \int_0^\infty \mu_s(du)\, h(u) \tag{8}$$

для всех непрерывных ограниченных функций h, где мера μ_s определяется своим преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} \mu_s(du) = \Big(\int_E (\lambda + sf(x))^\alpha a(x)\, \pi(dx) \Big)^{-1}, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{9}$$

Далее, заменив в (4) t на t_m, s на s/t_m, v на $t_m v$, получим

$$M_x (e^{-s\Theta_{t_m}/t_m}, \quad \eta_{t_m}/t_m > v,\ X(t_m) \in B) =$$
$$= \int_B \int_0^{1-v} R_{s/t_m}(x, t_m du, dy)\, g(y, t_m(1-u)). \tag{10}$$

Из (2), (9), (10) следует, что $\sup\limits_{m \geqslant 1} t_m^{-\alpha} L(1/t_m) R_{s/t_m}(x, [0, \infty), E) < \infty$ для π-почти всех $x \in E$. Отсюда легко найдем, что для π-почти всех $x \in E$ правая часть (10) при $m \to \infty$ равна

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_B \pi(dy)\, a(y) \int_0^{1-v} \mu_s(du)\, (1-u)^{-\alpha}, \tag{11}$$

где $s \geqslant 0$, $v > 0$, $B \subset D_j$ при некотором $j \geqslant 1$.

Покажем, что при $v \downarrow 0$, $B \uparrow E, s \downarrow 0$ выражение (11) обращается в единицу. Существование этого предела следует из монотонности выражения (11) по v, s и B, которая в свою очередь вытекает из (10). Далее, из (9) получим $s^\alpha \mu_s(du/s) = \mu_1(du)$ для всех $s > 0$. Поэтому интеграл (11) равен $\int_B \pi(dy)\, a(y) \int_0^{(1-v)s} \mu_1(du)\, (s-u)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$.

Умножив последнее выражение на $e^{-\lambda s}$ и проинтегрировав по s от 0 до ∞, получим $\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_B \pi(dy)\, a(y) \int_0^\infty e^{-\lambda u} \mu_1(du) \int_{u\frac{v}{1-v}}^\infty e^{-\lambda s} s^{-\alpha} ds$, что после замены переменной $s' = \lambda s$ и предельного перехода при $v \downarrow 0$, $B \uparrow E$ в свою очередь равно $\lambda^{\alpha-1} \int_E \pi(dy)\, a(y) \int_0^\infty e^{-\lambda u} \mu_1(du)$. Далее, согласно (9) последний интеграл принимает вид

$$\lambda^{\alpha-1} \int_E \pi(dy)\, a(y) / \int_E (\lambda + f(a))^\alpha a(y)\, \pi(dy). \tag{12}$$

После умножения на λ это выражение, очевидно, стремится к единице при $\lambda \to \infty$, что и требовалось доказать.

Отсюда стандартным образом следует, что

$$\lim_{t\to\infty} M_x (e^{-s\Theta_t/t}, \ \eta_t/t > v,\ X(t) \in B) =$$
$$= \int_B \pi(dy)\, a(y) \int_0^{1-v} \mu_s(du)\, (1-u)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha) \tag{13}$$

для всех $x \in E$, $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$, $v \in [0, 1]$, и (12) действительно является преобразованием Лапласа — Стилтьеса предельной функции распределения H. Теорема показана.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $\alpha \in (0, 1)$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_x(\eta_t/t > v) = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{1-v} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}\,du$ *для всех* $x \in E$, $v \in [0, 1]$, *а при* $\alpha = 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} \eta_t/t = 1$ P_x-*почти наверное.*

Доказательство. Так как при $\alpha > 0$, $s = 0$ для меры $\mu_0 = \lim\limits_{s\to 0}\mu_s$ имеет место соотношение $\mu_0(du) = u^{\alpha-1}du/(\Gamma(\alpha)\int\limits_E a(y)\pi(dy))$, то из (11) при $s = 0$, $B = E$ получаем $\lim\limits_{t\to\infty} P_x(\eta_t/t > v) = \int\limits_0^{1-v} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}\,du/(\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)) = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{1-v} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}\,du$, что и доказывает первое из утверждений.

Теперь пусть $\alpha = 0$. Тогда для всякого $s \geqslant 0$ мера μ_s вырождается в точке 0, причем величина скачка равна $1/\int\limits_E a(y)\pi(dy)$.

Отсюда и из (11) следует, что при $\alpha = 0$

$$\lim_{t\to\infty} M_x(e^{-s\theta_t/t},\ \eta_t/t > v,\ X(t) \in B) = \int\limits_B^{\infty} a(y)\pi(dy)/\int\limits_E a(y)\pi(dy), \qquad (14)$$

где $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$, $s \geqslant 0$, $v \in [0, 1]$.

Отсюда при $B \uparrow E$, $s \downarrow 0$ получаем $\lim\limits_{t\to\infty} P_x(\eta_t/t > v) = 1$ для всех $x \in E$, $v \in [0, 1]$, что и доказывает второе из утверждений.

Замечание. Очевидно, что при $\alpha = 1/2$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_x(\eta_t/t > v) = 2/\pi \times \arcsin\sqrt{1-v}$, $v \in [0, 1]$, $x \in E$.

Приведем примеры, когда функция распределения H из теоремы 1 принимает конкретный вид.

Пример 1. Предельная функция H вырождается в точке 0, если $\alpha = 0$ или $f(x) = 0$ для всех $x \in A$, где $A = \{x : a(x) > 0\}$.

Пример 2. При $\alpha = 1/2$, $f(x) = 1$ для всех $x \in A$ функция H распределена по закону арксинуса, т. е. $H(y) = 2/\pi \arcsin \quad y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

1. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.* Случайные процессы. Справочник.— Киев : Наук. думка, 1983.— 366.
2. *Шуренков В. М.* Асимптотика потенциала обрывающейся эргодической цепи Маркова // Некоторые вопр. теории случайн. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 122—133.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 04.05.87