УДК 517.91

Е. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Морд. ун-т, Саранск)

О методе сравнения и периодических решениях нелинейных систем

Методом сравнения получены условия существования периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Методом порівняння отримано умови існування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

1. Введение и постановка задачи. Результаты настоящей статьи получены методом, близким методу сравнения, развитым автором в нескольких работах, основные идеи которых содержатся в статьях [1, 2]. Уравнением сравнения здесь является дифференциальное уравнение, не имеющее T-периодических решений, за исключением состояния равновесия, которым является начало координат. Близость правых частей сравниваемых уравнений порождает существование однотипных решений. Именно таким методом были получены многочисленные результаты, относящиеся к асимптотическим свойствам решений (устойчивость, ограниченность, существование O-кривых и т. д.), авторами которых были А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов. В сущности такой же подход является главным и в анализе колебаний в нелинейных системах. В классических работах в качестве уравнения сравнения рассматривается уравнение первого приближения. Такой естественный подход в некоторых случаях порождает непреодолимые трудности, тогда как замена уравнения сравнения может сильно упростить задачу. Этот случай рассматривается в настоящей статье.

Рассмотрим уравнения

$$dx/dt = F(t, x) + f(t, x) \tag{1}$$

и

$$dy/dt = F_0(t, y), \tag{2}$$

где f, $F \in C(R \times R^n, R^n)$; $F(t+T, x) = F(t, x)$, $F_0(t+T, y) = F_0(t, y)$, $f(t+T, x) = f(t, x)$ при $-\infty < t < +\infty$ и x, $y \in R^n$, $T > 0$; $F_0 \in C^{(p,m)}(R \times R^n, R^n)$, $p \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $F_0(t, 0) \equiv 0$. Выясним, при каких условиях уравнение (1) в шаре $S_r = \{x \in R^n : \|x\| \leqslant r\}$ имеет T-периодическое решение, если $\|F(t, x) - F_0(t, x)\| \leqslant \delta(t) < \delta$ при $-\infty < t < +\infty$ и $x \in KS_r$, $KS_r = \left\{x : \frac{1}{K} x \in S_r\right\}$, $K \geqslant 1$.

В дальнейшем эту задачу будем решать в предположении, что

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leqslant K_0 \|x_1 - x_2\|$$

и

$$\|F_0(t, x_1) - F_0(t, x_2)\| \leqslant K_1 \|x_1 - x_2\|$$

при $-\infty < t < +\infty$, x_1; $x_2 \in KS_r$; K_1, $K_2 > 0$.

2. Существование периодических решений. Введем некоторые обозначения. Пусть C_T — банахово пространство всех непрерывных на множестве $(-\infty, +\infty)$ T-периодических n-мерных вектор-функций с супремум-нормой $\|\cdot\|_\infty$; $C_{T,r} = \{u \in C_T : \|u\|_\infty \leqslant r\}$; $C_{f,r} = \{f(\cdot, u(\cdot)) \in C_T : u \in C_{T,r}\}$, $r_0 = \sup \|f(t, u(t))\|$, где $0 \leqslant t \leqslant T$, $u \in C_{T,r}$; $y(t : t_0, y_0)$ — решение уравнения (2), $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$.

Лемма 1. *Пусть $m \geqslant 1$, $p \geqslant 0$, $\left\|\frac{\partial y(t : s, x_0)}{\partial x}\right\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}$, $K \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $x_0 \in S_r$ и*

$$\|F_{0_y}(t, \bar{x}_0) - F_{0_y}(t, \bar{x}_1)\| \leqslant l \|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\|,$$

где $-\infty < t < +\infty$, x_0, $x_1 \in KS_r$, $l > 0$.

Тогда

$$\left\|\frac{\partial y(t : t_0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(t : t_0, x_1)}{\partial x}\right\| \leqslant D_0 \|x_0 - x_1\|,$$

$$D_0 = \frac{K^2 l}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) e^{M_1(t-t_0)}, \quad M_1 = lr + D,$$

$D = \max\limits_{-\infty < t < +\infty} \|F_{0_y}(t, 0)\|$, *где* $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, x_1, $x_2 \in S_r$.

Доказательство. Из условий леммы 1 вытекает существование решений $y(t : t_0, x_0)$ при всех $0 \leqslant t_0 < t \leqslant T$. Кроме того [3],

$$\|y(t : t_0, x_0)\| \leqslant \left\|\frac{\partial y(t : t_0, x_0)}{\partial x}\right\| \|x_0\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\| \leqslant K \|x_0\|,$$

$$0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому $y(t : t_0, x_0) \in KS_r$, $x_0 \in S_r$ при $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$. Так как

$$\left\|\frac{\partial y(t : t_0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(t : t_0, x_1)}{\partial x}\right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \left\|\frac{\partial y(s : t_0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(s : t_0, x_1)}{\partial x}\right\| \times$$

$$\times \|F_{0_y}(s, y_0(s))\| ds + \int\limits_{t_0}^{t} \left\|\frac{\partial y(s : t_0, x_1)}{\partial x}\right\| \|F_{0_y}(s, y_1(s)) - F_{0_y}(s, y_0(s))\| ds,$$

где $y_0(s) = y(s : t_0, x_0)$, $y_1(s) = y(s : t_0, x_1)$ и

$$\|F_{0_y}(s, y_1(s)) - F_{0_y}(s, y_0(s))\| \leqslant l \|y(s : t_0, x_0) - y(s : t_0, x_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant lKe^{-\alpha(s-t_0)} \|x_0 - x_1\| \;[3], \quad \|F_{0_y}(s, y_0(s))\| \leqslant l \|x_0\| + \|F_{0_y}(s, 0)\| \leqslant$$

$$\leqslant lr + D = M_1, \quad D = \max_{-\infty < t < +\infty} \|F_{0_y}(t, 0)\|,$$

то

$$\left\| \frac{\partial y(t:t_0,x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(t:t_0,x_1)}{\partial x} \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t} lK^2 e^{-\alpha(s-t_0)} \| x_0 - x_1 \| \, ds +$$

$$+ M_1 \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\partial y(s:t_0,x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(s:t_0,x_1)}{\partial x} \right\| ds \leqslant \frac{lK^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \times$$

$$\times \| x_0 - x_1 \| + M_1 \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\partial y(s:t_0,x_0)}{\partial x} - \frac{\partial y(s:t_0,x_1)}{\partial x} \right\| ds.$$

Применив неравенство Гронуолла — Беллмана, получим утверждение леммы 1.

Замечание 1. Если в условии леммы 1

$$\left\| \frac{\partial y(t:t_0,x_0)}{\partial x} \right\| \leqslant K e^{\alpha(t-t_0)}, \quad x_0 \in R^n; \quad t \leqslant t_0,$$

то аналогичное утверждение справедливо при $t \leqslant t_0$ и $\forall x_0 \in R^n$.

Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = F(t,x) + \psi_u(t), \quad \psi_u \in C_{f,r}, \quad \psi_u(t) = f(t, u(t)), \quad u \in C_{T,r}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\left\| \frac{\partial y(t:t_0,x_0)}{\partial x} \right\| \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad x_0 \in S_r, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

$m \geqslant 1$, $p \geqslant 0$. *Тогда для решений уравнения* (3) *справедливо неравенство* $\| x(t:t_0,x_0) - x(t:t_0,x_1) \| \leqslant e^{K_0(t-t_0)} \| x_0 - x_1 \|$, *где* $x_0, x_1 \in S_r$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Так как

$$x(t:t_0,x_0) = y(t:t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial y(t:s,x(s))}{\partial x} \psi_u(s) \, ds,$$

то

$$\| x(t:t_0,x_0) \| \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)} r + \frac{Kr_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)} \left(Kr - \frac{Kr_0}{\alpha} \right) +$$

$$+ \frac{Kr_0}{\alpha} \leqslant Kr$$

при $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x_0 \in S_r$. Поэтому

$$x_0(t) = x(t:t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t} \psi_u(s) \, ds + x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_0(s)) \, ds,$$

$$x_1(t) = x(t:t_0,x_1) = \int_{t_0}^{t} \psi_u(s) \, ds + x_1 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_1(s)) \, ds.$$

Отсюда

$$\| x(t:t_0,x_0) - x(t:t_0,x_1) \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + K_0 \int_{t_0}^{t} \| x_0(s) - x_1(s) \| \, ds.$$

Применив неравенство Гронуолла — Беллмана, получим требуемое неравенство.

Теорема 1. *Предположим, что уравнение* (2) *является автономным:* $F_0(t,y) = F_0(y)$, $m \geqslant 1$. *Пусть неравенство* $\left\| \dfrac{\partial y(t:t_0,y_0)}{\partial y_0} \right\| \leqslant$

$\leqslant Ke^{\alpha(t-t_0)}$, $\alpha>0$, *выполняется при всех* $y_0\in R^n$ *и* $t\leqslant t_0$. *Тогда если* $\|F_{0_y}(x_1)-F_{0_y}(x_2)\|\leqslant l\|x_1-x_2\|$ *при всех* $x_1, x_2\in R^n$, $l>0$ *и*

$$\frac{K}{\alpha}(r_0+\delta)\leqslant r, \tag{4}$$

то уравнение (1) *в* S_r *имеет хотя бы одно* T*-периодическое решение.*

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$dx/dt=F_0(x)+f(t,x)+(F(t,x)-F_0(x))$$

и рассмотрим оператор

$$Lx=\int\limits_t^{+\infty}\frac{\partial y(t:s,x(s))}{\partial x}[f(s,x(s))+(F(s,x(s))-F_0(x(s)))]\,ds,$$

где $x\in C_{T,r}$. Так как

$$\|Lx\|_\infty\leqslant Ke^{\alpha t}\int\limits_t^{+\infty}e^{-\alpha s}(r_0+\delta)\,ds=\frac{K}{\alpha}(r_0+\delta),$$

то на основании условия (4) $L:S_r\to S_r$. Кроме того, из леммы 1 (замечание 1) вытекает непрерывность этого оператора. Докажем равностепенную непрерывность L в $C_{T,r}$. Так как для любых $t_1<t_2$ и любой вектор-функции $x\in C_{T,r}$

$$(Lx)(t_1)-(Lx)(t_2)=\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\partial y(t_1:s,x(s))}{\partial x}\varphi(s,x(s))\,ds-\int\limits_{t_2}^{+\infty}\frac{\partial y(t_2:s,x(s))}{\partial x}\times$$
$$\times\varphi(s,x(s))\,ds=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial y(t_1:s,x(s))}{\partial x}\varphi(s,x(s))\,ds+\int\limits_{t_2}^{+\infty}\left[\frac{\partial y(t_1:s,x(s))}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial y(t_2:s,x(s))}{\partial x}\right]\varphi(s,x(s))\,ds,$$

где $\varphi(s,x(s))=f(s,x(s))+(F(s,x(s))-F_0(x(s)))$, то

$$\|(Lx)(t_1)-(Lx)(t_2)\|_\infty\leqslant|t_1-t_2|M_1+|t_1-t_2|\int\limits_{t_1}^{+\infty}\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y(\xi:s,x(s))}{\partial x}\right)\right\|\times$$
$$\times\|\varphi(s,x(s))\|\,ds\leqslant|t_1-t_2|M_1+|t_1-t_2|\int\limits_{t_2}^{+\infty}\|F_{0_y}(y(\xi:s,x(s)))\|\times$$
$$\times\left\|\frac{\partial y(\xi:s,x(s))}{\partial x}\right\|\|\varphi(s,x(s))\|\,ds\leqslant|t_1-t_2|M_1+|t_1-t_2|M_2\times$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{+\infty}\left\|\frac{\partial y(\xi:s,x(s))}{\partial x}\right\|ds\leqslant M_1|t_1-t_2|+\frac{M_2K}{\alpha}|t_1-t_2|,\quad t_1\leqslant\xi\leqslant t_2. \tag{5}$$

Неравенства (5) получены следующим образом. Так как $F_0\in C^{(1)}(R^n,R^n)$, то справедлива теорема о среднем:

$$\left\|\frac{\partial y(t_1:s,x(s))}{\partial x}-\frac{\partial y(t_2:s,x(s))}{\partial x}\right\|=|t_1-t_2|\left|\frac{d}{dt}\frac{\partial y(\xi:s,x(s))}{бx}\right|,$$

$t_1 \leqslant \xi \leqslant t_2$. Кроме того [3],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y(\xi : s, x(s))}{\partial x} = F_{0_y}(y(\xi : s, x(s))) \frac{\partial y(\xi : s, x(s))}{\partial x}.$$

Тогда, используя условие $\left\| \frac{\partial y(\xi : s, x(s))}{\partial x} \right\| \leqslant K e^{\alpha(\xi - s)}$, $\xi \leqslant s$, получаем неравенства (5), где M_1 и M_2 — положительные постоянные. Из неравенств (5) вытекает равностепенная непрерывность оператора L в $C_{T,r}$. Следовательно, для L выполняются все условия принципа Шаудера о неподвижной точке. Поэтому существует $x \in C_{T,r}$ и

$$Lx = x. \tag{6}$$

Из равенства (6) вытекает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $m \geqslant 1$, $p \geqslant 0$, $\left\| \frac{\partial y(t : s, x_0)}{\partial x} \right\| \leqslant K e^{-\alpha(t-s)}$, $\alpha > 0$, $x_0 \in S_r$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. *Тогда если* $r \geqslant \frac{K}{\alpha}(r_0 + \delta)$, $K e^{-\alpha T} \leqslant 1$, *то уравнение* (3) *при любом* $u \in C_{T,r}$ *имеет в* S_r *T-периодическое решение.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$Lx_0 \equiv x(T:0, x_0) = y(T:0, x_0) + \int_0^T \frac{\partial y(T : s, x_0(s))}{\partial x} [\psi_u(s) + (F(s, x_0(s)) - $$
$$- F_0(s, x_0(s)))]\, ds,$$

где $x_0 \in S_r$, $x_0(s) = \boldsymbol{x}(s : 0, x_0)$. Тогда из условий теоремы 1 и леммы 2 получим $\| x(T : 0, x_0) \| \leqslant r$. Отсюда $L : S_r \to S_r$. Так же из леммы 2 вытекает непрерывность этого оператора. Поэтому существует неподвижная точка $Lx = x$, которой соответствует T-периодическое решение [4, с. 210; 5].

Теорема 3. *Пусть выполняются условия лемм* 1, 2, *теоремы* 2 *и*

$$q = K e^{-\alpha T} + D_0 (r_0 + \delta) T + \frac{K(K_1 + K_0)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) < 1.$$

Тогда уравнение (3) *имеет при каждой вектор-функции* $u \in C_{T,r}$ *в* S_r *единственное T-периодическое решение.*

Доказательство. Так как

$$x_0 - x_1 = y(T:0, x_0) - y(T:0, x_1) + \int_0^T \left[\frac{\partial y(T : s, x_0(s))}{\partial x} \varphi(s, x_0(s)) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial y(T : s, x_1(s))}{\partial x} \varphi(s, x_1(s)) \right] ds = y(T:0, x_0) - y(T:0, x_1) +$$
$$+ \int_0^T \left[\frac{\partial y(T : s, x_0(s))}{\partial x} - \frac{\partial y(T : s, x_1(s))}{\partial x} \right] \varphi(s, x_0(s))\, ds +$$
$$+ \int_0^T \frac{\partial y(T : s, x_1(s))}{\partial x} [\varphi(s, x_0(s)) - \varphi(s, x_1(s))]\, ds,$$

где $\varphi(s, x_0(s)) = \psi_u(s) + (F(s, x_0(s)) - F_0(s, x_0(s)))$, то

$$\| x_0 - x_1 \| \leqslant K e^{-\alpha T} \| x_0 - x_1 \| + D_0 (r_0 + \delta) T \| x_0 - x_1 \| +$$
$$+ \frac{K(K_1 + K_0)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) \| x_0 - x_1 \| = q \| x_0 - x_1 \|.$$

Здесь $t_0 = 0$, $t = T$. Отсюда следует $x_0 = x_1$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда уравнение* (1) *в* S *имеет хотя бы одно* T*-периодическое решение.*

Доказательство. Определим на множестве $C_{T,r}$ оператор L_0 следующим образом. Каждой функции $u \in C_{T,r}$ поставим в соответствие функцию $x \in C_{T,r}$ такую, которая является единственным T-периодическим решением уравнения (3). Тем самым $L_0 : C_{T,r} \to C_{T,r}$. Пусть $u_n \to u_0$, $u_n \in C_{T,r}$. Тогда

$$\| L_0 u_n - L_0 u_0 \| \leqslant \int_0^t \left\| \frac{\partial y (t : s, x_n (s))}{\partial x} \right\| \| \psi_{u_n} (s) - \psi_{u_0} (s) \| ds + q \| L_0 u_n - L_0 u_0 \|,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому

$$\| L_0 u_n - L_0 u_0 \| \leqslant \frac{K_0}{1 - q} \| \psi_{u_n} - \psi_{u_0} \|, \quad K_0 > 0.$$

Отсюда следует непрерывность оператора L_0 в $C_{T,r}$.

Пусть $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T, x \in S_r} \| F (t, x) + \psi_u (t) \| = c_1$. Тогда $\left\| \frac{dx}{dt} \right\| \leqslant c_1$. Поэтому оператор L_0 равностепенно непрерывен на множестве $C_{T,r}$. Следовательно, он имеет неподвижную точку: $L_0 x = x$. Это означает, что уравнение (1) имеет хотя бы одно T-периодическое решение.

Замечание 2. В теореме 1 неравенство $\left\| \frac{\partial y (t : t_0, y_0)}{\partial y_0} \right\| \leqslant K e^{\alpha (t - t_0)}$ может выполняться при $t \geqslant t_0$, $\alpha < 0$ и любых $y_0 \in R^n$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$. Доказательство теоремы 1 в этом случае проводится по той же схеме, лишь оператор L здесь имеет вид

$$Lx = \int_{-\infty}^t \frac{\partial y (t : s, x (s))}{\partial x} [\psi_u (s) + (F (s, x (s)) - F_0 (x (s)))] \, ds.$$

1. *Воскресенский Е. В.* Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, вып. 5.— С. 249—250.
2. *Воскресенский Е. В.* Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением // Comment. math. Univ. carol.— 1983.— **24**, N 1.— P. 31—50.
3. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.— 1961.— **2**.— С. 28—36.
4. *Красносельский М. А.* Векторные поля на плоскости.— М. : Физматгиз, 1963.— 245 с.
5. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.

Получено 15.10.90