УДК 517.444

А. М. ГОМИЛКО, канд. физ.-мат. наук (Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев)

Об интегральном преобразовании Конторовича — Лебедева

Рассматривается интегральное представление Конторовича — Лебедева

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2 r} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(r) \left(\int_0^\infty g(\rho) K_{i\tau}(\rho) d\rho \right) d\tau, \quad r > 0,$$

где $K_{i\tau}(\rho)$ — функция Макдональда. Доказано, что при условии $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap \cap L_p(0, \infty)$, $p \in (1, \infty)$, средние Абеля этого интеграла сходятся к $g(r)$ по $L_p(a, b)$-норме для любого конечного отрезка $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Розглядається інтегральне представлення Конторовича — Лебедєва

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2 r} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(r) \left(\int_0^\infty g(\rho) K_{i\tau}(\rho) d\rho \right) d\tau, \quad r > 0,$$

де $K_{i\tau}(\rho)$ —функція Макдональда. Доведено, що при умові $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$, $p \in (1, \infty)$, середні Абеля цього інтеграла збігаються до $g(r)$ за $L_p(a, b)$-нормою для довільного скінченного відрізка $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Интегральное преобразование Конторовича — Лебедева

$$f(\tau) = \int_0^\infty g(\rho) K_{i\tau}(\rho) d\rho, \quad \tau > 0, \tag{1}$$

где $K_{i\tau}(\rho)$ — цилиндрическая функция Макдональда, введено в работе [1]. Это преобразование нашло широкое применение в математической физике при решении статических граничных задач для клиновидных областей (см., например, [2, 3]). При определенных условиях на функцию $g(\rho)$ (см. [4, 5]) обращение интеграла (1) выражается следующим образом:

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2 r} \int_0^\infty f(\tau) \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}(r) d\tau, \quad r > 0. \tag{2}$$

Распространению интегрального преобразования (1) и его обращения (2) на пространства обобщенных функций посвящены работы [6, 7].

В настоящей работе рассматривается задача о суммировании интеграла (2) к функции $g(r)$ в смысле средних Абеля. При этом под средними Абеля интеграла (2) будем понимать выражения

$$g_\varepsilon(r) = \frac{2}{\pi^2 r} \int_0^\infty f(\tau) \tau \operatorname{sh}(\pi - \varepsilon) \tau K_{i\tau}(r) d\tau, \quad \varepsilon \in (0, \pi), \tag{3}$$

где функция $f(\tau)$ определена в (1).

Для дальнейших рассмотрений является полезной следующая лемма, касающаяся равномерной по двум переменным $\tau > 0$ и $\rho > 0$ оценки функции Макдональда $K_{i\tau}(\rho)$.

Л е м м а 1. *Для произвольного* $\delta \in [0, \pi/2)$ *существует такая постоянная* $c > 0$, *что при всех* $\tau > 0$ *и* $\rho > 0$ *верна оценка*

$$|K_{i\tau}(\rho)| \leqslant c \left(\frac{\tau + 1}{\tau} \right) e^{-\delta\tau} e^{-\rho\cos\delta}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При произвольном $\delta \in [0, \pi/2)$ для функции $K_{i\tau}(\rho)$ справедливо интегральное представление [8, с. 94]

$$K_{i\tau}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\delta i - \infty}^{\delta i + \infty} e^{-\rho \operatorname{ch}\beta} e^{i\tau\beta} d\beta, \quad \rho > 0. \tag{5}$$

© А. М. ГОМИЛКО, 1991

Интегрируя в (5) по частям, получаем еще одно представление

$$K_{i\tau}(\rho) = -\frac{\rho}{2}\int\limits_{\delta i-\infty}^{\delta i+\infty} \frac{e^{-\rho \operatorname{ch}\beta} e^{i\tau\beta}}{(-\rho \operatorname{sh}\beta + i\tau)^2}\, d\beta. \tag{6}$$

Используя асимптотику функции $K_0(\rho)$ при $\rho \to \infty$ [8, с. 32], из (5) имеем

$$|K_{i\tau}(\rho)| \leqslant e^{-\delta\tau} K_0(\rho\cos\delta) \leqslant c\rho^{-1/2} e^{-\delta\tau} e^{-\rho\cos\delta}, \quad \rho \geqslant 1/2,$$

откуда получаем оценку (4) при $\rho \geqslant 1/2$, $\tau > 0$. Таким образом, для доказательства леммы осталось рассмотреть случай $0 < \rho < 1/2$, $0 < \tau < \infty$. Здесь из (6) получим оценку

$$|K_{i\tau}(\rho)| \leqslant 2\rho e^{-\delta\tau} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\beta}{(\tau - \rho\sin\delta\operatorname{ch}\beta)^2 + \rho^2\cos^2\delta\operatorname{sh}^2\beta}\, d\beta. \tag{7}$$

Если считать, что $0 < \tau < 2$, то тогда, полагая в (7) $\delta = 0$, можно для получения (4) воспользоваться оценкой

$$|K_{i\tau}(\rho)| \leqslant 2\rho \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\beta}{\tau^2 + \rho^2\operatorname{sh}^2\beta}\, d\beta = \frac{\pi}{\tau}.$$

Пусть теперь $0 < \rho < 1/2$, $2 < \tau < \infty$ и $\beta_0 > 0$ — корень уравнения $\operatorname{ch}\beta_0 = 3/2$. Тогда, используя неравенства $\tau - \rho\sin\delta\operatorname{ch}\beta \geqslant \tau/2$ при $0 < \beta < \beta_0$ и $\operatorname{sh}\beta \geqslant \nu\operatorname{ch}\beta$ при $\beta > \beta_0$, $\nu = 3^{-1/2}$, получаем из оценки (7)

$$|K_{i\tau}(\rho)| \leqslant 2\rho e^{-\delta\tau}\left\{\int\limits_0^{\beta_0} \frac{2\operatorname{ch}\beta}{\tau}\, d\beta + \frac{1}{\nu}\int\limits_{\beta_0}^\infty \frac{\operatorname{sh}\beta}{(\tau - \rho\sin\delta\operatorname{ch}\beta)^2 + \nu^2\rho^2\cos^2\delta\operatorname{ch}^2\beta}\, d\beta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho e^{-\delta\tau}\left\{\frac{2\operatorname{sh}\beta_0}{\tau} + \frac{1}{\nu\rho\tau}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1-\sin\delta\alpha)^2 + \nu^2\cos^2\delta\alpha^2}\, d\alpha\right\} \leqslant c\,\frac{e^{-\delta\tau}}{\tau},$$

что и завершает доказательство леммы.

Для функции $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$ введем в рассмотрение преобразование Фурье

$$G(t) = \int\limits_0^\infty g(\rho)\, e^{it\rho} d\rho, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для любых $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$ и $\varepsilon \in (0, \pi)$ для функции $g_\varepsilon(r)$, определенной в* (3), *справедливо представление*

$$g_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty G(t)\, e^{-r\sin\varepsilon\sqrt{t^2+1}} e^{-ir\cos\varepsilon t}\left(\cos\varepsilon - \frac{i\sin\varepsilon t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt. \tag{9}$$

Доказательство равенства (9) проведем в два этапа. Пусть сначала функция $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$ такова, что ее преобразование Фурье (8) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Тогда, так как для любого фиксированного $\tau > 0$ функция $K_{i\tau}(\rho)$ принадлежит $L_1(0, \infty)$ (см. (4)) и справедливы равенства [9, с. 358]

$$\int\limits_0^\infty K_{i\tau}(\rho)\sin(t\rho)\, d\rho = \frac{\pi\sin(\tau q(t))}{2\operatorname{sh}\pi\tau/2\sqrt{t^2+1}}, \quad \int\limits_0^\infty K_{i\tau}(\rho)\cos(t\rho)\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi\cos(\tau q(t))}{2\operatorname{ch}\pi\tau/2\sqrt{t^2+1}}$$

с функцией $q(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+t)$, то по теореме умножения для преобразования Фурье [10, с. 15] при $\tau > 0$ получаем

$$\int_0^\infty g(\rho) K_{i\tau}(\rho)\, d\rho = \frac{1}{2i \operatorname{sh} \pi\tau/2} \int_{-\infty}^\infty G(t) \frac{\sin(\tau q(t))}{\sqrt{t^2+1}}\, dt,$$

$$\int_0^\infty g(\rho) K_{i\tau}(\rho)\, d\rho = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \pi\tau/2} \int_{-\infty}^\infty G(t) \frac{\cos(\tau q(t))}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

Тогда, воспользовавшись соотношением $\operatorname{sh}(\pi-\varepsilon)\tau = \operatorname{sh}\pi\tau/2 \operatorname{ch}(\pi/2-\varepsilon)\tau + \operatorname{ch}\pi\tau/2 \operatorname{sh}(\pi/2-\varepsilon)\tau$, имеем

$$g_\varepsilon(r) = \frac{1}{\pi^2 r} \int_0^\infty \tau \operatorname{ch}(\pi/2-\varepsilon)\tau K_{i\tau}(r) \left(\frac{1}{i} \int_{-\infty}^\infty G(t) \frac{\sin(\tau q(t))}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 r} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi/2-\varepsilon)\tau K_{i\tau}(r) \left(\int_{-\infty}^\infty G(t) \frac{\cos(\tau q(t))}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \right) d\tau$$

и, используя здесь теорему Фубини, с учетом $G(t) \in L_1(\mathbb{R})$ и оценки (4) с числом $\delta > |\pi/2 - \varepsilon|$ получаем для $g_\varepsilon(r)$ выражение

$$g_\varepsilon(r) = \frac{1}{\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{G(t)}{\sqrt{t^2+1}} \left(\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi/2-\varepsilon - iq(t))\tau K_{i\tau}(r)\, d\tau \right) dt. \quad (10)$$

Далее, справедлива формула [9, с. 406]

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{sh} a\tau K_{i\tau}(r)\, d\tau = \frac{d}{da} \int_0^\infty \operatorname{ch} a\tau K_{i\tau}(r)\, d\tau = \frac{\pi r}{2} e^{-r\cos a} \sin a, \quad |\operatorname{Re} a| < \pi/2,$$

из которой с учетом равенств $\operatorname{ch} q(t) = \sqrt{t^2+1}$ и $\operatorname{sh} q(t) = t$ при $\varepsilon \in (0, \pi)$ и $r > 0$ имеем

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi/2-\varepsilon-iq(t))\tau K_{i\tau}(r)\, d\tau = \frac{\pi r}{2} e^{-r\sin\varepsilon\sqrt{t^2+1}} e^{-ir\cos\varepsilon t} \times$$

$$\times (\cos\varepsilon \sqrt{t^2+1} - i \sin\varepsilon t),$$

откуда и из равенства (10) получаем для $g_\varepsilon(r)$ представление (9) в случае, когда $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$ и $G(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

В случае произвольной функции $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$ при фиксированных $\varepsilon \in (0, \pi)$ и $\delta \in ((\pi-\varepsilon)/2, \pi/2)$ для $r > 0$ (на основании оценки (4)) имеем

$$|g_\varepsilon(r)| \leqslant \frac{2c^2(\delta)}{\pi^2 r} \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi-\varepsilon)\tau \frac{(\tau+1)^2}{\tau} e^{-2\delta\tau} \left(\int_0^\infty |g(\rho)|\, d\rho \right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \| g(\rho) \|_{L_1(0,\infty)}. \quad (11)$$

С другой стороны, при фиксированном $\varepsilon \in (0, \pi)$ правая часть в равенстве (9) оценивается сверху через $c \| G(t) \|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c \| g(\rho) \|_{L_1(0,\infty)}$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от $g(\rho) \in L_1(0, \infty)$. Тогда, так как множество финитных бесконечно дифференцируемых функций с носителями, принадлежащими $(0, \infty)$, является плотным в $L_1(0, \infty)$, а их преобразования Фурье, очевидно, принадлежат $L_1(\mathbb{R})$, отсюда и из (11) получаем по непрерывности, что равенство (9) выполняется для всех функций из пространства $L_1(0, \infty)$. Лемма доказана.

Пусть функция $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ с некоторым $p \in (1, \infty)$. Тогда если $1 < p \leqslant 2$, то согласно неравенству Хаусдорфа — Юнга [10, с. 201] $\| G(t) \|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant c_p \| g(\rho) \|_{L_p(0,\infty)}$, где $p' = p/(p-1)$. Если же число $p \in (2, \infty)$, то по неравенству Гельдера имеем оценку

$$\| g(\rho) \|_{L_2(0,\infty)} \leqslant \| g(\rho) \|_{L_1(0,\infty)}^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \| g(\rho) \|_{L_p(0,\infty)}^{\frac{p}{2(p-1)}} \leqslant \| g(\rho) \|_{L_1(0,\infty)} + \| g(\rho) \|_{L_p(0,\infty)}.$$

Таким образом, для преобразования Фурье (8) в любом случае при $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ справедлива оценка

$$\| G(t) \|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant c_p (\| g(\rho) \|_{L_1(0,\infty)} + \| g(\rho) \|_{L_p(0,\infty)}), \quad p' = \max\left(2, \frac{p}{p-1}\right). \tag{12}$$

Считая функцию $g(\rho) \in L_p(0, \infty)$ продолженной нулем на отрицательную полуось, определим ее модуль непрерывности $\omega_p(\delta, g)$, $\delta > 0$, и функцию Стеклова $g(\rho; h)$, $h > 0$:

$$\omega_p(\delta, y) = \sup_{0 < h \leqslant \delta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} | g(\rho + h) - g(\rho) |^p d\rho \right\}^{1/p}, \quad g(\rho; h) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} g(\rho + t)\, dt.$$

Тогда $\omega_p(\delta, g) \to 0$, $\delta \to 0$, и (см. [11, с. 188])

$$\| g(\rho) - g(\rho; h) \|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \omega_p(h/2, g), \quad \| g'(\rho; h) \|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{h} \omega_p(h, g). \tag{13}$$

При этом для преобразования Фурье функции $g(\rho; h)$ в предположении $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ с $p \in (1, \infty)$ имеем выражение

$$G_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho; h) e^{it\rho} d\rho = \frac{i}{t} \int_{-\infty}^{\infty} g'(\rho; h) e^{it\rho} d\rho,$$

так что функция $G_h(t)\, t \in L_{p'}(\mathbb{R})$ и согласно (12), (13)

$$\| G_h(t)\, t \|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant \frac{c_p}{h} (\omega_1(h, g) + \omega_p(h, g)). \tag{14}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $g(\rho) \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ с некоторым $p \in (1, \infty)$. Тогда $\| g(r) - g_\varepsilon(r) \|_{L_p(a,b)} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ для любого конечного отрезка $[a, b] \subset (0, \infty)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 после простых преобразований для разности $g(r) - g_\varepsilon(r)$ имеем представление

$$g(r) - g_\varepsilon(r) = S_\varepsilon(g)(r) + R_\varepsilon(g)(r) \tag{15}$$

с функциями

$$S_\varepsilon(g)(r) = g(r) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-r\sin\varepsilon|t|} e^{-irt} dt,$$

$$R_\varepsilon(g)(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) (e^{-r\sin\varepsilon|t|} - e^{-r\sin\varepsilon\sqrt{t^2+1}}) e^{-irt} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-r\sin\varepsilon\sqrt{t^2+1}} \left\{ e^{-irt} - \cos\varepsilon e^{-ir\cos\varepsilon t} + \frac{i \sin\varepsilon t}{\sqrt{t^2+1}} e^{-ir\cos\varepsilon t} \right\} dt. \tag{16}$$

На основании (12), используя неравенство Гельдера, при всех $r \in [a, b] \subset (0, \infty)$ имеем

$$| R_\varepsilon(g)(r) | \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | G(t) | e^{-a\sin\varepsilon|t|} \left\{ \frac{b \sin\varepsilon}{\sqrt{t^2+1}} + \sin\varepsilon + (b|t| + 1) \times \right.$$

$$\times |1-\cos\varepsilon|\Big\} dt \leqslant c\sin\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(t)|\, e^{-a\sin\varepsilon|t|}(1+|t|\sin\varepsilon)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(\sin\varepsilon)^{1/p'} \| G(t)\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

Таким образом, для доказательства теоремы согласно (15) достаточно показать, что $S_\varepsilon(g)(r) \to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ в пространстве $L_p(a, b)$ для любого конечного отрезка $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Введем в рассмотрение ядро Пуассона [10, с. 14]

$$P(t, \alpha) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}, \quad \alpha>0; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Так как $g(\rho)\in L_1(0, \infty)$, то по теореме 1.1 из [10] (гл. 1)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t)\, e^{-r_1\sin\varepsilon|t|} e^{-irt} dt = \int\limits_0^{\infty} g(\rho) P(\rho-r, r_1\sin\varepsilon)\, d\rho$$

для любых $r_1>0$ и $r\in\mathbb{R}$ и, в частности, при $r_1=r>0$. Тогда функцию $S_\varepsilon(g)(r)$, определенную в (16), можно представить в виде

$$S_\varepsilon(g)(r) = g(r) - \int\limits_0^{\infty} g(\rho) P(\rho-r, \sin\varepsilon)\, d\rho + \int\limits_0^{\infty} (g(\rho)-g(\rho; h))\times$$

$$\times (P(\rho-r, \sin\varepsilon) - P(\rho-r, r\sin\varepsilon))\, d\rho + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_h(t)\,(e^{-\sin\varepsilon|t|}-e^{-r\sin\varepsilon|t|})\times$$

$$\times e^{-irt} dt. \tag{17}$$

Далее, так как $g(\rho)\in L_p(0, \infty)$, то согласно теореме 1.18 из [10] (гл. 1) имеем

$$\| g(r) - \int\limits_0^{\infty} g(\rho) P(\rho-r, \sin\varepsilon)\, d\rho \|_{L_p(0,\infty)} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0), \tag{18}$$

кроме того, из той же теоремы и первой оценки в (13) следует, что при всех $r\in[a, b]\subset(0, \infty)$

$$\Big|\int\limits_0^{\infty} (g(\rho)-g(\rho; h))\,(P(\rho-r, \sin\varepsilon) - P(\rho-r, r\sin\varepsilon))\, d\rho\Big| \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^{\infty} |g(\rho)-g(\rho; h)|\, P(\rho-r, \sin\varepsilon)\, d\rho \leqslant c\omega_p(h/2, g) \tag{19}$$

и, наконец, используя (14), при $r\in[a, b]\subset(0, \infty)$ получаем

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_h(t)\,(e^{-\sin\varepsilon|t|}-e^{-r\sin\varepsilon|t|})\, e^{-irt} dt\Big| \leqslant c\sin\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_h(t)\, t|\, e^{-\min(a,1)|t|\sin\varepsilon} dt \leqslant$$

$$\leqslant c(\sin\varepsilon)^{1/p'}\frac{1}{h}(\omega_1(h, g)+\omega_p(h, g)). \tag{20}$$

Из (17) — (20), полагая $h=(\sin\varepsilon)^{1/p'}$, получаем $\| S_\varepsilon(g)(r)\|_{L_p(a,b)}\to 0$, $\varepsilon\to 0$, а из этого факта, как уже отмечалось, вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что если $g(\rho)\in L_1(0, \infty)\cap L_p(0, \infty)$, $p\in(1, \infty)$, то из (15), (16) и теоремы 1.25 из [10] (гл. 1) следует, что $g(r_0) - g_\varepsilon(r_0)\to 0$, $\varepsilon\to 0$, для произвольного $r_0>0$, являющегося точкой Лебега функции $g(\rho)$ [10, с. 20]. В частности, тогда $g_\varepsilon(r)\to g(r)$, $\varepsilon\to 0$, для почти всех $r>0$.

1. *Конторович М. И., Лебедев Н. Н.* Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1938.— **8**, вып. 10-11.— С. 1192—1206.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л. : Наука, 1967.— 404 с.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы.— Киев: Наук. думка, 1985.— 280 с.
4. *Лебедев Н. Н.* О разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям мнимого значка и аргумента // Прикл. математика и механика.— 1949.— **13**, вып. 5.— С. 465—476.
5. *Ву Ким Туан, Якубович С. Б.* Интегральное преобразование Конторовича — Лебедева в новом классе функций // Докл. АН БССР.— 1985.— **29**, № 1.— С. 11—14.
6. *Zemanian A. H.* The Kontorovich — Lebedev transformation on distributions of compact support and its inversion // Math. Proc. Camdridge Phil. Soc. — 1975.— **77**, N 1. — P. 139—143.
7. *Pathak P. S., Pandey J. N.* The Kontorovich — Lebedev transformation of distributions // Math. Z.— 1979.— **165**, N 1.— P. 29—51.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т.— М. : Наука, 1974.— Т. 2.— 296 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.— М. : Наука, 1983.— 752 с.
10. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 336 с.
11. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1947.— 324 с.

Получено 09.08.90