УДК 530.145

В. А. ЯЦУН, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т теорет. физики АН Украины, Киев)

Точные локализованные решения в суперсимметричных моделях бозон-фермионных взаимодействий

Изложен метод построения стационарных локализованных решений классических уравнений движения в двумерном пространстве-времени в модели бозон-фермионных взаимодействий общего вида. Применимость метода связана с инвариантностью модели относительно суперсимметричных преобразований.

Викладено метод побудови стаціонарних локалізованих розв'язків класичних рівнянь руху в двовимірному просторі-часі в моделі бозон-ферміонних взаємодій загального вигляду. Застосовність методу пов'язана з інваріантністю моделі щодо суперсиметричних перетворень.

Развитие методов квазиклассического приближения в квантовой теории поля [1] вызвало глубокий интерес к локализованным решениям нелинейных уравнений, соответствующих классическому пределу квантовых уравнений полей. В ряде случаев классические решения в рамках приближенных методов позволяют вскрыть существенные черты строгой квантовой теории. Достаточно указать на успех квазиклассических вычислений спектра связанных состояний двумерной модели синус-Гордон [2—4], в точности воспроизводящих картину квантовой теории [5, 6]. Доказательство эквивалентности квантовой модели синус-Гордон и массивной модели Тирринга [6] открыло возможность интерпретации фермионов как солитонов.

Задача явного построения классических решений, обладающих конечной энергией и представляющих собой классическое приближение частиц, является весьма сложной в реальном четырехмерном пространстве-времени. Поэтому представляет интерес рассмотрение модельной ситуации двумерного пространства-времени, когда удается найти точное решение. Для теории массивных фермионов со скалярным и векторным взаимодействием стационарные локализованные решения построены в явном виде в работе [7]. Локализованные решения уравнения Тирринга были независимо найдены в [8] в связи с исследованием возможности конфайнмента фермионов в рамках нелинейной сигма-модели с киральной симметрией. В двумерном случае эта модель эквивалентна массивной модели Тирринга с безмассовым свободным скалярным полем.

В 1976 г. О. С. Парасюк [9] впервые предложил метод построения стационарных локализованных решений в модели скалярного поля с билинейным фермионным взаимодействием. В [9] показано, что если двухкомпонентное спинорное поле Ψ удовлетворяет массивному уравнению Тирринга, то билинейный скаляр $\Phi = -\lambda \overline{\Psi} \Psi$ является решением уравнения для скалярного поля с некоторым строго фиксированным потенциалом $U(\Phi)$. Оказывается, что соответствующий лагранжиан отвечает суперсимметричной теории бозон-фермионного взаимодействия. В данной работе указанный метод использован при построении стационарных локализованных решений в бозон-фермионных системах общего вида.

1. Модель с билинейным взаимодействием. Зададим лагранжиан модели в виде

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\,\partial^{\mu}\Phi\partial_{\mu}\Phi - \widetilde{U}(\Phi) + \overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi - \lambda\Phi\overline{\Psi}\Psi \tag{1}$$

где $\Psi(x, t)$ — двухкомпонентное спинорное поле, $\overline{\Psi} = \Psi^{+}\gamma^{0}$, $\Phi(x, t)$ — вещественное скалярное поле, $U(\Phi)$ — потенциал скалярного поля, и для матриц Дирака выбрано представление

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$(i\gamma^{0}\partial_t + i\gamma^{1}\partial_x - m - \lambda\Phi)\Psi = 0, \tag{2}$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\Phi + \widetilde{U}'(\Phi) + \lambda\overline{\Psi}\Psi = 0.$$

Требуется построить стационарное локализованное решение системы (2)

$$\Psi(x, t) = e^{-i\varepsilon t}\begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix}, \qquad \Phi(x, t) = \Phi(x), \tag{3}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \Phi(x) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение Тирринга

$$\{i\gamma^{0}\partial_t + i\gamma^{1}\partial_x - m + \lambda^{2}(\overline{\psi}\psi)\}\psi = 0. \tag{5}$$

Пусть

$$\psi(x, t) = e^{-i\varepsilon t}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \tag{6}$$

— стационарное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = \lim_{x\to\pm\infty} v(x) = 0. \tag{7}$$

Теорема 1 [9]. *Если потенциал $\widetilde{U}(\Phi)$ задать в виде*

$$\widetilde{U}(\Phi) = 2\Phi^{2}\left(\frac{1}{2}\lambda\Phi + m\right)^{2}, \tag{8}$$

то решение задачи (2) — (4) *определится формулами*

$$U(x) = 2\varepsilon u(x), \quad V(x) = 2\varepsilon v(x), \tag{9}$$

$$\Phi(x) = -\lambda^{2}(u^{2} - v^{2}), \tag{10}$$

в которых функции $u(x)$ и $v(x)$ составляют решение (6).

Таким образом, стационарное решение модели (1) определяется решением уравнения Тирринга (5). Последнее найдено в явном виде в работах [7, 8]:

$$u(x) = R(x)\cos\Theta(x), \qquad v(x) = R(x)\sin\Theta(x),$$

$$R^{2}(x) = 2\lambda^{-2}(m - \varepsilon)\,\mathrm{ch}^{-2}(\beta x)\,[1 - \alpha^{2}\,\mathrm{th}^{2}(\beta x)]^{-2}\,[1 + \alpha^{2}\,\mathrm{th}^{2}(\beta x)],$$

$$\Theta(x) = \mathrm{arctg}\,(\alpha\,\mathrm{th}(\beta x)), \qquad \alpha = \left(\frac{m - \varepsilon}{m + \varepsilon}\right)^{1/2}, \qquad \beta = (m^{2} - \varepsilon^{2})^{1/2}. \tag{11}$$

Для двумерной сигма-модели с одним бозонным полем, эквивалентной модели (1), решение (11) получено в работе [10] с помощью метода обратной задачи для уравнения Дирака [11]. Теорема 1 вскрывает сущность ограничения на постоянные связи [10], при котором это решение найдено.

Рассмотрим теперь бозон-фермионную систему более общего вида

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \partial^{\mu}\Phi\partial_{\mu}\Phi - \widetilde{U}(\Phi) + \overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi - \lambda F(\Phi)\overline{\Psi}\Psi \tag{12}$$

с потенциалом $\widetilde{U}(\Phi) = -\frac{1}{2}[V'(\Phi)]^2$.

Т е о р е м а 2 [12]. *Теория* (12) *инвариантна относительно суперсимметричных преобразований*

$$\delta\Phi = i\bar{\varepsilon}\Psi, \quad \delta\Psi = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Phi - V'(\Phi))\,\varepsilon,$$

где ε — *постоянный антикоммутирующий спинор, при условии, что*

$$F(\Phi) = V''(\Phi). \tag{13}$$

Из теоремы 2 вытекает, что лагранжиан (1) является суперсимметричным именно в том случае, когда потенциал скалярного поля $\widetilde{U}(\Phi)$ имеет вид (8).

Отметим, что статические решения системы (11) с ограничением (13) определяются уравнением первого порядка

$$\Phi' = \pm V'(\Phi), \qquad \Psi = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Phi - V'(\Phi))\,\varepsilon.$$

Как показано ниже, стационарные решения теории (12), за исключением случая (1), существуют только в предположении, что скалярное поле Φ является комплексным.

2. С т а ц и о н а р н ы е л о к а л и з о в а н н ы е р е ш е н и я в м о д е л я х б о з о н-ф е р м и о н н ы х в з а и м о д е й с т в и й. Предложенный в работе [9] метод построения стационарных локализованных решений можно использовать и в более общем случае, охватывающем достаточно широкий класс бозон-фермионных взаимодействий.

Зададим лагранжиан взаимодействия в виде

$$\mathscr{L} = \partial^{\mu}\Phi^*\partial_{\mu}\Phi - \widetilde{U}(\Phi^*\Phi) + \overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi - \lambda\Phi^*\Phi F(\overline{\Psi}\Psi), \tag{14}$$

где Φ — комплексное скалярное поле; $F(y)$ — произвольная дифференцируемая функция, условия на которую будут сформулированы ниже. Соответствующая система уравнений движения имеет вид

$$\begin{gathered} \{i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x - m - \lambda\Phi^*\Phi F'(\overline{\Psi}\Psi)\}\Psi = 0, \\ \{(\partial_t^2 - \partial_x^2) + \widetilde{U}'(\Phi^*\Phi) + \lambda F(\overline{\Psi}\Psi)\}\,\Phi = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Построим стационарное локализованное решение системы (15)

$$\Psi(x, t) = e^{-i\varepsilon t}\begin{pmatrix} U \leftarrow (x) \\ V \leftarrow (x) \end{pmatrix}, \qquad \Phi(x, t) = e^{-i\varepsilon t}\Phi(x), \tag{16}$$

$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < \infty$, удовлетворяющее граничным условиям (4).

1. О б о б щ е н н о е у р а в н е н и е Т и р р и н г а. Обратимся предварительно к уравнению

$$\{i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x - m - \lambda H'(\overline{\Psi}\Psi)\}\,\Psi = 0, \tag{17}$$

обобщающему уравнение Тирринга (5), в котором $H(y)$ — произвольная дифференцируемая функция. В случае $m = 0$ уравнение (17) обладает простым статическим решением, полученным в работе [13] в связи с раскрытием аналогии между солитонами и фермионами.

Если искать стационарные решения уравнения (17) в виде (6), то при использовании условия равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu} = i\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\Psi - g_{\mu\nu}\mathscr{L}$ вследствие теоремы Нётер [14] получаем, что функции $u(x)$ и $v(x)$ с точностью до постоянного множителя должны быть вещественными и удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} + \{m + \varepsilon + \lambda H'(u^2 - v^2)\} v = 0, \\ &\frac{dv}{dx} + \{m - \varepsilon + \lambda H'(u^2 - v^2)\} u = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Записав систему (18) в виде эквивалентной ей системы уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d(u^2 - v^2)}{dx} + 4\varepsilon uv = 0, \\ \frac{d(u^2 + v^2)}{dx} + 4(m + \lambda H'(u^2 - v^2))\, uv = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

найдем ее первый интеграл

$$\varepsilon(u^2 + v^2) - m(u^2 - v^2) - \lambda H(u^2 - v^2) = c_1, \tag{20}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Положим $c_1 = 0$, что, как убедимся далее, позволяет обеспечить выполнение граничных условий (7). Соотношение

$$u^2 + v^2 = \varepsilon^{-1}\{m(u^2 - v^2) + \lambda H(u^2 - v^2)\} \tag{21}$$

позволяет разделить переменные в первом уравнении системы (19) и, таким образом, привести его решение к квадратуре

$$\pm \frac{1}{2} \int\limits_{u^2 - v^2}^{u_0^2 - v_0^2} \{[my + \lambda H(y)]^2 - \varepsilon^2 y^2\}^{-1/2}\, dy = x + c_2. \tag{22}$$

Теперь подчиним функцию $H(y)$ некоторым дополнительным условиям с тем, чтобы придать смысл формальному выражению (22). Вместе с тем убедимся, что постоянные c_1 и c_2, а также знак перед квадратным корнем в выражении (22) могут быть выбраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям (7).

2. Пусть функция $H(y)$ задана на интервале $[0, y_1]$, $y_1 > 0$,

$$H(y) = yH_1(y), \tag{23}$$

причем:

$$\begin{aligned} &1.\ \ H_1(y) \text{ непрерывно дифференцируема на } [0, y_1]; \\ &2.\ \ H_1'(y) < 0; \\ &3.\ \ m + \lambda H_1(y) \geqslant 0 \text{ и } m + \lambda H_1(y_1) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, функция $m + \lambda H_1(y)$ на интервале $[0, y_1]$ является неотрицательной, строго монотонно убывает и обращается в нуль в точке $y = y_1$. Пусть, далее, $\varepsilon_0 = m + \lambda H_1(0)$ и $y_0(\varepsilon)$ — корень уравнения

$$m + \lambda H_1(y) - \varepsilon = 0 \tag{25}$$

для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Поскольку $m + \lambda H_1(y)$ строго монотонно убывает от значения ε_0 до 0, то при каждом фиксированном значении ε из интервала $(0, \varepsilon_0)$ уравнение (25) обладает вещественным корнем $y_0(\varepsilon)$. В силу условий (24) функция $y_0(\varepsilon)$ может быть найдена путем обращения функции $\varepsilon = m + \lambda H_1(y)$ на интервале $(0, \varepsilon_0)$. Следовательно, функция $y_0(\varepsilon)$ также строго монотонно убывает и $y_0(0) = y_1$, $y_0(\varepsilon_0) = 0$.

Будем считать в дальнейшем, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и, положив в формуле (22) $c_2 = 0$, $u_0^2 - v_0^2 = y_0(\varepsilon)$, определим с ее помощью функцию $u^2 - v^2$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \int\limits_{u^2 - v^2}^{y_0(\varepsilon)} y^{-1}\{[m + \lambda H_1(y)]^2 - \varepsilon^2\}^{-1/2}\, dy = \mp x, \quad x \lessgtr 0, \\ u^2 - v^2 = y_0(\varepsilon), \qquad x = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Интеграл в выражении (26) сходится при $0 < u^2 - v^2 \leqslant y_0(\varepsilon)$, так как в силу условий (24) подынтегральная функция на интервале интегрирования имеет единственную особенность в точке $y = y_0(\varepsilon)$, которая является интегрируемой, поскольку $H_1'(y_0(\varepsilon)) \neq 0$.

Формула (26) позволяет легко усмотреть некоторые свойства $u^2 - v^2$ как функции x. Функция $x = x(u^2 - v^2)$, $0 < u^2 - v^2 \leqslant y_0(\varepsilon)$, определенная формулами (26), удовлетворяет условиям теоремы о существовании обратной функции, так как производная $dx/d(u^2 - v^2)$ нигде не обращается в нуль на интервале $0 < u^2 - v^2 \leqslant y_0(\varepsilon)$. Следовательно, существует обратная ей вещественная функция $u^2 - v^2 = (u^2 - v^2)(x)$, непрерывная на $(-\infty, \infty)$. Ее производная также непрерывна, так как при $x = 0$ $u^2 - v^2 = y_0(\varepsilon)$ и $[m + \lambda H_1(y_0)]^2 - \varepsilon^2 = 0$. Вследствие (26) функция $u^2 - v^2$ является четной и

$$\lim_{x\to\pm\infty} (u^2 - v^2) = 0. \tag{27}$$

Кроме того, она монотонно возрастает на полуоси $(-\infty, 0)$ и монотонно убывает на полуоси $(0, \infty)$.

Из (20) и (27) заключаем, что выбор $c_1 = 0$ в формуле (20) обеспечивает выполнение условий

$$\lim_{x\to\pm\infty} (u^2 + v^2) = 0. \tag{28}$$

Очевидно, $u^2 + v^2 > 0$, поэтому функции $u(x)$ и $v(x)$ вещественны на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Определим функции $u(x)$ и $v(x)$ следующим образом:

$$u(x) = \sqrt{u^2(x)}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$v(x) = \begin{cases} -\sqrt{v^2(x)}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{v^2(x)}, & x > 0. \end{cases} \tag{29}$$

Такое определение вызвано тем, что в соответствии с (19) и (26) $uv \lesseqgtr 0$ для $x \lesseqgtr 0$ и $uv = 0$ при $x = 0$. В силу равенств

$$u^2 = \frac{1}{2\varepsilon}(u^2 - v^2)\{m + \varepsilon + \lambda H_1(u^2 - v^2)\},$$

$$v^2 = \frac{1}{2\varepsilon}(u^2 - v^2)\{m - \varepsilon + \lambda H_1(u^2 - v^2)\},$$

вытекающих из (18) и (19), функции (29) непрерывны на оси $-\infty < x < \infty$. Заметим, что $v^2(0) = 0$, так как при $x = 0$ $u^2 - v^2 = y_0(\varepsilon)$, а $y_0(\varepsilon)$ — корень уравнения (25). Из равенства (28) следует, что функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют граничным условиям (7).

3. Повторяя рассуждения п. 2, легко придти к заключению, что система уравнений (18) допускает стационарные локализованные решения при несколько других ограничениях на функцию $H(y)$.

Пусть $H(y)$ задана на интервале $[-y_1, 0]$, $0 < y_1 < \infty$, и допускает представление (23), причем функция $H_1(y)$ на этом интервале удовлетворяет условиям: 1. $H_1(y)$ непрерывно дифференцируема; 2. $H_1'(y) < 0$; 3. $m + \lambda H_1(y) \leqslant 0$ и $m + \lambda H_1(-y_1) = 0$. Пусть, далее, $\varepsilon_0 = -(m + \lambda H_1(0))$ и $y_0(\varepsilon)$ — корень уравнения

$$m + \lambda H_1(y) + \varepsilon = 0 \tag{30}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Так как $m + \lambda H_1(y)$ строго монотонно убывает на $[-y_1, 0]$ от 0 до значения $-\varepsilon_0$, то при каждом фиксированном ε из интервала $(0, \varepsilon_0)$ уравнение (30) обладает вещественным корнем $y_0(\varepsilon)$. На этот раз функция $y_0(\varepsilon)$ монотонно возрастает и $y_0(0) = -y_1$, $y_0(\varepsilon_0) = 0$. Функция $u^2 - v^2$

определяется по формуле

$$\frac{1}{2}\int\limits_{y_0(\varepsilon)}^{u^2-v^2} y^{-1}\{[m+\lambda H_1(y)]^2-\varepsilon^2\}^{-1/2}\,dy=\pm x,\quad x\lessgtr 0,$$

и в этом случае является отрицательной, тогда как функция u^2+v^2, определенная согласно формуле (21), остается положительной. Дальнейшее построение функций $u(x)$ и $v(x)$ проводится по схеме предыдущего пункта.

4. Стационарные локализованные решения системы (15). В обозначениях (16) система уравнений движения (15) принимает вид

$$\frac{dU}{dx}+\{m+\varepsilon+\lambda\Phi^2F'(U^2-V^2)\}V=0,$$

$$\frac{dV}{dx}+\{m-\varepsilon+\lambda\Phi^2F'(U^2-V^2)\}U=0, \tag{31}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-\{\widetilde{U}'(\Phi^2)+\lambda F(U^2-V^2)-\varepsilon^2\}\Phi=0,$$

Граничные условия, которым должно удовлетворять локализованное решение системы (31), определяются формулой (4).

Сформулируем условия на функцию $F(y)$, при которых будет построено решение задачи (31). Предполагая, что $F(y)$ локально интегрируема, определим функцию

$$\chi(y)=m+\lambda F(y)-\lambda y^{-1}\int\limits_0^y F(t)\,dt.$$

Предположим, что функция $\chi(y)$ на интервале $[0, y_1]$, $0<y_1<\infty$, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}&1.\quad \chi'(y)<0;\\ &2.\quad \chi(y)\geqslant 0 \text{ и } \chi(y_1)=0.\end{aligned} \tag{32}$$

Пусть $\varepsilon_0=\chi(0)$ и $y_0(\varepsilon)$ — корень уравнения $\chi(y)-\varepsilon=0$ для $0<\varepsilon\leqslant\leqslant\varepsilon_0$.

Теорема 3. *Если потенциал $\widetilde{U}(y)$ задать в виде*

$$\widetilde{U}(y)=y\{\chi^2(y)+\chi(y)-m-\lambda F(y)\}, \tag{33}$$

то для $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ локализованное решение системы (31) *определяется формулами*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{U^2-V^2}^{y_0(\varepsilon)} y^{-1}[\chi^2(y)-\varepsilon^2]^{-1/2}\,dy=\pm x,\quad x\gtrless 0, \tag{34}$$

$$U^2+V^2=\frac{1}{\varepsilon}(U^2-V^2)\,\chi(U^2-V^2), \tag{35}$$

$$\Phi(x)=(U^2-V^2)^{1/2}, \tag{36}$$

в которых $0<U^2-V^2\leqslant y_0(\varepsilon)$.

Доказательство. Подставив в первые два уравнения системы (31) выражение для $\Phi(x)$ по формуле (36), получаем, что они совпадают с системой (18), если положить

$$\lambda H(y)=y[\chi(y)-m]. \tag{37}$$

При ограничениях (32) на $\chi(y)$ функция (37) удовлетворяет условиям (23), (24). Поэтому все рассуждения п. 2 можно перенести на случай системы

(31). В результате получаем, что формулы (34), (35), которые повторяют выражения (21), (26) с учетом равенства (37), определяют решение первых двух уравнений системы (31).

Убедимся теперь, что при таким образом определенных функциях $U(x)$ и $V(x)$ функция (36) является решением третьего уравнения системы (31). Выведем вспомогательные соотношения для функций $U(x)$ и $V(x)$, определяющих выражение (36), которые следуют из первых двух уравнений системы (31). С этой целью воспользуемся системой (18), подразумевая под $H(y)$ выражение (37). С помощью формулы (21), которая теперь принимает вид (35), находим

$$U^2V^2 = \frac{1}{4\varepsilon^2}(U^2 - V^2)\{\chi^2(U^2 - V^2) - \varepsilon^2\}. \tag{38}$$

Поэтому из уравнений (18) получаем

$$U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}(U^2 - V^2)\{\varepsilon^2 - \chi^2(U^2 - V^2) - (U^2 - V^2) \times \times \chi(U^2 - V^2)\chi'(U^2 - V^2)\}. \tag{39}$$

Ниже используем равенства (19), (38) и (39) при вычислении производных функции (36). Имеем

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -2\varepsilon(U^2 - V^2)^{-1/2}\left\{U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx} + 2\varepsilon U^2V^2(U^2 - V^2)^{-1}\right\}.$$

Далее, с помощью равенств (38) и (39) получаем

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = (U^2 - V^2)^{1/2}\{\chi^2(U^2 - V^2) + 2(U^2 - V^2)\chi(U^2 - V^2) \times \times \chi'(U^2 - V^2) - \varepsilon^2\} = (U^2 - V^2)^{1/2} \times \times \left\{\frac{d}{d(U^2 - V^2)}[(U^2 - V^2)\chi^2(U^2 - V^2)] - \varepsilon^2\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \Phi\left\{\frac{d}{d\Phi^2}[\Phi^2\chi^2(\Phi^2)] - \varepsilon^2\right\}. \tag{40}$$

Сравнивая (40) с третьим уравнением системы (31) и учитывая формулу (33) для потенциала $\widetilde{U}(y)$, убеждаемся, что функция (36) является решением этого уравнения. Она удовлетворяет граничным условиям (4), так как в силу выводов п. 2 функции $U(x)$ и $V(x)$ им удовлетворяют.

Таким образом, формулы (16), (34)—(36) полностью определяют стационарное локализованное решение системы уравнений (15).

5. Для иллюстрации теоремы 3 рассмотрим два конкретных примера бозон-фермионных взаимодействий и найдем явные выражения для стационарных локализованных решений.

1. Пусть $F(y) = -y$. Тогда $\chi(y) = m - \frac{\lambda}{2}y$, $\varepsilon_0 = m$, $y_0 = \frac{2}{\lambda}(m - \varepsilon)$, $\widetilde{U}(y) = y\left\{m^2 - \lambda\left(m - \frac{1}{2}\right)y + \frac{\lambda^2}{4}y^2\right\}$. Следовательно,

$$U(x) = \sqrt{\frac{2(m-\varepsilon)}{\lambda}}\,\mathrm{ch}^{-1}(\beta x)[1 - \alpha^2\,\mathrm{th}^2(\beta x)]^{-1},$$

$$V(x) = \alpha\,\mathrm{th}(\beta x)\,U(x), \quad \Phi(x) = [1 - \alpha^2\,\mathrm{th}^2(\beta x)]^{1/2}\,U^{1/2}(x).$$

2. Пусть $F(y) = -\frac{3}{2}y^2$. Тогда $\chi(y) = m - \lambda y^2$, $y_0 = \sqrt{\frac{m-\varepsilon}{\lambda}}$,

$\widetilde{U}(y) = y\left\{m^2 - \lambda\left(2m - \frac{1}{2}\right)y^2 + \lambda^2 y^4\right\}$. Следовательно,

$$U(x) = \left\{\frac{m - \varepsilon}{\lambda}\,\mathrm{ch}^{-2}(2\beta x)\left[1 - \alpha^2\,\mathrm{th}^2(2\beta x)\right]^{-3}\right\}^{1/4},$$

$$V(x) = \alpha\,\mathrm{th}(2\beta x)\,U(x), \quad \Phi(x) = \left[1 - \alpha^2\,\mathrm{th}^2(2\beta x)\right]^{1/2} U^{1/2}(x).$$

Очевидно, найденные решения удовлетворяют граничным условиям (4).

1. *Rajamaran R.* Some nonperturbative semi-classical methods in quantum field theory // Phys. Rep.— 1975.— **21C**, N 5.— P. 228—313.
2. *Тахтаджян Л. А. Фаддеев Л. Д.* Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля // Теорет. и мат. физика.— 1974.— **21**, № 2.— С. 160—174.
3. *Поляков А. М.* Спектр частиц в квантовой теории поля // Письма в журн. эксперим. и теорет. физики.— 1974.— **20**, № 6.— С. 430—433.
4. *Dashen R. Hasslacher B., Neveu A.* Semiclassical bound states in an asymptotically free theory // Phys. Rev.— 1975.— **D12**, N 8.— P. 2443—2458.
5. *Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д.* Квантование солитонов // Теорет. и мат. физика.—1975.— **25**, № 2.— С. 147—163.
6. *Coleman S.* Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model // Phys. Rev.— 1975.— **D11**, N 8.— P. 2088—2097.
7. *Lee S. J. Kuo T. K. Gavrielides A.* Exact localized solutions of two-dimensional field theories of massive fermions // Ibid.— D12.— N 8.— P. 2249—2253.
8. *Shau-Jin Chang Ellis S. D. Zee B. W.* Chiral confinement: an exact solution of the massive Thirring model // Ibid.— D11.— N 12.— P. 3572—3582.
9. *Парасюк О. С.* Стационарные локализованные решения уравнений, описывающих взаимодействие полей в двухмерном пространстве-времени // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1976.— № 9.— С. 838—842.
10. *Campbell D. K.* Exact classical solutions of two—dimensional sigma model // Phys. Lett — 1976.— **64B** N 2.— P. 187—189.
11. *Фролов И. С.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР.— 1972.— **207** № 1.— С. 44—47.
12. *Di Vecchia P. Ferrara S.* Classical solutions in two-dimensional supersymmetric field theories // Nucl. Phys.— 1977.— **B130**, N 1.— P. 93—102.
13. *Hu B.* Fermions as solitons // Lett. Nuovo Cim.— 1977.— **18**, N 9.— P. 267—268.
14. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1976.— 479 с.

Получено 10.06.91