УДК 517.8

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР, Харьков),
В. Ф. ЛИСЯНОЙ, канд. физ.-мат. наук (Харьк. автомоб.-дор. ин-т)

# Формальная классификация векторных полей с грубыми особенностями в окрестности окружности

Изучается вопрос формальной классификации систем дифференциальных уравнений вида (1) в случае наличия двух грубых особых точек у функции $a(\alpha)$. Построены инварианты таких полей в нерезонансном случае. В терминах этих инвариантов указаны условия эквивалентности системы линейной и автономной.

Вивчається питання формальної класифікації систем диференціальних рівнянь вигляду (1) у випадку наявності двох грубих особливих точок у функції $a(\alpha)$. Побудовані інваріанти таких полів у нерезонансному випадку. В термінах цих інваріантів вказані умови еквівалентності системи лінійної та автономної.

1. В настоящей статье рассматривается задача формальной классификации систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = a(\alpha), \\ \dot{x} = A(\alpha)x + f(\alpha, x), \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha \in S^1$ — угловой параметр окружности, $x \in \mathbb{R}^n$ — формальная переменная, $f(\alpha, x) = \sum_{|I| \geqslant 2} f_I(\alpha) x^I$ — формальный ряд, коэффициенты $f_I(\alpha)$ которого являются векторами-функциями на окружности класса $C^\infty$, относительно обычной группы преобразований.

В работе [1] построена инвариантная нормальная форма систем (1) в невырожденном случае, т. е. когда $a(\alpha) \neq 0$. Коэффициенты этой нормальной формы образуют полный набор инвариантов системы (1). Теперь мы допускаем обращение в нуль функции $a(\alpha)$. При этом рассматривается случай, когда поле на окружности имеет две грубые особые точки. В [2] построены инварианты таких полей и их линейных расширений. Основной результат настоящей работы состоит в построении набора инвариантов произвольных формальных систем в нерезонансном случае. В терминах этих инвариантов формулируются ответы на вопросы, связанные с изучением систем вида (1): эквивалентность, линеаризация, приведение к автономной и т. д.

2. Рассмотрим группу $G$ преобразований вида $(H(\alpha), \Phi(\alpha, x))$. Здесь $H : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию $C^\infty$-диффеоморфизм окружности, а

$$\Phi(\alpha, x) = T(\alpha)x + \sum_{|I| \geqslant 2} \Phi_I(\alpha) x^I$$

— формальное обратимое отображение с $C^\infty$-коэффициентами. Обратимость сводится к условию $\det T(\alpha) \neq 0$.

Две системы вида (1) называем эквивалентными, если одна переходит в другую под действием преобразований из группы $G$.

Как и в [2], классификация систем (1) основана на склейке из простейших систем на прямой. Поэтому начнем рассмотрение с изучения формальных векторных полей в окрестности прямой с одной грубой особенностью.

3. Рассмотрим на прямой формальную систему, аналогичную системе (1):

$$\begin{cases} \dot{z} = b(z), \quad z \in \mathbb{R}^1, \\ \dot{x} = A(z)x + \sum_{|I| \geqslant 2} f_I(z) x^I. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагаем, что начало координат является единственным нулем функции $b(z)$ и этот нуль невырожден: $b(0) = 0$, $\lambda = b'(0) \neq 0$. Пусть, кроме того, векторное поле $b(z)$ имеет $C^\infty$-поток на всей прямой. Это эквивалентно расходимости интегралов

$$\int^{\infty} \frac{dz}{b(z)}, \qquad \int_{-\infty} \frac{dz}{b(z)}.$$

Пусть, далее, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — собственные значения оператора $A(0)$. Предполагаем выполнение нерезонансного условия

$$\mu_i \neq \sum_{j=1}^{n} I_j \mu_j, \quad I_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum I_j \geqslant 2.$$

В этих условиях справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Система* (2) *некоторым обратимым формальным по $x$ преобразованием*

$$(z, x) \to (g(z), \Phi(z, x))$$

*приводится к нормальной форме*

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda z, \\ \dot{x} = A(0)\, x. \end{cases}$$

В самом деле, так как поле $b$ имеет глобальный поток, то существует $C^\infty$-преобразование $z \to g(z)$, которое приводит уравнение $\dot{z} = b(z)$ к линейной нормальной форме $\dot{z} = \lambda z$. Поэтому можно сразу считать, что $b(z) = \lambda z$. Дальнейшая нормализация сводится к нахождению коэффициентов ряда

$$\Phi(z, x) = T(z)\, x + \sum_{|I| \geqslant 2} \Phi_I(z)\, x^I.$$

Для его линейной части имеем уравнение

$$\lambda z T'(z) = A(z)\, T(z) - T(z)\, A(0) \tag{3}$$

при дополнительном условии $\det T(z) \neq 0$. Будем искать матрицу $T$ с условием $T(0) = I$. Тем самым $T(z) = I + t(z)$, $t(0) = 0$. Тогда для $C^\infty$-матрицы-функции $t(z)$ получаем уравнение

$$\lambda z t'(z) = h(z)\, t(z) - t(z)\, A(0) + h(z),$$

где $h(z) = A(z) - A(0)$. Это уравнение имеет локальное в окрестности начала координат $C^\infty$-решение $t(z)$, $t(0) = 0$. Тем самым матрица-функция $T(z) = I + t(z)$ является локальным невырожденным решением уравнения (3). Обычное продолжение этой матрицы-функции на всю ось в силу уравнения (3) сохраняет невырожденность. Далее можем считать, что в системе (2) $A(z) = \mathrm{const} = A(0)$, а преобразование $\Phi(z, x)$ имеет тождественную линейную часть. Теперь нахождение коэффициентов нелинейной части нормализующего преобразования сводится к разрешимости рекуррентного набора уравнений

$$\lambda z \Phi_I'(z) = L_I \Phi_I(z) + \gamma_I(z), \quad I \in \mathbb{Z}_+^n,$$

с известным свободным членом $\gamma_I(z)$ и оператором $L_I$, собственные числа которого равны $\mu_i - \sum_{j=1}^{n} I_j \mu_j$. В силу отсутствия резонансов оператор $L_I$ невырожден для каждого мультииндекса $I = (I_1, \ldots, I_n)$, $|I| \geqslant 2$. Это дает возможность последовательно находить коэффициенты $\Phi_I(z)$ нормализующего преобразования. Предложение доказано.

4. Перейдем к построению инвариантов исходной системы (1).

Пусть $\alpha_1$, $\alpha_2$ — нули функции $a(\alpha)$, $\lambda_l = a'(\alpha_l) \neq 0$, $A_l = A(\alpha_l)$, $\mu_{1l}, \ldots, \mu_{nl}$, $l = 1, 2$, — собственные числа оператора $A_l$. По-прежнему предполагаем отсутствие резонансов в особых точках, т. е.

$$\mu_{il} \neq (\overline{\mu}_l, I),\ \overline{\mu}_l \equiv (\mu_{1l}, \ldots, \mu_{nl}),\quad (l = 1, 2),\ |I| \geqslant 2.$$

Более того, с целью упрощения классификации, дополнительно предполагаем выполнение неравенств

$$(I, \overline{\mu}_l) - \mu_{il} \neq n\lambda_l,\quad n \in \mathbb{Z}_+,\ |I| \geqslant 2, \tag{4}$$

$$\mu_{il} - \mu_{jl} \neq n\lambda_l,\quad i \neq j,\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем обозначения: $u_1 = S^1 \setminus \{\alpha_2\}$, $u_2 = S^1 \setminus \{\alpha_1\}$. В силу предложения при каждом $l = 1, 2$ существует формальное по $x$ преобразование

$$S_l : u_l \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n,$$

которое приводит уравнение (1) на дуге $u_l$ к нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda_l z, \\ \dot{y} = A_l(0)\, y, \end{cases} \tag{5}$$

$$S_l(\alpha, x) = (H_l(\alpha),\ \Phi(\alpha, x)),\quad H_l(\alpha_l) = 0.$$

Композиция $G(z, x) = S_2 \cdot S^{-1}(z, x)$ является формальным по $x$ обратимым отображением, коэффициенты которого принадлежат классу $C^\infty$ на проколотой прямой $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Оно имеет вид

$$G(z, x) = (W(z),\ \Gamma(z, x)),$$

где $W(z)$ — $C^\infty$-диффеоморфизм проколотой прямой $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, а

$$\Gamma(z, x) = T(z)\, x + \sum_{|I| \geqslant 2} \Gamma_I(z)\, x^I.$$

Здесь $T(z)$ — обратимая $C^\infty$-матрица-функция, а $\Gamma_I(z)$ — $C^\infty$-отображения проколотой прямой. Диффеоморфизм $G$ преобразует нормальную форму с номером $l = 1$ в нормальную форму с номером $l = 2$. Иными словами, диффеоморфизм $G$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 z W' = \lambda_2 W, \\ \lambda_1 z \Gamma'_z + \Gamma'_x A_1 x = A_2 \Gamma(z, x). \end{cases} \tag{6}$$

Общее решение первого уравнения этой системы имеет вид

$$W(z) = \begin{cases} c_+ \exp \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln z, & z > 0, \\ c_- \exp \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln |z|, & z < 0, \end{cases}$$

где $c_+$, $c_-$ — некоторая пара вещественных чисел. Диффеоморфность отображения $W : \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ влечет условие $c_+ \cdot c_- < 0$. Общее решение второго уравнения системы (6) имеет вид

$$\Gamma(z, x) = \begin{cases} \left(\exp \dfrac{A_2}{\lambda_1} \ln z\right) \Gamma_+ \left(\left(\exp \left(-\dfrac{A_1}{\lambda_1}\right) \ln z\right) x\right), & z > 0, \\ \left(\exp \dfrac{A_2}{\lambda_1} \ln |z|\right) \Gamma_- \left(\left(\exp \left(-\dfrac{A_1}{\lambda_1}\right) \ln |z|\right) x\right), & z < 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma_\pm(x)$ — произвольная пара обратимых формальных отображений.

Обозначим через $v$ формальное векторное поле на окружности, соответствующее системе (1). Положим $N(v) = (c_\pm,\ \Gamma_\pm(x))$.

Два набора $N = (c_\pm,\ \Gamma_\pm(x))$, $\tilde{N} = (\tilde{c}_\pm,\ \tilde{\Gamma}_\pm(x))$ будем называть эквивалентными, если существует такое число $\mu > 0$ и такие матрицы $S_1$ и $S_2$, коммутирующие с $A_1$ и $A_2$ соответственно, что $\tilde{c}_\pm = \mu c_\pm$, $\tilde{\Gamma}_\pm = S_2 \Gamma_\pm (S_1 x)$.

Теорема 1. *Для того чтобы две системы вида* (1) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им наборы* $N(v)$ *и* $N(\tilde{v})$ *были линейно эквивалентны.*

2. *Для каждого набора* $N = (c_\pm,\ \Gamma_\pm(x))$ *найдется такая система вида* (1), *что* $N(v) = N$.

Поскольку в наборе $N$ формальные ряды произвольны, а группа линейных преобразований достаточно бедна, то из теоремы вытекает существование неэквивалентных систем вида (1) с одинаковыми полями на окружности. Более того, существуют системы, не приводимые к линейным и к автономным. Сформулируем в терминах $N(v)$ соответствующие критерии. Заметим, что для линейной системы

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = a(\alpha), \\ \dot{x} = A(\alpha)\, x \end{cases}$$

преобразования $S_l(z, x) = T_l(z)\, x$ линейны по $x$, поэтому соответствующий инвариант имеет вид $N(v) = (C_\pm,\ B_\pm x)$. Очевидно, набору такого вида линейно эквивалентен лишь набор такого же вида.

Следствие 1. *Для того чтобы система вида* (1) *была эквивалентна линейной, необходимо и достаточно, чтобы ее инвариант имел вид* $N(v) = (c_\pm,\ B_\pm x)$.

Для автономных систем, т. е. систем вида

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = a(\alpha), \\ \dot{x} = F(x) = Ax + f(x), \end{cases}$$

выполнено условие $A_1(0) = A_2(0) = A$, а нормализующее преобразование $S_l(\alpha, x)$ не зависит от $\alpha$. Следовательно, инвариант имеет вид $N(v) = (c_\pm, x)$. Такой набор эквивалентен лишь набору

$$N = (c_\pm, Bx), \tag{7}$$

где $B$ коммутирует с оператором $A$. Отсюда вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Для приводимости системы* (1) *к автономной необходимо и достаточно, чтобы* $A_1(0) = A_2(0)$ *и инвариант* $N(v)$ *имел вид* (7).

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть системы

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = a(\alpha), \\ \dot{x} = F(\alpha, x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha} = \tilde{a}(\alpha), \\ \dot{x} = \tilde{F}(\alpha, x), \end{cases}$$

эквивалентны. Обозначим соответствующие этим системам формальные векторные поля через $v$ и $\tilde{v}$. Тогда найдется такой формальный диффеоморфизм $\psi: S^1 \times \mathbb{R}^n \to S^1 \times \mathbb{R}^n$, что $\psi_* v = \tilde{v}$. Пусть $S_l$, $l = 1, 2$, — по-прежнему, нормализующее преобразование на дуге $u_l$, переводящее поле $v_l$ в нормальную форму (5), т. е.

$$(S_l)_* v_l |_{u_l \times \mathbb{R}^n} = R_l, \quad l = 1, 2,$$

где через $R_l$ обозначено поле, соответствующее нормальной форме (5). Аналогично

$$(\tilde{S}_l)_* \tilde{v}_l |_{u_l \times \mathbb{R}^n} = R_l.$$

Полагая $M_l = \widetilde{S}_l \circ \psi \cdot S_l^{-1}$, получим, что

$$M_l : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$$

— формальный диффеоморфизм с $C^\infty$-коэффициентами, который оставляет нормальную форму на месте:

$$(M_l)_* R_l = R_l.$$

Из этого равенства и нерезонансных условий (4) следует

$$M_l(z, x) = (\mu_l z, B_l x), \quad l = 1, 2,$$

где $\mu_l > 0$, а $B_l$ — линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, коммутирующий с $A_l(0)$. Из равенства

$$\psi = \widetilde{S}_1^{-1} \circ M_1 \circ S_1 = \widetilde{S}_2^{-1} \circ M_2 \circ S_2 |_{u_1 \cap u_2 \times \mathbb{R}^n} \tag{8}$$

вытекает равенство

$$\widetilde{S}_2 \circ \widetilde{S}_1 \circ M_1 = M_2 \circ S_2 \circ S_1^{-1}, \tag{9}$$

которое и означает линейную эквивалентность наборов $N(v)$ и $N(\tilde{v})$. Необходимость доказана.

Для доказательства д о с т а т о ч н о с т и, исходя из равенства (9), положим

$$\psi |_{u_l \times \mathbb{R}^n} = \widetilde{S}_l^{-1} \circ M_l \circ S_l.$$

Тогда равенство (8) показывает, что формальный диффеоморфизм $\psi$ корректно определен на всей окружности. Непосредственная проверка показывает, что $\psi$ переводит поле $v$ в поле $\tilde{v}$. Этим доказана первая часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы, т. е. утверждения о реализации инварианта, зададимся произвольным набором

$$N = (c_\pm, \Gamma_\pm(x)).$$

По нему построим диффеоморфизм проколотой оси $G(z, x)$, полагая

$$G(z, x) = (W(z), \Gamma(z, x)),$$

где

$$W(z, x) = \begin{cases} c_+ \exp \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln z, & z > 0, \\[2ex] c_- \exp \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln |z|, & z < 0, \end{cases}$$

а

$$\Gamma(z, x) = \begin{cases} \left(\exp \dfrac{A_2}{\lambda_1} \ln z\right) \Gamma_+ \left(\left(\exp\left(-\dfrac{A_1}{\lambda_1}\right) \ln z\right) x\right), & z > 0, \\[2ex] \left(\exp \dfrac{A_2}{\lambda_1} \ln |z|\right) \Gamma_- \left(\left(\exp\left(-\dfrac{A_1}{\lambda_1}\right) \ln |z|\right) x\right), & z < 0. \end{cases}$$

Представим $G(z, x)$ в виде композиции

$$G(z, x) = S_2 \circ S_1^{-1}(z, x),$$

$$S_l : u_l \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad l = 1, 2.$$

Пусть $S_l(\alpha, x) = (H_l(\alpha), \Phi_l(\alpha, x))$. Положим

$$v_l |_{u_l \times \mathbb{R}^1} = (S_l)_*^{-1} R_l, \quad l = 1, 2. \tag{10}$$

Поскольку композиция $G = S_2 \cdot S_1^{-1}$ переводит поле $R_1$ в поле $R_2$, то формулой (10) корректно определено формальное поле вида (1) с нужными свойствами. По построению $N(v) = N$. Теорема полностью доказана.

1. *Лисяной В. Ф.* Классификация формальных периодических систем // Дифференц. уравнения.— 1985.— 21, № 12.— С. 2173—2175.
2. *Белицкий Г. Р.* Инварианты векторных полей и линейных уравнений на сфере // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 3.— С. 226—302.

Получено 09.01.91