УДК 517.9

Я. С. БАРИС, канд. физ.-мат. наук (Гомел. ун-т),
О. Б. ЛЫКОВА, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. III

Показано, как с помощью приближенных интегральных многообразий решать задачу о сведении в теории устойчивости в неособом критическом случае. Получено обобщение первой основной теоремы Ляпунова — Малкина о критических случаях.

Показано, як за допомогою наближених інтегральних многовидів розв'язувати задачу про зведення в теорії стійкості в неособливому критичному випадку. Одержано узагальнення першої основної теореми Ляпунова — Малкіна про критичні випадки.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x + B(t)y + g(t, x, y), \quad dy/dt = C(t)y + h(t, x, y), \qquad (1)$$

в которой матричные функции A, B, C непрерывны на интервале $I \supset [0, \infty)$, а вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ непрерывны на множестве $I \times \mathbb{R}^m \times V$, где V — некоторая область из пространства $\mathbb{R}^n$, содержащая замкнутый шар V_ρ радиуса ρ с центром в нуле.

Приведем следующее определение [1].

Определение. *Будем говорить, что для системы* (1) *имеет место критический случай, если существуют такие постоянные* N, K, ν, $0 \leqslant \chi < \nu$, *что нормированные при* $t = s$, $s \in I$, *фундаментальные матрицы* $X(t, s)$, $Y(t, s)$ *уравнений* $dx/dt = A(t)x$, $dy/dt = C(t)y$ *подчинены оценкам*

$$\|X(t, s)\| \leqslant Ke^{\chi|t-s|}, \quad \|Y(t, s)\| \leqslant Ne^{-\nu(t-s)}, \quad t \geqslant s.$$

В [1] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *имеет место критический случай и выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функции* $f = B(t)y + g$, h *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, x, y)\| \leqslant \Lambda_1 \|\bar{x} - x\| + \Lambda \|\bar{y} - y\|,$$

$$\|h(t, \bar{x}, \bar{y}) - h(t, x, y)\| \leqslant \mathcal{L}_1 \|\bar{x} - x\| + \mathcal{L} \|\bar{y} - y\|,$$

$$\|h(t, x, 0)\| \leqslant N_0$$

(Λ_1, Λ, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}$ — *постоянные, причем* $\Lambda > 0$);

2) *справедливы неравенства* $(\mathcal{L}\rho + N_0)N \leqslant \rho\nu$; $\nu - \chi - K\Lambda_1 - KN\mathcal{L} > 2K\sqrt{N\mathcal{L}_1\Lambda}$;

3) *система* (1) *имеет нулевое решение.*

Тогда система (1) *имеет* (ρ, η)-*многообразие*

$$M = \{(t, x, y) : y = \varphi^*(t, x), \ t \in I, \ x \in \mathbb{R}^m\},$$

содержащее график нулевого решения $\varphi^*(t, 0) \equiv 0$, $t \in I$.

Теорема 2 (принцип сведения). *Предположим, что система* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Нулевое решение этой системы (асимптотически) устойчиво тогда и только тогда, когда (асимптотически) устойчиво нулевое решение уравнения*

$$dx/dt = A(t)x + B(t)\varphi^*(t, x) + g(t, x, \varphi^*(t, x)), \qquad (2)$$

где $\varphi^*(t, x)$ — *вектор-функция, задающая* (ρ, η)-*многообразие системы* (1).

Однако далеко не всегда удается точно найти интегральное многообразие (ИМ). Поэтому целесообразно выделить случаи, когда вместо интегрального многообразия можно рассматривать приближенное ИМ [2—4].

Итак, предположим, что известно приближенное ИМ системы (1):

$$M_{\text{пр.}} : y = \Phi(t, x),$$

невязка которого (0, b) является функцией x порядка выше p, т. е. $\| b(t, x) \| = o(\| x \|^p)$, $x \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$. Рассмотрим на этом приближенном ИМ первое уравнение системы (1):

$$dx/dt = A(t)\, x + B(t)\, \Phi(t, x) + g(t, x, \Phi(t, x)). \tag{3}$$

Пусть имеет место критический случай. Пусть также нулевое решение уравнения (3) (асимптотически) устойчиво или неустойчиво тогда и только тогда, когда (асимптотически) устойчиво или неустойчиво нулевое решение уравнения

$$dx/dt = A(t)\, x + B(t)\, \Phi(t, x) + g(t, x))\, \Phi(t, x) + \tilde{g}(t, x), \tag{4}$$

где $\tilde{g}$ — произвольная непрерывная функция, имеющая порядок по x выше p и тождественно равная нулю при $x = 0$. Тогда будем говорить, что задача об устойчивости нулевого решения уравнения (3) решается независимо от членов порядка выше p и имеет место неособый критический случай [5].

В неособом критическом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия теоремы* 2, *а невязка* (0, b) *приближенного ИМ* $M_{\text{пр.}}$ *имеет по* x *порядок выше* p.

Тогда нулевое решение системы (1) (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво, если* (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво нулевое решение уравнения* (3) *вне зависимости от членов порядка выше* p.

Доказательство. В силу теоремы 2 задача об устойчивости для системы (1) эквивалентна задаче об устойчивости для уравнения (2), в котором вектор-функция $\varphi^*(t, x)$ задает (ρ, η)-многообразие системы (1). Следовательно, достаточно показать, что при выполнении условий теоремы 2 задачи об устойчивости для уравнений (2) и (3) эквивалентны. Для доказательства этого заметим, что согласно [2, с. 56] разность $\varphi^*(t, x) - \Phi(t, x)$ является функцией x порядка выше p. Учитывая, что вектор-функция $g(t, x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, заключаем, что разность $g(t, x, \varphi^*) - g(t, x, \Phi)$ также является функцией x порядка выше p. Поэтому уравнение (2) можно представить в виде (4), где $\tilde{g} = g(t, x, \varphi^*) - g(t, x, \Phi)$ — функция x порядка выше p. Отсюда в силу условий теоремы вытекает, что задачи об устойчивости для уравнений (2) и (3) эквивалентны. Теорема доказана.

2. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dz/dt = Az + F(z), \tag{5}$$

где z — $(n-1)$-вектор, A — постоянная матрица, $F(z)$-непрерывная в окрестности $z = 0$ функция, удовлетворяющая условию Липшица $\| F(\bar{z}) - F(z) \| \leqslant \mathcal{L} \| \bar{z} - z \|$, в котором $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\| z \|, \| \bar{z} \| \to 0$ при $\| z \| \to 0$, $\| \bar{z} \| \to \to 0$. Предполагается также, что характеристическое уравнение $\det [A - \lambda E] = 0$ имеет один нулевой корень, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Исследуем устойчивость нулевого решения уравнения (5). С этой целью введем замену $z = Q \operatorname{colon}(x, y)$ и выберем матрицу Q так, чтобы $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}[0, C]$. Тогда получим систему вида

$$dx/dt = g(x, y), \quad dy/dt = Cy + h(x, y). \tag{6}$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему

$$dx/dt = \hat{g}(x, y), \quad dy/dt = Cy + \hat{h}(x, y), \tag{7}$$

где

$$\hat{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & |x| < r_0, \quad \| y \| \leqslant \rho_0; \\ g\left(\dfrac{x}{|x|} r, y\right), & |x| \geqslant r_0, \quad \| y \| \leqslant \rho_0 \end{cases}$$

($\hat{h}(x, y)$ определяется аналогично), $r_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ — постоянные.

Достаточно решить задачу об устойчивости для системы (7). Рассмотрим вначале случай, когда плоскость $y = 0$ является интегральным многообразием системы (7) и, следовательно, $\hat{h}(x, 0) = 0$. Нетрудно показать, что при достаточно малых постоянных r_0, ρ_0 система (7) удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет нулевое решение. Следовательно, согласно теореме 2 в рассматриваемом случае задача об устойчивости для системы (7) эквивалентна задаче об устойчивости для уравнения

$$dx/dt = \hat{g}(x, 0). \tag{8}$$

Для решения последней задачи предположим, что

$$g(x, 0) = ax^m + o(x^m), \quad x \to 0, \quad a \neq 0. \tag{9}$$

Согласно [5] нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво, если m — нечетное число и $a < 0$, и неустойчиво, если m — четное число или $a > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость $y=0$ не является интегральным многообразием системы (7). Тогда естественно принять эту плоскость в качестве приближенного ИМ данной системы. Чтобы определить его невязку $(0, \hat{b})$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{g}(x, \Phi) = C\Phi + \hat{h}(x, \Phi) + \hat{b}, \tag{10}$$

решение которого $\Phi(x)$ является приближенным ИМ системы (7). Полагая в нем $\Phi=0$, получаем $\hat{b} = -\hat{h}(x, 0)$. Предположим теперь, что справедливо представление (9), а невязка $(0, -\hat{h}(x, 0))$ имеет порядок выше $p \geqslant m$. Тогда, как показано выше, задача об устойчивости для уравнения (8) решается вне зависимости от членов порядка выше m, а следовательно, вне зависимости от членов порядка выше p. Значит, согласно теореме 2 задача об устойчивости для системы (7) сводится к задаче об устойчивости для уравнения (8).

Рассмотрим, наконец, случай, когда выполняются все условия, указанные в предыдущем случае, кроме неравенства $p \geqslant m$. Пусть $p < m$. Для построения приближенного ИМ приравняем нулю правую часть второго уравнения системы (7):

$$Cy + \hat{h}(x, y) = 0. \tag{11}$$

Согласно теореме о неявных функциях это уравнение имеет решение в некоторой окрестности точки $x = 0$. График этого решения является приближенным ИМ системы (7). Чтобы определить соответствующую невязку $(0, b)$, рассмотрим уравнение (10). Так как $y = \Phi(x)$ — решение уравнения (11), то из уравнения (10) получаем

$$\hat{b} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{g}(x, \Phi). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (7) на приближенном ИМ $M_{\text{пр.}}: y = \Phi(x)$:

$$dx/dt = \hat{g}(x, \Phi(x)). \tag{13}$$

Если $\hat{g}(x, \Phi(x)) \equiv 0$, то $M_{\text{пр.}}$ является интегральным многообразием системы (7), так как согласно (8) $\hat{b} = 0$. В этом случае согласно теореме 2 нулевое решение системы (7) устойчиво, но не асимптотически. Рассмотрим случай, когда $\hat{g}(x, \Phi) \neq 0$. Пусть эта функция при $\| x \| < r$ представима в виде $\hat{g}(x, \Phi) = ax^m + o(x^m)$, $x \to 0$, $a \neq 0$. Согласно изложенному выше, при этих предположениях задача об устойчивости для уравнения (13) решается независимо от членов порядка выше m. Согласно (12) невязка рассматриваемого приближенного ИМ имеет порядок выше m. Поэтому из теоремы 3 вытекает, что задача об устойчивости для системы (7) сводится к задаче об устойчивости для уравнения (13).

3. Применение приближенных ИМ в теории устойчивости позволяет доказать основные теоремы Ляпунова — Малкина о критических случаях при менее жестких ограничениях, упростить доказательства этих теорем и проиллюстрировать тем самым целесообразность использования приближенных ИМ [6]. Покажем это на примере первой основной теоремы Ляпунова — Малкина [7].

В этой теореме рассматривается система вида (1), при этом предполагается, что вектор-функция $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ разлагаются в ряды по степеням x, y, сходящиеся в области $t \geqslant 0$, $\| x \| \leqslant H$, $\| y \| \leqslant H$ и начинающиеся членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений, а также матрицы A, B, C — ограниченные и непрерывные функции t. Кроме того, матрица C такова, что для линейного уравнения

$$dy/dt = C(t)\, y \tag{14}$$

выполняется один из критериев устойчивости по первому приближению [7]. Наряду с системой (1) рассмотрим укороченное уравнение

$$dx/dt = A(t)\, x + g(t, x, 0). \tag{15}$$

В [7] доказана следующая теорема,

Теорема 4. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются указанные выше условия и, кроме того, нулевое решение уравнения* (15) (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше* N. *Тогда если разложение вектор-функции* $g(t, x, 0)$ *начинается с членов порядка не ниже* $N+1$, *то и нулевое решение системы* (1) *соответственно* (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво.*

Применив приближенные ИМ, получим обобщение теоремы 4.

Итак, предположим, что система (1) имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$, а в качестве приближенного ИМ системы (1) возьмем плоскость $y = 0$. Известно [2], что если вектор-функция $\Phi(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}[A(t)\, x + B(t)\, \Phi + g(t, x, \Phi)] = C(t)\, \Phi + h(t, x, \Phi) + b,$$

то она представляет приближенное ИМ с невязкой $(0, b)$ системы (1). Так как $\Phi \equiv 0$, то $b = -h(t, x, 0)$. На этом приближенном ИМ исходная система уравнений (1) сводится к рассмотрению уравнения, которое совпадает с укороченным уравнением (15).

После сделанных предварительных замечаний сформулируем обобщение первой основной теоремы Ляпунова — Малкина о критических случаях.

Теорема 5. *Пусть для системы* (1) *имеет место критический случай и выполняются следующие условия*:

1) *условия* 2, 3 *теоремы* 1;

2) *сужения вектор-функций* $f = B(t)\, y + g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ *на множество* $I_+ \times U_r \times V_\rho$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\| f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, x, y) \| \leqslant l_1 \| \bar{x} - x \| + l^* \| \bar{y} - y \|,$$

$$\| h(t, \bar{x}, \bar{y}) - h(t, x, y) \| \leqslant \mathscr{L}_1 \| \bar{x} - x \| + \mathscr{L}_2 \| \bar{y} - y \|,$$

$$\| h(t, x, 0) \| \leqslant N,$$

где шары U_r, V_ρ *с центром в нуле имеют достаточно малые радиусы* $r > 0$, $\rho > 0$; l^* — *положительная постоянная*, $(l_1, \mathscr{L}_1\, \mathscr{L}_2) \to 0$ *при* $r \to 0$, $\rho \to 0$;

3) *невязка приближенного ИМ* $y = 0$ *имеет порядок выше* p, *т. е.* $\| h(t, x, 0) \| = o(\| x \|^p)$, $x \to 0$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$.

Тогда если нулевое решение укороченного уравнения (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше* p, *то* *нулевое решение $x = 0$, $y = 0$ системы* (1) *также соответственно* (*асимптотически*) *устойчиво или неустойчиво.*

Доказательство. Эту теорему достаточно доказать для соответствующей расширенной системы

$$dx/dt = A(t)x + \hat{f}(t, x, y), \qquad dy/dt = C(t)y + \hat{h}(t, x, y), \tag{16}$$

где вектор-функции $\hat{f}(t, x, y) = B(t)y + \hat{g}(t, x, y)$, $\hat{h}(t, x, y)$ определены так же, как в (7). Для вычисления невязки приближенного ИМ $y = 0$ системы (16) запишем уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}[A(t)x + \hat{f}(t, x, \Phi)] = C(t)\Phi + \hat{h}(t, x, \Phi) + \hat{b}.$$

Полагая в этом уравнении $\Phi \equiv 0$, получаем $\hat{b} = -\hat{h}(t, x, 0)$. Отсюда и из условия 3 вытекает, что и искомая невязка имеет порядок выше p. Остается показать, что при достаточно малом $r > 0$ выполняется условие 2 теоремы 1. Первое из неравенств этого условия можно представить в виде

$$\rho(\nu - \mathscr{L}_2(r, \rho)N) > N_0(r)N.$$

Определим $\rho(r)$ так, чтобы $\rho(r) \to 0$ при $r \to 0$. Так как $N_0(r) \to 0$, $\mathscr{L}_2(r, \rho(r)) \to 0$ при $r \to 0$, то существует такое $r_1 > 0$, что при каждом $r \in (0, r_1]$ выполняется условие 2 теоремы 1.

Итак, при выполнении условий теоремы 5 относительно системы (1) выполняются все условия теоремы 2 относительно системы (16). Следовательно, задача об устойчивости для системы (1) сводится к задаче об устойчивости для уравнения (15). Теорема доказана.

Пример. Пусть дана система

$$dx/dt = 2y - x^3, \quad dy/dt = -2y + xy + x^4. \tag{17}$$

Характеристическое уравнение матрицы линейного приближения имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. В качестве приближенного ИМ возьмем плоскость $y = 0$. На этом многообразии система (17) сводится к уравнению $dx/dt = -x^3$. Нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво вне зависимости от членов порядка выше $p = 3$. Чтобы определить невязку $(0, b)$ приближенного ИМ $y = 0$, запишем уравнение

$$\partial\Phi/\partial x\,(2\Phi - x^3) = -2\Phi + x\Phi + x^4 + b,$$

решение которого $\Phi(x)$ является приближенным ИМ системы (17). Полагая $\Phi = 0$, получаем соответствующую невязку $b = -x^4$, порядок которой выше $p = 3$. Легко видеть, что выполнены все условия теоремы 5, согласно которой нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво.

4. Представляет интерес получить обобщение основной теоремы 3 для системы общего вида

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(t)x + B(t)y + g(t, x, y), \\ dy/dt &= C(t)y + D(t)x + h(t, x, y), \end{aligned} \tag{18}$$

в которой матричные функции A, B, C, D непрерывны на интервале $I \supset [0, \infty)$, а вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ непрерывны на множестве $I \times \mathbb{R}^m \times V$, где V — некоторая область из $\mathbb{R}^n$, содержащая замкнутый шар V_ρ радиуса ρ с центром в нуле. Пусть требуется решить задачу об устойчивости нулевого решения системы (18). Для этого запишем соответствующую систему линейного приближения

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(t)x + B(t)y, \\ dy/dt &= C(t)y + D(t)x. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть удалось построить аффинное ИМ $y = Q(t)x$ этой системы. Как известно [8], для этого достаточно найти ограниченное решение матричного уравнения Риккати

$$dQ/dt + QA(t) + QB(t)Q = C(t)Q + D(t).$$

Тогда, введя в (18) замену $y = Q(t)x + z$, получим систему

$$dx/dt = [A(t) + B(t)Q(t)]x + B(t)z + g(t, x, Q(t)x + z),$$
$$dz/dt = [C(t) - Q(t)B(t)]z + H(t, x, z), \qquad (20)$$

где

$$H(t, x, z) = h(t, x, Q(t)x + z) - Q(t)g(t, x, Q(t)x + z).$$

Эта система отличается от системы (1) только обозначениями.

Из приведенных рассуждений и теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть система* (18) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *вектор-функции* $f = B(t)y + g$, $s = D(t)x + h$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, x, y)\| \leqslant l_1\|\bar{x} - x\| + l^*\|\bar{y} - y\|,$$
$$\|s(t, \bar{x}, \bar{y}) - s(t, x, y)\| \leqslant \mathscr{L}_1\|\bar{x} - x\| + \mathscr{L}_2\|\bar{y} - y\|;$$

2) *система линейного приближения* (19) *имеет аффинное ИМ:* $y = Q(t)x$;

3) *фундаментальные матрицы*

$$X(t, s) = X(t)X^{-1}(s), \quad Y(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$$

уравнений

$$dx/dt = (A + BQ)x, \quad dy/dt = (C - QB)y$$

подчинены оценкам

$$\|X(t, s)\| \leqslant Ke^{\chi|t-s|}, \quad \|Y(t, s)\| \leqslant Ne^{-\nu(t-s)}, \qquad t \geqslant s,$$

где постоянные $K \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, $\nu > 0$, $0 \leqslant \chi < \nu$;

4) *невязка приближенного ИМ* $y = Q(t)x$ *имеет порядок выше* p, *т. е.*

$$\|H(t, x, 0)\| = \|h(t, x, Qx) - Qg(t, x, Qx)\| = o(\|x\|^p), \qquad x \to 0.$$

Тогда нулевое решение системы (18) *(асимптотически) устойчиво или неустойчиво, если нулевое решение уравнения*

$$dx/dt = (A + BQ)x + f(t, x, Qx)$$

(асимптотически) устойчиво или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше p.

1. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. II // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 10.— С. 1315—1321.
2. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия в теории устойчивости.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.48).
3. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 4.— С. 411—418.
4. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. III // Там же.— 1989.— 41, № 8.— С. 1033—1041.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: Наука, 1950.— 383 с.
6. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Применение приближенных интегральных многообразий в теории устойчивости.— Киев, 1988.— 46 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.1)
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
8. *Барис Я. С.* Аффинные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений.— Гомель: Гомел. ун-т, 1981.— 36 с.

Получено 29.12.90