УДК 517.9:519.46

А. Г. НИКИТИН, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Полный набор операторов симметрии уравнения Шредингера

Найден полный набор операторов симметрии произвольного порядка, допускаемых уравнением Шредингера. Показано, что это уравнение инвариантно относительно 28-мерной алгебры Ли, реализуемой в классе дифференциальных операторов второго порядка. Исследованы высшие симметрии уравнения Леви — Леблонда.

Знайдено повний набір операторів симетрії довільного порядку для рівняння Шредінгера. Показано, що це рівняння інваріантне відносно 28-вимірної алгебри Лі, що реалізується у класі диференціальних операторів другого порядку. Досліджені вищі симетрії рівняння Леві — Леблонда.

1. В в е д е н и е. Описание операторов симметрии высших порядков основных уравнений математической физики становится все более актуальной задачей, поскольку является необходимым этапом при исследовании систем координат, в которых уравнения допускают решения в разделяющихся переменных [1]. Как было обнаружено сравнительно недавно [2, 3], порядок операторов симметрии, порождающих такие системы координат, может быть достаточно высоким и превышать порядок уравнения, поэтому естественный интерес вызывает задача описания операторов симметрии произвольного порядка. Отметим, что в 1970 г. были получены интегро-дифференциальные операторы симметрии уравнения Дирака, которые можно интерпретировать как симметрии бесконечного порядка [4].

В работах [5—7] получены полные наборы операторов симметрии, допускаемых скалярным волновым уравнением и уравнением Дирака, и исследованы их алгебраические свойства. Настоящая статья продолжает изучение высших симметрий основных уравнений математической физики и посвящена исследованию уравнения Шредингера и других уравнений нерелятивистской квантовой механики. Ниже приведено полное описание высших симметрий уравнечия Шредингера, а именно: найден полный набор операторов симметрии произвольного конечного порядка n, допускаемых этим уравнением.

Автору приятно сообщить, что интерес к проблемам симметрии основных уравнений математической физики возник у него в результате общения с О. С. Парасюком, руководившим его дипломной работой в Киевском университете.

2. О б о б щ е н н ы е т е н з о р ы К и л л и н г а и о п е р а т о р ы с и м м е т р и и у р а в н е н и я Ш р е д и н г е р а. Уравнения Шредингера для комплексной скалярной функции $\Psi(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Psi \supset L_2(R_4)$, запишем в виде

$$L\Psi = 0, \quad L = p_0 - \frac{p^2}{2m}, \tag{1}$$

где $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, $p_0 = i\partial^0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $p_a = -i\partial^a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$.

Известно, что уравнение (1) инвариантно относительно 12-параметрической группы Шредингера, генераторы которой имеют вид

$$\begin{gathered} P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \\ J_a = \varepsilon_{abc}x_b p_c, \quad G_a = x_0 p_a - m x_a, \\ D = 2x_0 p_0 - x_a p_a + \frac{3}{2} i, \\ A = x_0^2 p_0 - x_0 D - \frac{1}{2} m x^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Инвариантностью относительно алгебры (2) исчерпывается максимальная (в смысле Ли) симметрия уравнения Шредингера [8].

О п р е д е л е н и е. *Линейный дифференциальный оператор порядка* n

$$Q^n = \sum_{j=0}^{n} [[\ldots[F^{a_1 a_2 \ldots a_j}, p_{a_1}]_+, p_{a_2}]_+, \ldots]_+, p_{a_j}]_+, \tag{3}$$

где $[A, B]_+ = AB + BA$, $F^{a_1\ldots}$ — *произвольные функции от* x, $a_\nu = 1, 2, 3$, $\nu = 1, 2, \ldots, j$, *называется оператором симметрии уравнения Шредингера порядка* n, *если*

$$[Q; L]\,\Psi = 0 \tag{4}$$

для каждого Ψ, *удовлетворяющего* (1).

Оператор (3) не включает дифференцирования по x_0, которое можно заменить дифференцированием по пространственным координатам на множестве решений уравнения (1).

Подставляя (3), (1) в (4) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых операторах дифференцирования, приходим к следующим уравнениям для коэффициентов операторов симметрии:

$$\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} = -2m\dot{F}^{a_1 a_2 \ldots a_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$\partial^{(a_{n+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_n)} = 0; \qquad \dot{F} = 0, \quad j = 0, \tag{6}$$

где точка обозначает производную по x_0, и подразумевается симметризация по индексам, заключенным в круглые скобки.

Система уравнений (5), (6) может быть проинтегрирована сразу для произвольного значения n, если воспользоваться результатами работ [5, 6]. Для этого рассмотрим сначала дифференциальные следствия этих уравнений. Дифференцируя (5) при $j = n - 1$ по x_{n+1} и используя (6), получаем

$$\partial^{(a_{n+1}} \partial^{a_n} F^{a_1 a_2 \ldots a_{n-1})} = 0. \tag{7}$$

Затем, дифференцируя (5) для $j = n - 2$ по x_n и x_{n+1} и используя (7), получаем уравнение

$$\partial^{(a_{n+1}} \partial^{a_n} \partial^{a_{n-1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_{n-2})} = 0.$$

Повторяя эти операции, получаем уравнение для произвольного $j = n - s + 1$

$$\partial^{(a_{j+1}} \partial^{a_{j+2}} \ldots \partial^{a_{j+s}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j)} = 0, \quad s = n - j + 1. \tag{8}$$

Из (5), (6) следует также

$$\frac{\partial^{j+1}}{(\partial x_0)^{j+1}} F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = 0. \tag{9}$$

Формула (8) задает систему незацепляющихся уравнений, общее решение которой получено в [5, 6]. Мы назвали симметричный тензор $F^{a_1 \ldots}$, удовлетворяющий уравнениям (8), обобщенным тензором Киллинга ранга j и порядка s. Этот тензор представляет собой полином порядка $j + s - 1 = n$ (явный вид которого приведен в [5]) и включает N^{js} произвольных параметров, где [6]

$$N^{js} = \frac{s}{12}(j+1)(j+2)(j+1+s)(j+2+s). \tag{10}$$

Общее решение уравнений (8), (9) может быть представлено в виде

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \sum_{\alpha=0}^{j} F_{s\alpha}^{a_1 a_2 \ldots a_j} x_0^{\alpha}, \quad s = n + 1 - j, \tag{11}$$

где $F_{s\alpha}^{a_1}$ — произвольные тензоры Киллинга порядка s. Подставив (11) в исходные уравнения (5), (6), приходим к соотношениям

$$\alpha F_{s\alpha}^{a_1 a_2 \ldots a_j} = -2m\partial^{(a_j} F_{s+1\,\alpha-1}^{a_1 a_2 \ldots a_{j-1})}, \quad \alpha \neq 0. \tag{12}$$

Таким образом, задача описания операторов симметрии высших порядков, допускаемых уравнением Шредингера, сводится к определению явного вида обобщенных тензоров Киллинга ранга j и порядка $n + 1 - j$, удовлетворяющих дополнительным условиям (12). Используя результаты работ [5, 6], уравнения (12) можно свести к алгебраическим уравнениям для коэффициентов тензоров $F_{s\alpha}^{a_1 \ldots}$, которые легко решаются. Здесь мы ограничимся подсчетом числа независимых решений и заданием их в явном виде.

Согласно (12) тензоры $F_{s\alpha}^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ с $\alpha \neq 0$ однозначно выражаются через $F_{s+1\,\alpha-1}^{a_1 a_2 \ldots a_{j-1}}$, в то время как $F_{s0}^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ — это произвольный обобщенный тензор Киллинга, на который уравнения (12) не налагают никаких ограничений (см. [5, с. 38], лемма 4). Это означает, что количество линейно независимых решений N_n системы (5), (6) совпадает с числом независимых параметров, определяющих $F_{s0}^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ для всех $j \leqslant n$. Согласно (10)

$$N_n = \sum_{j=0}^{n} N^{js} = \frac{1}{3!\,4!}(n+1)(n+2)^2(n+3)^2(n+4).$$

Таким образом, уравнение Шредингера допускает N_n линейно независимых операторов симметрии порядка $j \leqslant n$. Исключая отсюда операторы симметрии порядка $j' \leqslant n-1$, получаем число $\tilde{N}_n$ операторов симметрии порядка n

$$\widetilde{N}_n = N_n - N_{n-1} = \frac{1}{4!}(n+1)(n+2)^2(n+3). \qquad (13)$$

Явные выражения соответствующих операторов симметрии можно выбрать в виде

$$Q^n = \sum_{c=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-c} \lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c b_1 b_2 \ldots b_{n-c}} P_{a_1} P_{a_2} \ldots P_{a_k} G_{a_{k+1}} G_{a_{k+2}} \ldots G_{a_c} J_{b_1} J_{b_2} \ldots J_{b_{n-c}}, \qquad (14)$$

где P_a, G_a и J_b — генераторы (2), $\lambda^{a_1 \ldots}$ — произвольные тензоры, симметричные относительно перестановок индексов $a_i \leftrightarrow a_j$ и $b_k \leftrightarrow b_m$ и удовлетворяющие условиям $\lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c b_1 b_2 \ldots b_{n-c}} \delta_{a_1 b_1} = 0$. Действительно, все слагаемые в (14) линейно независимы, а число независимых компонент всех произвольных тензоров $\lambda^{a_1 \ldots}$ совпадает с $\widetilde{N}_n$ (13). Мы видим, что все операторы симметрии конечного порядка, допускаемые уравнением Шредингера, принадлежат обвертывающей алгебре, порождаемой генераторами (2).

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Уравнение Шредингера допускает $\tilde{N}_n$ операторов симметрии порядка n. Явный вид этих операторов задан в* (14), *а $\tilde{N}_n$ — в* (13).

Обобщенные тензоры Киллинга сыграли ключевую роль в решении поставленной задачи.

3. Алгебраические свойства операторов симметрии. Исследуем алгебраическую структуру операторов симметрии уравнения Шредингера. Ограничимся операторами симметрии второго порядка, которые согласно (14) исчерпываются следующими сорока представителями:

$$P_{ab} = P_a P_b, \quad G_{ab} = G_a G_b, \quad Q_{ab} = \frac{1}{2}(P_a G_b + P_b G_a), \qquad (15)$$

$$F_{ab} = J_a J_b + J_b J_a, \quad F_a = \varepsilon_{abc} P_b J_c, \quad \Gamma_a = \varepsilon_{abc} G_b J_c,$$
$$L_{ab} = P_a J_b + P_b J_a, \quad N_{ab} = G_a J_b + G_b J_a \qquad (16)$$

(тензоры L_{ab} и N_{ab} имеют нулевой след).

Операторы (15), (16), в отличие от (2), не образуют алгебры Ли, но включают подмножества, образующие такие алгебры. А именно: операторы (15) образуют 28-мерную алгебру Ли совместно с операторами P_a, J_a, G_a (2) и единичным оператором I (P_0, A и D сводятся к следам тензоров (15) на множестве решений уравнения (1)). Действительно, прямым вычислением получаем следующие коммутационные соотношения:

$$[P_a, P_b] = [P_a, P_0] = [P_0, J_a] = [G_a, G_b] = 0,$$
$$[P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc} P_c, \quad [G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc} G_c,$$
$$[P_0, G_a] = iP_a, \quad [P_a, G_b] = i\delta_{ab} mI, \quad [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc} J_c,$$
$$[P_{ab}, P_{cd}] = [G_{ab}, G_{cd}] = 0,$$

$$[P_{ab}, G_{cd}] = im(\delta_{ac}Q_{bd} + \delta_{bd}Q_{ac} + \delta_{ad}Q_{bc} + \delta_{bc}Q_{ad}),$$
$$[P_{ab}, Q_{cd}] = im(\delta_{ac}P_{bd} + \delta_{bd}P_{ac} + \delta_{ad}P_{bc} + \delta_{bc}P_{ad}),$$
$$[Q_{ab}, G_{cd}] = -im(\delta_{ac}G_{bd} + \delta_{bd}G_{ac} + \delta_{ad}G_{bc} + \delta_{bc}G_{ad}),$$
$$[Q_{ab}, Q_{cd}] = im(\delta_{ac}Q_{bd} + \delta_{bd}Q_{ac} - \delta_{ad}Q_{bc} - \delta_{bc}Q_{ad}),$$
$$[P_a, P_{bd}] = 0, \quad [P_a, Q_{bd}] = im(\delta_{ab}P_d + \delta_{ad}P_a),$$
$$[P_a, G_{bd}] = im(\delta_{ab}G_d + \delta_{ad}G_b),$$
$$[J_a, R_{bd}] = i(\varepsilon_{abk}R_{kd} + \varepsilon_{adk}R_{kb}), \quad R_{bd} = (Q_{bd}, G_{bd}, P_{bd}),$$

определяющие 28-мерную алгебру Ли A_{28}. Эта алгебра включает подалгебру AShr (1, 3) (алгебру Ли группы Шредингера), в которую входят операторы P_{nn}, I, P_a, G_a, J_a, G_{nn}^2 и Q_{nn}, а также подалгебры $\mathrm{AO}(1,2) \subset P_{nn}, G_{nn}, Q_{nn}$; $\mathrm{AIGL}(3) \subset P_a, J_a, Q_{ab}$ и $\mathrm{AP}(2,1) \subset P_a, J_1, Q_{12}, Q_{13}$.

Мы видим, что операторы симметрии второго порядка имеют весьма нетривиальную алгебраическую структуру, которая может использоваться при построении групп скрытой симметрии уравнения (1), при определении неэквивалентных наборов операторов симметрии, соответствующих системам координат, в которых существуют решения в разделяющихся переменных, и для других целей.

4. Операторы симметрии уравнения Леви—Леблонда. Уравнение Леви — Леблонда, описывающее нерелятивистскую частицу со спином 1/2, имеет вид [9]

$$L\Psi \equiv \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_0)p_0 + (1-\gamma_0)m - \gamma_a p_a\right]\Psi = 0, \tag{17}$$

где γ_0, γ_a — матрицы Дирака, Ψ — четырехкомпонентная волновая функция. Уравнение (17) инвариантно относительно группы Шредингера, генераторы которой имеют вид

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad \hat{J}_a = J_a + S_a, \quad \hat{G}_a = G_a + \eta_a, \tag{18}$$

где J_a, G_a — операторы (2),

$$S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c \quad \eta_a = \frac{1}{2}(1-\gamma_0)\gamma_a.$$

Для описания операторов симметрии высших порядков, допускаемых уравнением (17), преобразуем его к следующей эквивалентной форме:

$$L'\Psi' = 0, \tag{19}$$

где

$$L' = ULU^{-1}, \quad \Psi' = U\Psi, \tag{20}$$

$$U = 1 - \frac{i}{m}\eta_a p_a, \quad U^{-1} = 1 + \frac{i}{m}\eta_a p_a,$$
$$L' = \frac{1}{2}(1+\gamma_0)\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + (1-\gamma_0)m. \tag{21}$$

Уравнение (19), в отличие от (17), включает только одну γ-матрицу, что упрощает исследование его симметрии. Выбирая γ_0 диагональной, заключаем, что Ψ' имеет только две ненулевые компоненты, удовлетворяющие уравнению Шредингера.

Операторы симметрии уравнения (19) разложим по полному набору матриц $\{S_a, I\}$:

$$Q = S_a Q_a + IQ_0, \quad [Q_\mu, \gamma_\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда операторы Q_μ должны быть операторами симметрии уравнения Шредингера и, следовательно, иметь форму (14). Это означает, что все операторы симметрии уравнения (19) принадлежат обертывающей алгебре алгебры **A** Schr (1, 3). Действительно, генераторы (18) в результате преобразования (20) принимают вид

$$P'_\mu = UP_\mu U^{-1} = P_\mu, \quad \hat{J}'_a = U\hat{J}_a U^{-1} = J_a + S_a, \quad \hat{G}'_a = UG_a U^{-1} = G_a,$$

где P_μ, J_a, G_a — генераторы (2), а матрицы S_a на множестве решений уравнения (19) выражаются через генераторы (22)

$$S_a \Psi' = \frac{1}{m}(m\hat{J}'_a - \varepsilon_{abc} P'_b \hat{G}'_c)\Psi'.$$

Поскольку уравнения (17) и (18) связаны обратимым преобразованием, отсюда следует, что все операторы симметрии произвольного конечного порядка являются полиномами от генераторов (18).

Аналогичное утверждение может быть доказано для уравнений, предложенных в [10, 11], которые описывают галилеевскую частицу произвольного спина s. Развиваемые здесь и в [5—7] методы позволяют найти полные наборы операторов симметрии и для уравнения Шредингера с ненулевым потенциалом, например, для потенциала гармонического осциллятора и других потенциалов, найденных в [12].

Интегральные операторы симметрии уравнения Шредингера рассматривались в [13].

1. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных.— М. : Мир, 1981.— 342 с.
2. *Kalnins E. G., Miller W. (jr), Williams G. C.* Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables // J. Math. Phys.— 1986.— **27**, N 7.— P. 1893—1990.
3. *Fels M., Kamran N.* Non-factorizable sepatable systems and higher-order symmetries of the Dirac operator // Proc. R. Soc. Lond. A.— 1990.— **428**.— P. 229—249.
4. *Фущич В. И.* О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения. — Киев, 1970.— 16 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики АН УССР; 70-32Е).
5. *Никитин А. Г., Прилипко А. И.* Обобщенные тензоры Киллинга и симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока.— Киев, 1990. — 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 90.23).
6. *Никитин А. Г.* Обобщенные тензоры Киллинга произвольного ранга и порядка // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 6.— С. 786—795.
7. *Никитин А. Г.* Полный набор операторов симметрии уравнения Дирака // Там же. № 10.— С. 1388—1398.
8. *Niederer U.* The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation // Helv. Phys. Acta.— 1972.— **45**, N 5.— P. 802—810.
9. *Levi-Leblond J. M.* Nonrelativistic particle and wave equations // Com. Math. Phys.— 1967.— **6**, N 4.— P. 286—311.
10. *Hurley W. J.* Nonrelativistic quantum mechanics for particles with arbitraty spin // Phys. Rev. D.— 1971.— **3**, N 10.— P. 2239—2247.
11. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Нерелятивистские уравнения движения для частиц произвольного спина // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1981.— **12**, № 5. — С. 1157—1219.
12. *Boyer C.* The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential // Helv. Phys. Acta.— 1974.— **47**, N 4.— P. 589—605.
13. *Никитин А. Г., Наконечный В. В.* Об алгебрах инвариантности уравнений Дирака и Шредингера // Укр. физ. журн.— 1980.— **25**, № 4.— С. 618—621.

Получено 28.06.91