УДК 517.9:519.46

В. І. ЧОПИК, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

Нелієвська редукція нелінійного рівняння Шредінгера

Построен класс нелиевских анзацев редуцирующих многомерное уравнение Шредингера со степенной нелинейностью к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Побудовано клас неліевських анзаців, що редукують багатовимірне рівняння Шредінгера із степеневою нелінійністю до системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Розглянемо нелінійне рівняння Шредінгера

$$
\begin{gathered}
i\Psi_t + \lambda\Delta\Psi = F(|\Psi|)\Psi, \\
F(|\Psi|) = \lambda_1 |\Psi|^{k_1} + i\lambda_2 |\Psi|^{k_2},
\end{gathered} \tag{1}
$$

де

$$
\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x^a}, \quad |\Psi| = (\Psi\Psi^*)^{1/2},
$$

$$
\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2\} \subset \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad a = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Інваріантність рівняння (1) відносно алгебри Галілея $AG(1, n)$ дозволяє знаходити розв'язки даного рівняння за допомогою анзацу [1]

$$
\Psi = f(t, \vec{x})\,\varphi(\omega), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n). \tag{2}
$$

Анзац (2), одержаний на основі локальної симетрії Лі рівняння (1), ми будемо називати лієвським. Шукатимемо розвязки рівняння (1) у вигляді

$$\Psi = f_1(t, \vec{x})\, \varphi_1(\omega)\, e^{i\{f_2(t,\vec{x})\varphi_2(\omega)+g(t,\vec{x})\}}. \tag{3}$$

Перед нами стоїть завдання: описати всі такі дійсні функції g, ω, f_i, $i = \overline{1, 2}$, які редукували б (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) на функції φ_i, $i = \overline{1, 2}$, від $\omega = \omega(t, \vec{x})$. Розвяжемо цю задачу при умові, що $f_i = f_i(t)$, $\omega = \omega(\vec{x})$. Виділимо спочатку з (3) лієвські анзаци. Після підстановки (3) в рівняння (1) і нескладних перетворень одержимо систему

$$\begin{gathered}\frac{\lambda(\varphi_1''\omega_a\omega_a + \varphi_1'\Delta\omega)}{\varphi_1} - (f_2'\varphi_2 + \lambda f_2^2\varphi_2'^2\omega_a\omega_a + 2\lambda f_2\varphi_2'\omega_a g_a + g_t + \lambda g_a g_a) = \\ = \lambda_1 (f_1\varphi_1)^{k_1}; \\ \frac{f_1'}{f_1} + \lambda\Delta g + 2\lambda f_2 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\varphi_2\omega_a\omega_a + 2\lambda\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\omega_a g_a + \lambda f_2\varphi_2''\omega_a\omega_a + \lambda f_2\varphi_2'\Delta\omega = \lambda_2 (f_1\varphi_1)^{k_2},\end{gathered} \tag{4}$$

де

$$\omega_a = \frac{\partial\omega}{\partial x_a}, \quad g_a = \frac{\partial\omega}{\partial x_a}, \quad f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad a = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

З (4) витікає, що лієвські анзаци можуть бути одержані з (3) лише тоді, коли $f_i = \text{const}$, $\omega_a g_a = \Phi(\omega)$, $\Delta g = F_1(\omega)$, $g_t + \lambda g_a g_a = F_2(\omega)$, а також

$$\omega_a\omega_a = \Phi_1(\omega); \quad \Delta\omega = \Phi_2(\omega), \tag{5}$$

і виконанні однієї з умов:

$$1)\ k_1 = k_2;\ 2)\ \lambda_1 = 0;\ 3)\ \lambda_2 = 0. \tag{6}$$

З а у в а ж е н н я 1. При виконанні однієї з умов (6) рівняння Шредінгера (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1, n)$, що одержується з $AG(1, n)$ приєднанням оператора масштабних перетворень. Тоді анзац (3) зводиться до лієвського анзацу (2).

2. Перейдемо до розгляду нелієвських анзаців (3).

Т е о р е м а 1. *Анзац* (3) *редукує рівняння Шредінгера* (1) *до системи ЗДР при виконанні* (5), *а також*

$$\begin{gathered} f_1 = (t+d)^{-1/k_2}, \quad f_2 = (t+d)^{-1}, \quad k_2 \neq 0, \quad k_1 = 2k_2; \quad f_1 = b_1 e^t, \quad f_2 = b_2, \\ k_2 = 0, \qquad b_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 2}; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\lambda\Delta g = \frac{\theta_1(\omega)}{t+d}, \\ g_t + \lambda g_a g_a = \frac{\theta_2(\omega)}{(t+d)^2},\end{gathered} \tag{8}$$

$$\omega_a g_a = \frac{\theta_3(\omega)}{t+d}, \quad d \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Доведення теореми зводиться до інтегрування системи ЗДР.

Виконання умов (5), (7)—(9) при $k_2 \neq 0$ забезпечує нелієвську редукцію [2] рівняння (1) до системи ЗДР

$$\begin{gathered}\Phi_1(\omega)\varphi_1'' + \Phi_2(\omega)\varphi_1' = 0; \\ \lambda\Phi_1(\omega)\varphi_2'^2 + 2\lambda\theta_3(\omega)\varphi_2' - \varphi_2 + \theta_2(\omega) + \lambda_1\varphi_1^{2k_2} = 0;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\lambda\Phi_1(\omega)\varphi_2^{\prime\prime}+2\lambda\Phi_1(\omega)\frac{\varphi_1^{\prime}}{\varphi_1}\varphi_2+2\lambda\frac{\varphi_1^{\prime\prime}}{\varphi_1}\theta_3(\omega)+\lambda\varphi_2^{\prime}\Phi_2(\omega)+$$

$$+\theta_1(\omega)-\frac{1}{k_2}-\lambda_2\varphi_1^{k_2}=0.$$

Розв'язки перевизначеної системи редукованих рівнянь (10) можна знайти лише за умови, що функції $\Phi_i(\omega)$, $\theta_i(\omega)$ визначені. А для цього необхідно розв'язати систему рівнянь (5), (8), (9). Приймемо, що

$$\omega=\Big(\sum_j x_j^2\Big)^{1/2},\quad \{j\}\subset\{1,\ldots,n\}. \tag{11}$$

Тобто ω визначимо формулою (11) в деякому просторі $\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$. Тоді виконується (5), причому $\Phi_1(\omega)\equiv 1$, $\Phi_2(\omega)=(m-1)/\omega$. Зважаючи на (11), з умови (9) одержуємо

$$\delta_{aj}\,\frac{x_j g_a}{\omega}=\frac{\theta_3(\omega)}{t+d}, \tag{12}$$

де $\delta_{aj}=\begin{cases}1, & a=\bar{j},\\ 0, & a\neq\bar{j},\end{cases}$ — символ Кронекера.

Нехай $a\neq j$. Це рівносильно умові, що функція $g(t,\vec{x})$ визначена на деякому просторі $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k\cap\mathbb{R}^m=\varnothing$. Тоді (12) виконуватиметься для $\theta_3=0$, а система (8) приймає вигляд

$$\begin{aligned}&\lambda\Delta g=\frac{\alpha}{t+d},\quad x_a\neq x_j;\\ &g_t+\lambda g_a g_a=\frac{\beta}{(t+d)^2},\quad \{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{13}$$

3. Дослідимо групові властивості системи (13).

Теорема 2. *Система* (13) *інваріантна відносно алгебри Лі, що породжується операторами*

$$G_a=tp_a+\frac{x_a}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial g},$$

$$P_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad I_{ab}=x_ap_b-x_bp_a;$$

$$\{a,b\}\subset\{1,\ldots,n\},\quad \{a,b\}\cap\{j\}=\varnothing,$$

а також

1) $\{D^1\}$, $D^1=2g\dfrac{\partial}{\partial g}+x_ap_a$, при $\beta=0$;

2) $\{D^1,D\}$, при $\alpha=\beta=0$, де $D=2t\dfrac{\partial}{\partial t}+x_ap_a$;

3) $\{D^1,D,A\}$, при $d=\beta=0$, $\alpha=k/2$, де $A=t^2\dfrac{\partial}{\partial t}+tx_ap_a+$ $+\dfrac{x^2}{4\lambda}\dfrac{\partial}{\partial g}$, $x^2=\sum\limits_a x_a^2$, $a\neq\bar{j}$;

4) $\{D^2\}$, $D^2=\dfrac{1}{2}(D-D^1)$, при $d=0$;

5) $\{D^2,A\}$, при $d=0$, $\alpha=k/2$.

Зауваження 2. Найбільш широку симетрію системи (13) має при $\alpha=\beta=0$ [3].

Для доведення теореми обмежимося перевіркою інваріантності системи (13) відносно проективного оператора A.

Подіявши другим продовженням оператора A на (13), одержимо

$$\widetilde{A}\left\{g_t+\lambda g_a g_a-\frac{\beta}{(t+d)^2}\right\}=-2t\left\{g_t+\lambda g_a g_a-\frac{\beta}{(t+d)^2}\right\}+$$
$$+\frac{2\beta t}{(t+d)^2}\left(1-\frac{t}{t+d}\right).$$

Звідси випливає умова на $d: d=0$. Аналогічно

$$\widetilde{A}\left\{\lambda\Delta g-\frac{\alpha}{t}\right\}=-2t\left\{\lambda\Delta g-\frac{\alpha}{t}\right\}+\frac{k}{2}-\alpha.$$

Із останнього співвідношення одержуємо умову, що $\alpha = k/2$.

Аналогічно перевіряється інваріантність (13) відносно інших операторів симетрії.

4. Розглянемо розв'язки перевизначеної системи редукованих рівнянь (10). При виконанні (11) система (10) матиме вигляд

$$\varphi_1''+\frac{m-1}{\omega}\varphi_1'=0; \tag{14}$$

$$\lambda\varphi_2'^2-\varphi_2+\beta+\lambda_1\varphi_1^{2k_2}=0; \tag{15}$$

$$\lambda\varphi_2''+2\lambda\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\varphi_2+\lambda\frac{m-1}{\omega}\varphi_2'+\alpha-\frac{1}{k_2}-\lambda_2\varphi_1^{k_2}=0. \tag{16}$$

З (14) витікає

$$\varphi_1=\frac{c_1}{2-m}\omega^{2-m}+c_2,\quad m\neq 2;$$
$$\varphi_1=c_1\ln\omega+c_2,\quad m=2,\quad \{c_1,c_2\}\subset\mathbb{R}. \tag{17}$$

З (15) одержуємо (при $\lambda_1=\beta=0$)

$$\varphi_2=\frac{(\omega+c_3)^2}{4\lambda},\quad c_3\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Розв'язки (17), (18) повинні також задовольняти умові (6). При їх підстановці в (16) одержимо такі розв'язки:

1. $\varphi_1=\lambda_2\ln\omega+c_2,$

   $\varphi_2=\omega^2/4\lambda$, при $m=2,\ k_2=-1,\ \alpha=-2;$

2. $\varphi_1=c_1\omega+c_2,$

   $\varphi_2=\dfrac{(\omega+c_3)^2}{4\lambda}$, при $m=1,\ k_2=-1,\ \alpha=-5/2,\ c_1c_3-c_2=\lambda_2;$

3. $\varphi_1=\dfrac{c_1}{2-m}\omega^{2-m}+c_2,$

   $\varphi_2=\dfrac{\omega^2}{4\lambda}$, при $m\neq 2,\ k_2=-1,\ m-2=\dfrac{\lambda_2}{c_2},\ \alpha+3=\dfrac{m}{2},\ c_2\neq 0;$

4. $\varphi_1=\dfrac{c_1}{2-m}\omega^{2-m},$

   $\varphi_2=\dfrac{(\omega+c_3)^2}{4\lambda}$, при $k_2=\dfrac{1}{m-2},\ c_3=\dfrac{2\alpha+4-m}{2(m-2)},$

   $m\neq 2,\quad \dfrac{(3+k_2)c_3}{2k_2}=\lambda_2(c_1k_2)^{k_2}.$

З а у в а ж е н н я 3. Для знаходження розв'язків нелінійного рівняння (1) необхідно знайдені функції $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ підставити в (3). Тоді анзац (3) буде задавати точні розв'язки рівняння Шредінгера, де $g(t, \vec{x})$ — довільний розв'язок системи (13), а f_i визначаються (7).

Нехай у (12) $\{j\} \subset \{a\}$, тобто $\delta_{aj} = 1$. Тоді для знаходження розв'язків системи редукованих рівнянь необхідно конкретизувати функцію $g(t, \vec{x})$. Одним з розв'язків умов розщеплення (8), (9) є такий:

$$g(t, \vec{x}) = \frac{x^2}{4\lambda(t+d)}, \quad x^2 = x_a x^a, \quad a = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Тоді $\theta_1 = n/2$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \omega/2\lambda$.

Система редукованих рівнянь буде мати вигляд

$$\varphi_1'' + \frac{m-1}{\omega}\varphi_1' = 0;$$

$$\lambda\varphi_2'^2 + \omega\varphi_2' - \varphi_2 + \lambda_1\varphi_1^{2k_2} = 0; \tag{20}$$

$$\lambda\varphi_2'' + 2\lambda\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\varphi_2 + \omega\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \lambda\frac{m-1}{\omega}\varphi_2' + \frac{n}{2} - \frac{1}{k_2} - \lambda_2\varphi_1^{k_2} = 0.$$

Одним з розв'язків системи (20) при $\lambda_1 = 0$ буде

$$\varphi_1 = \left(\frac{\omega}{d_1}\right)^{-1/k_2}; \quad \varphi_2 = d_2(\omega + \lambda d_2); \quad d_2 = \frac{nk_2 - 4}{4\lambda}, \tag{21}$$

де $\lambda d_2(k_2+1) - 2\lambda^2 d_2^2 - k_2\lambda_2 d_1 = 0$, $d_1 \neq 0$, $\left(m + 2 + \frac{1}{k_2}\right) \in \mathbb{N}$.

З урахуванням (7), (19), (21) одержимо такий точний розв'язок нелінійного рівняння (1):

$$\Psi = \left(\frac{(t+d)\,\omega}{d_1}\right)^{-1/k_2} e^{i\left\{\frac{d_2(\omega+\lambda d_2)4\lambda + x^2}{4\lambda(t+d)}\right\}}, \quad \omega = \left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}, \quad \{j\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

На закінчення підкреслимо, що анзац (3) не може бути одержаним на основі традиційного підходу Лі. Його можна побудувати лише з використанням умовної симетрії рівняння Шредінгера (1) [4—5].

1. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math and Gen.— 1987.— P. 929—933.
2. *Фущич В. И. Жданов Р. З.* Нелиевские анзацы и точные решения нелинейного спинорного уравнения // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 7.— С. 958—962.
3. *Фущич В. І., Сєров М. І., Чопик В. І.* Умовна інваріантність і нелінійні рівняння теплопровідності // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1988.— № 9.— С. 17—20.
4. *Фущич В. І., Чопик В. І.* Умовна інваріантність нелінійного рівняння Шредінгера // Там же.— 1990, № 4.— С. 30—33.
5. *Чопик В. И.* Условная инвариантность уравнения Шредингера с действительной нелинейностью // Симметрия и решения уравнений математической физики.— Киев; Ин-т математики АН УССР,— 1989,— С. 108—110.

Получено 24,06.91