УДК 517.9

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Динамические системы в $\mathcal{T}_m \times E^n$
(расширенный текст доклада, прочитанного автором на заседании Киевского математического общества 26 февраля 1991 г.)

Приведен обзор результатов по исследованию динамических систем в $\mathcal{T}_m \times E^n$, полученных автором в последние годы.

Наведено огляд результатів по дослідженню динамічних систем в $\mathcal{T}_m \times E^n$, одержаних автором за останні роки.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — точка m-мерного тора $\mathcal{T}_m$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — точка n-мерного евклидового пространства E^n, t — время. Обозначим через $C^r(\mathcal{T}_m)$ пространство 2π-периодических функций $f = (f_1, \ldots, f_d)$ переменного φ гладкости r, где $d = m, n$, или $m + n$, $r \geqslant 0$, $C^0(\mathcal{T}_m) = C(\mathcal{T}_m)$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор частот, понимаемый как совокупность m положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$(k, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu \lambda_\nu \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\},$$

где $\mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

Функция

$$F(t) = f(\lambda t), \tag{1}$$

где $f \in C(\mathcal{T}_m)$, задает квазипериодическую функцию, λ — ее частотный базис, m — размер частот базиса. Через $C^r(\lambda)$ обозначим совокупность всех квазипериодических функций (1) с частотным базисом λ, у которых $f \in C^r(\mathcal{T}_m)$.

Динамическую систему в $\mathcal{T}_m \times E^n$ будем определять решениями $\varphi = \varphi_t(\varphi, h)$, $h = h_t(\varphi, h)$ системы дифференциальных уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi, h), \; dh/dt = \mathcal{F}(\varphi, h), \tag{2}$$

у которой a и $\mathcal{F}$ — 2π-периодические по φ функции, заданные в $\mathcal{T}_m \times E^n$, r раз непрерывно дифференцируемые по своим переменным φ, h, $\varphi_0(\varphi, h) = \varphi$, $h_0(\varphi, h) = h$, φ, h — точка $\mathcal{T}_m \times E^n$.

В случае, когда $a(\varphi, h) \equiv \lambda$, динамическую систему (2) будем называть квазипериодической, при $a(\varphi, h) \equiv a(\varphi)$ — расширением динамической системы на торе, а ее первую подсистему — динамической системой на торе.

Расширение динамической системы на торе, у которого $\mathcal{F}(\varphi, h)$ является линейной функцией переменного h, т. е. когда $\mathcal{F}(\varphi, h) = P(\varphi)h + f(\varphi)$, будем называть линейным расширением динамической системы на торе.

Исследования таких систем начали развиваться под влиянием прикладной математики, в особенности небесной механики. Первые из фундаментальных результатов в этом направлении принадлежат А. Пуанкаре. Они касаются исследований траекторий на обычном (двумерном) торе, изложены в одной из глав его мемуара «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1885 г.), существенно дополнены А. Данжуа (1932 г.) и составляют ныне классическую теорию Пуанкаре — Данжуа [1—3].

Дальнейший прогресс в указанной области приходится на 30—40 годы и связан с работами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по разработке нелинейной механики. При рассмотрении проблем математического обоснования процесса усреднения систем стандартного вида Н. Н. Боголюбовым в монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» (1945 г.) разработан метод установления существования и исследования свойств интегральных многообразий тороидального вида рассматриваемых систем, нашедший развитие в работах Ю. А. Митропольского и его учеников и получивший позже название метода интегральных многообразий [4—6]. В указанной монографии впервые теория Пуанкаре — Данжуа нашла практическое применение для исследования двухчастотных колебаний нелинейных систем.

Новый этап в теории динамических систем в $\mathcal{T}_m \times E^n$ открыла работа А. Н. Колмогорова [7], о которой В. И. Арнольд писал [8]: «Одним из самых замечательных среди многочисленных математических достижений А. Н. Колмогорова является его работа 1954 г. по классической механике. Простая и новая идея, комбинация весьма классических и вполне современных методов, решение 200-летних проблем, ясная геометрическая картина и широкие горизонты — таковы достижения этой работы». Исследования в [7] относятся к гамильтоновым системам вида (2) и их развитие завершилось в 60-х годах созданием КАМ-теории [7—11].

Под влиянием работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда Н. Н. Боголюбов [12] прочитал в 1963 г. свои лекции «О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики в Первой летней математической школе». В них разработана теория квазипериодических решений диссипативных систем, встречающихся в задачах нелинейной механики. Лекции породили интерес к разработке теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем. Оказалось, что теория периодических решений положительных симметрических систем линейных уравнений в частных производных, разработанная К. О. Фридрихсом [13], применительно к линейным расширениям динамических систем на торе представляет собой оригинальную и своеобразную теорию существования инвариантных торов этих систем. На этот факт обратил внимание Ю. Мозер, результаты которого о сохранении инвариантного тора при возмущении, содержащиеся в работе [14] и дополненные позже Р. Сакером [15, 16], создали теорию возмущения инвариантных торов динамических систем, основанную на функциональных методах математической физики. Появились работы [17—21], развившие новый подход к теории динамических систем в $\mathcal{T}_m \times E^n$, дополненный исследованиями [22—24]. Лекции [12] вызвали исследования Ю. А. Митропольского [25, 26] и его учеников [27—29], подытоженные в монографии [30].

В рассматриваемой теории отдельный цикл составляют работы по проблеме приводимости систем линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами [31—40].

Автору настоящего доклада принадлежит в нем первый из результатов по метрическому аспекту проблемы [38]. Е. И. Динабург и Я. Г. Синай развили это направление, проведя глубокое исследование «запретных» зон спектра одномерного уравнения Шредингера с квазипериодическим потенциалом при больших значениях спектра [39]. Ю. Мозер и Ю. Пешел распространили результат [40] на общий случай квазипериодического потенциала.

Близким к приводимости вопросам линейной теории посвящены работы Б. Ф. Былова [41], Р. Сакера и Г. Селла [42], В. Л. Кулика и А. М. Самойленко [43] и др.

Как в отмеченных выше, так и во многих других работах (см., например, монографии [44—47]) в той или иной мере изучаются динамические системы в $\mathcal{T}_m \times E^n$, хотя выделение указанных исследований в такую теорию довольно условно.

Настоящий доклад содержит результаты, вытекающие из работ автора последних лет [48—50]. Представляется, что эти результаты хорошо иллюстрируют как характер самих задач излагаемой теории, так и основные методы их решения — метод интегральных многообразий и метод с ускоренной сходимостью итераций. Первые из них относятся к изучению окрестности квазипериодической траектории динамической системы или ее инвариантного тора, вторые — к проблеме приводимости систем двух линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.

1. Окрестность инвариантного тороидального многообразия динамической системы. Обозначим через $x = x(t, x_0)$ решение системы уравнений

$$dx/dt = X(x), \tag{3}$$

где $x \in E^{n+m}$, $X = X(x) \in C^r(E^n)$, $r \geqslant 1$, $x(0, x_0) = x_0$. Будем предполагать, что множество $M: x = f(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$ есть инвариантное множество системы (3), $f \in C^r(\mathscr{T}_m)$ и ранг $\partial f(\varphi)/\partial\varphi = m$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$. Согласно [21] условие инвариантности M требует выполнения тождества

$$\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}\Gamma^{-1}(\varphi)\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^* - E\right]X(f(\varphi)) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{T}_m, \tag{4}$$

где $\Gamma(\varphi) = \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^*\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}$, $*$ — знак транспонирования матрицы. При выполнении тождества (4) сужение динамической системы (3) на M задается динамической системой на торе $d\varphi/dt = a(\varphi)$, где согласно [21]

$$a(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi)\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^* X(f(\varphi)),\ \ \varphi \in \mathscr{T}_m.$$

При сделанных выше предположениях многообразие M будем называть m-мерным тороидальным многообразием гладкости r. В случае, когда

$$a(\varphi) \equiv \lambda, \tag{5}$$

все решения на M—квазипериодические и каждая траектория, начинающаяся на M, образует «обмотку M». Очевидно и обратное, что квазипериодическое решение $x = x(t, x_0) \in C^r(\lambda)$, где m — истинный размер частотного базиса [21], $r \geqslant 1$, порождает инвариантное тороидальное многоообразие M, обмоткой которого является квазипериодическая траектория, начинающаяся на M.

Будем предполагать, что m-репер $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$, дополняем до 2π-периодического базиса в E^{n+m} [21], так что существует матрица $B(\varphi)$ из $C^r(\mathscr{T}_m)$ такая, что

$$\det\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi},\ B(\varphi)\right] \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{T}_m.$$

Последнее всегда выполняется, когда $n \geqslant m + 1$ либо $n = 1$.

При сделанных предположениях в малой окрестности M динамическую систему (3) можно записать как систему в $\mathscr{T}_m \times E^n$, введя вместо декартовых координат x координаты φ, h и положив $x = f(\varphi) + B(\varphi)h$. В результате вместо (3) получим систему

$$d\varphi/dt = a(\varphi) + A(\varphi, h)h,\ \ dh/dt = P(\varphi, h)h, \tag{6}$$

в которой $A = A(\varphi, h)$ и $P = P(\varphi, h)$ — матрицы соответствующих размеров, заданные в области

$$\|h\| \leqslant \delta,\ \ \varphi \in \mathscr{T}_m \tag{7}$$

при достаточно малом $\delta > 0$, $(r - 1)$ раз непрерывно дифференцируемые по φ, h и 2π-периодические по φ.

«Укороченную» систему уравнений (6) вида

$$d\varphi/dt = a(\varphi),\ \ dh/dt = P(\varphi)h, \tag{8}$$

где $P(\varphi) = P(\varphi, 0)$, будем называть системой уравнений в вариациях многообразия M.

Пусть $\varphi = \psi_t(\varphi)$ является решением первого из уравнений системы (8), $\psi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$. Обозначим через $\Omega_0^t(P)$ фундаментальную матрицу решений второго уравнения системы (8), взятого при $\varphi = \psi_t(\varphi)$, где $\Omega_0^t(P) = E$.

Потребуем выполнения условия экспоненциальной устойчивости M согласно системе уравнений в вариациях вида

$$\| \Omega_0^t(P) \| \leqslant \mathcal{L} e^{-\gamma t}, \quad t \in R^+, \tag{9}$$

где $\mathcal{L} = \mathrm{const} \geqslant 1$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $R^+ = [0, +\infty)$.

Решаемая нами задача состоит в том, чтобы указать условия, при которых существует замена переменных $\varphi \to \psi$, преобразующая систему (6) в «расширение динамической системы на торе»:

$$d\psi/dt = a(\psi), \quad dh/dt = P(\psi, h)\, h. \tag{10}$$

Для квазипериодического случая, определяемого условием (5), приведенных выше требований достаточно для положительного решения задачи.

Условимся обозначать через $C^p_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ пространство функций переменного (φ, h), определенных в области $\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$, $\mathcal{K}_\mu = \{h : \|h\| \leqslant \mu\}$, имеющих там непрерывные частные производные до порядка p включительно и таких, что их p-е производные удовлетворяют по (φ, h) условию Липшица. Справедлива теорема.

Т е о р е м а 1 [48]. *Пусть матрицы $A = A(\varphi, h)$ и $P = P(\varphi, h)$ принадлежат пространству $C^p(\mathcal{T}_m \times K_\delta)$ при $p \geqslant 1$, а фундаментальная матрица решений $\Omega_0^t(P)$ системы уравнений (8) удовлетворяет неравенству (9). Тогда если $a(\varphi) \equiv \lambda$, то можно указать такое $\mu > 0$ и матрицу $U = U(\psi, h)$, принадлежащую пространству $C^{p-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$, что замена переменных*

$$\varphi = \psi + U(\psi, h)\, h \tag{11}$$

приводит систему уравнений (6) *к виду*

$$d\psi/dt = \lambda, \quad dh/dt = P(\psi + U(\psi, h)\, h, h)\, h$$

для $(\psi, h) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$.

Важно отметить, что теорема 1 справедлива и для $p = \infty$.

Очевидно, что матрица $U(\psi, h)$, о которой идет речь в теореме, является решением матричного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} \lambda + \frac{\partial U}{\partial h} P(\psi + Uh, h)\, h + UP(\psi + Uh, h) = A(\psi + Uh, h), \tag{12}$$

где $\dfrac{\partial U}{\partial \psi} \lambda = \sum\limits_{\nu=1}^{m} \dfrac{\partial U}{\partial \psi_\nu} \lambda_\nu$, $\dfrac{\partial U}{\partial h} Ph = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\partial U}{\partial h_\nu} (Ph)_\nu$, $(Ph)_\nu$ — ν-я координата Ph.

Успех разрешимости уравнения (12) в нужном классе функций связан с возможностью сведения этого уравнения к операторному с оператором сжатия. Так, при $\mathcal{L} = 1$ нужное нам решение уравнения (12) удовлетворяет системе уравнений

$$U(\psi, h) = -\int\limits_0^\infty A(\psi_s + U(\psi_s, X_s h)\, X_s h, X_s h)\, X_s ds,$$

$$dX_t/dt = P(\psi_t + U(\psi_t, X_t h)\, X_t h, X_t h)\, X_t, \quad t \in R^+$$

при начальном условии $X_0 = E$ и может быть найдено простым итерационным методом. В указанном сведении и заключается сущность идеи метода интегральных многообразий Н. Н. Боголюбова [4]: «Однако, тогда как в этой теории (речь идет о локальной теории периодических решений А. Пуанкаре) вопрос сводится к исследованию разрешимости системы обыкновенных уравнений с конечным числом неизвестных, содержащей малый параметр, и вопрос этот исследуется с помощью теоремы о неявных функциях, в нашей теории (речь идет о методе интегральных многообразий) мы имеем дело с функциональными уравнениями, определяющими функции, характеризующие искомые интегральные многообразия».

В общем случае, когда $a(l) \not\equiv \lambda$, приведенных требований недостаточно для положительного решения задачи. Помимо ограничений на матрицу $\Omega_0^t(P)$ требуются ограничения на матрицу $\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)$, определяемую из системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\theta$$

и характеризующую «расхождение» потока траекторий на M при $t \to \infty$.

Пусть выполняется неравенство

$$\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\| \leqslant \mathscr{L}_1 e^{\alpha t}, \ t \in R^+, \tag{13}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

Из работы [49] следует такая теорема.

Теорема 2. *Пусть правая часть системы* (6) *такая, что* a, A *и* P *принадлежат пространству* $C^p(\mathscr{T}_m \times \mathscr{K}_\delta)$ *при* $p \geqslant 1$, *а фундаментальные матрицы решений* $\Omega_0^t(P)$ *и* $\Omega_0^t(\partial a/\partial\varphi)$ *удовлетворяют неравенствам* (9) *и* (13) *с постоянными* γ *и* α *такими, что для некоторого* $p \geqslant l \geqslant 1$ *выполняется условие*

$$\gamma/\alpha > l. \tag{14}$$

Тогда можно указать такое $\mu > 0$ *и матрицу* $U = U(\psi, h)$, *принадлежащую пространству* $C_{\mathrm{Lip}}^{l-1}(\mathscr{T}_m \times \mathscr{K}_\mu)$, *что замена переменных* (11) *приводит систему уравнений* (6) *к системе* (10) *для* $(\psi, h) \in \mathscr{T}_m \times \mathscr{K}_\mu$.

Как ясно из формулировки теоремы 2 гладкость замены (11) конечна и несущественно зависит от гладкости правой части исходной системы уравнений (6), что существенно отличает общий случай от квазипериодического.

Следует отметить, что теорема 2 остается в силе, если в ней заменить постоянные β и α на соответствующим образом подобранные функции $\beta = \beta(\varphi)$ и $\alpha = \alpha(\varphi)$ из $C(\mathscr{T}_m)$, обеспечивающие неравенства

$$\|\Omega_0^t(P)\| \leqslant \mathscr{L} e^{-\int_0^t \beta(\psi_t)dt}, \ t \in R^+,$$

$$\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\| \leqslant \mathscr{L}_1 e^{\int_0^t \alpha(\psi_t)dt}, \ t \in R^+,$$

где $\beta(\varphi) \geqslant \gamma$.

В этом случае неравенство (14) следует заменить на аналогичное вида $\min\limits_{\varphi \in \mathscr{T}_m} [\beta(\varphi) - l\alpha(\varphi)] > 0$. Как ясно из [21] проверку неравенств (14) можно осуществлять с привлечением аппарата функций Ляпунова, являющихся квадратичными формами относительно h или θ соответственно.

Из приведенных теорем следует, что решения $x = x(t, x_0)$ системы (3), начинающиеся в малой окрестности многообразия M, притягиваются при $t \to +\infty$ к соответствующим решениям этой системы, начинающимся на M, по экспоненциальному закону. Этот факт устанавливает следующая теорема.

Теорема 3 [48, 49]. *Пусть выполняются условия приведенных выше теорем с* $p = r - 1$.

Тогда можно указать достаточно малое $\delta > 0$ *такое, что для каждого* x_0, *удовлетворяющего неравенству* $\rho(x_0, M) = \inf\limits_{x \in M} \|x_0 - x\| \leqslant \delta$, *найдутся* *значения* $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$ *и* $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ *такие, что решение* $x = x(t, x_0)$ *системы уравнений* (3) *удовлетворяет неравенству*

$$\| x(t, x_0) - f(\psi_t(\psi_0)) \| \leqslant \mathcal{L}_2 e^{-\gamma_1 t} \| x_0 - f(\varphi_0) \|$$

для всех $t \in R^+$ *и некоторых* $\mathcal{L}_2 = \mathrm{const} > 0$, $\gamma_1 = \gamma_1(\delta) = \mathrm{const} > 0$, *где* $\gamma_1 \to \gamma$ *при* $\delta \to 0$, $\| \psi_0 - \varphi_0 \| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Следствием приведенных результатов для случая, когда обмотка M образована квазипериодической траекторией, т. е. $x(t, f(\varphi)) = f(\lambda t + \varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$, являются следующие утверждения.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 2 *квазипериодические решения* $x = f(\lambda t + \varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$ *устойчивы по Ляпунову.*

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 2 *для любой функции* $F = F(x)$, *удовлетворяющей условию Гельдера по* x *в окрестности* M, *и любого решения* $x = x(t, x_0)$ *системы* (3), *у которого* $\rho(x_0, M) \leqslant \delta$, *справедливо равномерно по* $t \in R^+$ *соотношение*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(x(t, x_0))\, dt = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(f(\varphi))\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Последнее из утверждений характеризует «эргидичность» поведения полутраекторий системы (3) в окрестности квазипериодической обмотки M.

Обсудим теперь вопрос о грубости описанной выше ситуации с поведением решений системы (3) в окрестности многообразия M. Для этого возмутим правую часть этой системы слагаемым $\varepsilon Y(x)$, где $Y \in C^r(E^{n+m})$, ε — малый положительный параметр, и рассмотрим поведение решений $y = y(t, y_0, \varepsilon)$, $y(0, y_0, \varepsilon) = y_0$ возмущенной системы

$$dy/dt = X(y) + \varepsilon Y(y), \tag{15}$$

начинающихся в малой окрестности многообразия M, о котором шла речь выше.

Прежде всего выясним, существует ли у возмущенной системы уравнений (15) при малых ε инвариантное тороидальное многообразие $M(\varepsilon)$:

$$x = f(\varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m \quad \forall \varepsilon \in I_0 = [0, \varepsilon_0],$$

стягивающееся к M при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f(\varphi, \varepsilon) - f(\varphi) \|_s = 0,$$

где $\| \cdot \|_s = \sup\limits_{0 \leqslant |\rho| \leqslant s} \| D^\rho \cdot \|_0$, $\| \cdot \|_0 = \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| \cdot \|$ — дифференциальная норма в $C^s(\mathcal{T}_m)$, $D^\rho = \dfrac{\partial^{|\rho|}}{\partial \varphi_1^{\rho_1} \ldots \partial \varphi_m^{\rho_m}}$. Ответ на вопрос следует из теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем. Успех этой теории связан с предположением о возможности сведения системы (3) в окрестности M к динамической системе в $\mathcal{T}_m \times E^n$ (6). При этом предположении система (15) в окрестности M приводится к системе

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= a(\varphi) + A(\varphi, h) h + \varepsilon L_1(\varphi, h) Y(f(\varphi) + B(\varphi) h), \\ dh/dt &= P(\varphi, h) h + \varepsilon L_2(\varphi, h) Y(f(\varphi) + B(\varphi) h), \end{aligned} \tag{16}$$

где $L_1(\varphi, h)$ и $L_2(\varphi, h)$ — блоки матрицы, обратной к матрице $\left[\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial B(\varphi) h}{\partial \varphi}, B(\varphi)\right]$, φ, h — точки области (7) с достаточно малым положительным δ, $\varepsilon \in I_0$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$.

Для системы (16) ищется инвариантное многообразие вида

$$h = u(\varphi, \varepsilon), \ \varphi \in \mathscr{T}_m \quad \forall \varepsilon \in I_0, \tag{17}$$

стягивающееся к тривиальному $h = 0$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$ при $\varepsilon \to 0$.

Теория возмущения связывает существование многообразия (17) системы (16) с «грубостью» уравнения в вариациях (8) невозмущенной системы. Для рассматриваемой системы уравнений (8) условие грубости предполагает выполнение неравенства

$$\| \Omega_\tau^0 (P) f(\varphi_\tau(\varphi)) \|_l \leqslant \mathscr{L}_1 e^{\gamma_1 \tau} \| f \|_l, \ \tau \in R^-, \tag{18}$$

в котором f — произвольная функция $C^l(\mathscr{T}_m)$, $\mathscr{L}_1$ и γ_1 — положительные постоянные, $R^- = (-\infty, 0]$.

Так как из (9) следует оценка

$$\| \Omega_\tau^0 (P) \| \leqslant \mathscr{L} e^{\gamma\tau}, \ \tau \in R^-,$$

то неравенство (18) гарантируется соотношением

$$\gamma/\alpha > l, \tag{19}$$

в котором α — показатель «расхождения» потока траекторий на M при $t \to -\infty$, определяемый условием

$$\left\| \Omega_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) \right\| \leqslant \mathscr{L}_2 e^{-\alpha t}, \ t \in R^- \tag{20}$$

при $\mathscr{L}_2 = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} > 0$.

Это приводит к следующему утверждению.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.

Тогда можно указать достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(l) > 0$ *такое, что если выполняется неравенство* (18) *для* $l \geqslant 1$, *то для любого* $\varepsilon \in I_0$ *система уравнений* (16) *имеет инвариантное многообразие* (17) *с функцией* u, *принадлежащей пространству* $C_{\text{Lip}}^{l-1}(\mathscr{T}_m)$, *и такое, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u \|_{l-1, \text{Lip}} = 0. \tag{21}$$

Здесь $\| u \|_{l, \text{Lip}} = \| u \|_l + K_l$, *где* K_l — *постоянная Липшица* l-*х производных функции* u.

Случай $a(\varphi) \equiv \lambda$ характеризуется тем, что l в формулировке теоремы 4 может быть любым целым положительным числом. Для этого случая при $l \geqslant 1$ замена переменных $h = u(\varphi, \varepsilon) + z$, где $u = u(\varphi, \varepsilon)$ — функция (17), преобразует исходную систему уравнений (16) в систему

$$d\varphi/dt = \lambda + F(\varphi, \varepsilon) + A(\varphi, z, \varepsilon) z, \ \ dz/dt = P(\varphi, z, \varepsilon) z, \tag{22}$$

где F, A, P и функции своих переменных, определенные в области $\mathscr{T}_m \times \mathscr{K}_{\delta_0} \times I_{\varepsilon_0}$, где $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) \to \delta$ при $\varepsilon_0 \to 0$, и такие, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| F \|_l = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \| A(\varphi, z, \varepsilon) - A(\varphi, z) \|_{l-1} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| P(\varphi, z, \varepsilon) - P(\varphi, z) \|_{l-1} = 0.$$

Теорема 2 позволяет установить приводимость системы (22) к соответствующей расширению динамической системы на торе

$$d\psi/dt = \lambda + F(\psi, \varepsilon), \quad dz/dt = \Phi(\psi, z, \varepsilon) z.$$

Точная формулировка этого утверждения содержится в теореме 6 [48] при $r = l$.

Это означает, что при $a(\varphi) \equiv \lambda$ и условии (9) грубым оказывается само свойство сведения динамической системы (3) к расширению на торе.

Многообразия $M(\varepsilon)$, однако, не всегда образованы обмоткой квазипериодической траектории возмущенной системы. Когда это выполняется, хорошо известно из теорем о выпрямлении траекторий на торе, определяемых первым из уравнений (22) [10, 30].

В общем случае, когда $a(\varphi) \not\equiv \lambda$, неравенства (9), (13), (14), (19) и (20) гарантируют согласно теоремам 2 и 4 при $p-1 \geqslant l-1 \geqslant 1$ приведение системы (16) в окрестности многообразия (17) к расширению динамической системы на торе вида

$$d\psi/dt = a(\psi) + F(\psi, \varepsilon), \; dz/dt = \Phi(\psi, z, \varepsilon),$$

где $z = h - u(\varphi, \varepsilon)$, $\varphi = \psi + U(\psi, z, \varepsilon) z$, $U = U(\psi, z, \varepsilon)$ — матрица, принадлежащая пространству $C_{\mathrm{Lip}}^{l-2}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ для $\varepsilon \in I_0$ и некоторого $\mu > 0$.

В отличие от квазипериодического случая, когда $a(\varphi) \equiv \lambda$, общий случай динамической системы на торе при $m > 2$ не изучен.

2. Проблема приводимости системы двух линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Переходя к исследованию приводимости системы линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, рассмотрим систему уравнений

$$d\varphi/dt = \omega, \quad dx/dt = (\lambda + \varepsilon\lambda') Jx + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon) x, \tag{23}$$

где $x = (x_1, x_2)$ — двумерный вектор, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — кососимметрическая матрица, $P(\varphi, \varepsilon)$ — 2π-периодическая по $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ матрица, определенная и аналитическая по φ, ε в области $\Pi_0 \times S_{\varepsilon_0}$:

$$|\operatorname{Im}\varphi| = \max_{\nu=\overline{1,m}} |\operatorname{Im}\varphi_\nu| \leqslant \rho, \; |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,$$

вещественная при вещественных значениях (φ, ε) и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{tr} P(\varphi, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{2} p_{\nu\nu}(\varphi, \varepsilon) = 0, \; \|P\| = \max_{\nu=1,2} \sum |p_{\nu j}| \leqslant 1,$$

где ε_0 — малый положительный параметр. Относительно частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ предполагается выполнение неравенств

$$|(k, \omega)| \geqslant K |k|^{-d_0}, \; d_0 \geqslant m+1 \tag{24}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, где $|k| = \sum_{\nu=1}^{m} |k_\nu|$, $K = \mathrm{const} > 0$, постоянная λ предполагается положительной, $\lambda' = \lambda'(\varepsilon)$ — вещественной при вещественном ε.

Пусть матрица Q является матрицей коэффициентов системы (23):

$$Q = (\lambda + \varepsilon\lambda') J + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon). \tag{25}$$

Приводимость системы уравнений с матрицей коэффициентов (25) в обычной постановке равносильна представлению фундаментальной матрицы решений этой системы $\Omega_0^t(Q)$ в виде

$$\Omega_0^t(Q) = \Phi(\omega t + \varphi) e^{At} \Phi^{-1}(\varphi), \tag{26}$$

где Φ — непрерывная 2π-периодическая матрица φ, A — постоянная матрица.

К системе (23) сводится одномерное стационарное уравнение Шредингера

$$-d^2\psi/dt^2 + u(\omega t)\psi = E\psi$$

с квазипериодическим потенциалом $u(\omega t)$. В переменных $\psi = x_1$, $d\psi/dt = \sqrt{E} x_2$ оно принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{E} Jx + \frac{u(\omega t)}{\sqrt{E}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

и сводится к (23) для больших E при

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad \sqrt{E} = \lambda + \varepsilon\lambda', \quad P = u(\varphi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

или к (23) при

$$\sqrt{E} = \lambda + \varepsilon\lambda', \ u(\varphi) = \varepsilon P(\varphi), \ P(\varphi) = \frac{p(\varphi)}{\lambda + \varepsilon\lambda'}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и малых значениях $\varepsilon > 0$.

Об исследованиях уравнения (26) мы уже говорили выше. Остановимся на результатах исследования системы (23).

Пусть

$$\lambda_k = \frac{1}{2}(k, \omega), \ d_0 \geqslant m + 1,$$

$$\Pi_k = \{\lambda : |\lambda - |\lambda_k|| \leqslant K(1 + |k|)^{-d_0}\},$$

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \Pi_k.$$

Применительно к системе (23) справедлива следующая теорема [50].

Теорема 5. *Можно указать достаточно малую* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(1/K)$ *и достаточно большую* $C = C(1/K)$ *положительные постоянные, а также функцию* $\lambda' = \Delta(\lambda, \varepsilon)$ *переменных* λ, ε *и матричную функцию* $Y = Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$ *переменных* φ, λ, ε, 2π*-периодическую по* φ, *определенные в области*

$$\Pi_{\rho/2} \times (R^+ \setminus \mathcal{O}) \times S_{\varepsilon_1},$$

аналитические по ε *или* φ, ε *соответственно, удовлетворяющие наравенству* $|\Delta| + \|Y\| \leqslant C$, *и такие, что при*

$$Q = (\lambda + \varepsilon\Delta(\lambda, \varepsilon))Y + \varepsilon P(\varphi, \quad \varepsilon)$$

система уравн ний (23) *удовлетворяет условию приводимости* (26) *с матрицами*

$$\Phi = E + \varepsilon Y(\varphi, \lambda, \varepsilon), \quad A = \lambda J.$$

Теорема 5 утверждает разложимость функций $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ и $Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$ в равномерно сходящиеся для всех $\lambda \in (R^+ \setminus Q)$ и всех $\varphi \in \Pi_{\rho/2}$ ряды по степеням ε. Этот факт очевидным образом определяет алгоритм нахождения коэффициентов указанных разложений. Достаточно для этого подставить ряды по степеням ε для $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ и $Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$ в соответствующие уравнения для $Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$ и $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ [50]:

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\omega + \lambda[Y, J] = (\Delta J + P(\varphi, \varepsilon))(E + \varepsilon Y), \tag{27}$$

$$SY = S\bar{Y} = \frac{\bar{Y} - J\bar{Y}J}{2} = 0, \tag{28}$$

где $\bar{Y} = \dfrac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)\,d\varphi, \ [Y, J] = YJ - JY.$

В частности, для первого приближения $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ и $Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$, определяемого значениями

$$\Delta(\lambda, 0) = \Delta_1, \ Y(\varphi, \lambda, 0) = Y_1(\varphi, \lambda), \tag{29}$$

получаем из (27), (28) уравнения

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \varphi}\omega + \lambda[Y_1, J] = \Delta_1 J + P(\varphi, 0), \tag{27'}$$

$$SY_1 = S\bar{Y} = 0. \tag{28'}$$

Из (27′), (28′) следует

$$\Delta_1 = \overline{P}_{21} - \overline{P}_{12},\ Y_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} Y_k e^{i(k,\varphi)},$$

где

$$P(\varphi) = P(\varphi, 0) = \{P_{ij}\}_{i,j=1,2},\ P(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} p_k e^{i(k,\varphi)},$$

$$Y_0 = \frac{[J, P_0]}{4\lambda},\ Y_k = \frac{Sp_k}{2i\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\right)[p_k, J] -$$

$$- \frac{i}{4}\left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} + \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\right)(p_k - Sp_k),\quad k \neq 0. \tag{30}$$

Уравнения для последующих коэффициентов разложений Δ и Y по степеням ε имеют вид уравнений (27), (28) и их решения задаются формулами, аналогичными (29), (30).

Отметим, что $\Delta(\lambda, 0) = \Delta_1$ не зависит от λ, $\operatorname{tr} Y_1 = 0$, матрица Y_0 имеет вид

$$Y_0 = \frac{1}{4\lambda}\begin{pmatrix} y & y_1 \\ y_1 & -y \end{pmatrix},\ y = \overline{P}_{12} + \overline{P}_{21},\ y_1 = -2\overline{P}_{11},$$

и каждая из матриц $Y_k \neq 0$ имеет простой полюс в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm\lambda_k$ либо в одной из этих точек.

Замечание. Условие

$$\operatorname{tr} P(\varphi, \varepsilon) = 0 \tag{31}$$

используется при доказательстве теоремы 5 для доказательства равенства

$$SP(\varphi, \varepsilon) = \Delta J. \tag{32}$$

Так как $SP = S\overline{P}$, где $\overline{P} = P_0$ — среднее значение матрицы $P = P(\varphi, \varepsilon)$, то равенство (32) удовлетворяется при более слабом, чем (31), предположении:

$$\operatorname{tr} \overline{P} = 0. \tag{33}$$

Этого достаточно, чтобы теорема 5 была справедлива для матриц $P(\varphi, \varepsilon)$, удовлетворяющих вместо (31) лишь условию (33).

Положим

$$\mu = \mu(\lambda, \varepsilon) = \lambda + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2(\lambda, \varepsilon). \tag{34}$$

Формула (34) задает значение $\mu = \mu(\lambda, \varepsilon)$, при котором исходная система уравнений (23) с $\lambda + \varepsilon\lambda' = \mu$ приводима к невозмущенной ее части — системе (23) при $\varepsilon = 0$.

Положим $I_1 = [0, \varepsilon_1]$ и рассмотрим функцию $\mu = \mu(\lambda, \varepsilon)$ в области $(R^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_1$, в которой μ принимает действительные значения.

Обозначим через $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ образ множества $R^+ \setminus \mathcal{O}$ при отображении $\lambda \to \mu(\lambda, \varepsilon)$ для $\varepsilon \in I_1$.

Нас интересует вопрос расположения множества $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ на R^+.

Простейшим здесь является случай, когда

$$\Delta_2(\lambda, \varepsilon) = 0 \tag{35}$$

во всей области $(R^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_1$. В этом случае множество $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ является сдвигом множества $R^+ \setminus \mathcal{O}$ на величину $\varepsilon\Delta_1$, следовательно, это множество имеет структуру множества $R^+ \setminus \mathcal{O}$, центр запрещенных зон $\Pi_k(\varepsilon)$ которого смещен с точки $|\lambda_k|$ в точку $\mu_k(\varepsilon) = |\lambda_k| + \varepsilon\Delta$. Таким образом, согласно изложенному

$$\mu_\varepsilon(R^+\setminus\mathcal{O})=R^+\setminus\mathcal{O}(\varepsilon),\quad \mathcal{O}(\varepsilon)=\bigcup_k \Pi_k(\varepsilon),$$

$$\Pi_k(\varepsilon)=\{\lambda:|\lambda-\mu_k(\varepsilon)|<K(1+|k|)^{-d_0}\}. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь более общий случай, определяемый условием

$$\Delta_1\neq 0. \tag{37}$$

В этом случае для каждого $\lambda\in R^+\setminus\mathcal{O}$ введем вместо ε новый параметр ε', положив

$$\varepsilon'=\varepsilon\left(1+\varepsilon\frac{\Delta_2(\lambda,\varepsilon)}{\Delta_1}\right). \tag{37$'$}$$

Для μ получаем теперь выражение через ε': $\mu=\lambda+\varepsilon'\Delta_1$, удовлетворяющее условию (35).

В силу теоремы о неявной функции равенство (37) обратимо в окрестности точки $\varepsilon=0$, что приводит к выражению ε через ε' из (37′) в виде формулы

$$\varepsilon=\varepsilon'(1+\varepsilon'\delta(\lambda,\varepsilon')),$$

в которой $\delta=\delta(\lambda,\varepsilon')$ — аналитическая по ε' в области $(R^+\setminus\mathcal{O})\times S_{\varepsilon_1'}$, где $0<\varepsilon_1'\leqslant\varepsilon_1\left(1+\varepsilon_1\dfrac{\Delta_2(\lambda,\varepsilon_1)}{\Delta_1}\right)$, функция, обладающая свойствами функции $\Delta_2(\lambda,\varepsilon)/\Delta_1$. Из этого следует, что если расширить множество рассматриваемых матриц $P(\varphi,\varepsilon)$ до множества матриц $P(\varphi,\varepsilon)=P(\varphi)+$ $+\varepsilon P_1(\varphi,\lambda,\varepsilon)$, зависящих от λ при $\lambda\in R^+\setminus\mathcal{O}$, то можно подобрать систему уравнений (23), для которой выполняется условие (35). Примером такой системы может быть система (23), матрица коэффициентов которой Q имеет вид

$$Q=(\lambda+\varepsilon\Delta_1)J+\varepsilon P(\varphi)+\varepsilon^2P_1(\varphi,\lambda,\varepsilon),$$

где

$$\Delta_1=\overline{P}_{21}-\overline{P}_{12},\quad \overline{P}(\varphi)=\{\overline{P}_{ij}\}_{i,\ j=1,\ 2},$$

$$P_1(\varphi,\lambda,\varepsilon)=\frac{\Delta_1J-P(\varphi)}{1+\varepsilon^2d(\varphi,\varepsilon)}(Y_1(\varphi,\lambda)+\varepsilon d(\varphi,\lambda)E)$$

$Y_1(\varphi,\lambda)$ — решение уравнения (27′) при условии (28′), определяемое по $P(\varphi,0)=P(\varphi)$ формулами (29), (30), $d(\varphi,\lambda)=\det Y_1(\varphi,\lambda)$.

При выбранном $P_1(\varphi,\lambda,\varepsilon)$ имеет место приводимость с помощью матрицы $\Phi=E+\varepsilon Y_1(\varphi,\lambda)$ к системе с матрицей коэффициентов λJ.

Утверждение проверяется непосредственно и справедливо для всех действительных ε, для которых

$$1+\varepsilon^2d(\varphi,\lambda)\geqslant 1+\varepsilon^2\min_{\varphi\in\mathcal{T}_m}d(\varphi,\lambda)=1+\varepsilon^2d(\lambda)>0.$$

Матрица $P_1(\varphi,\lambda,\varepsilon)$ удовлетворяет, очевидно, лишь условию (33).

Заканчивая рассмотрение случая (37), отметим, что множество значений функции $\mu=\mu(\lambda,\varepsilon)$ для каждого $\lambda\in R^+\setminus\mathcal{O}$ содержит в себе отрезок I^λ длины $l=l(\varepsilon_1)$, не зависящей от λ, который примыкает к λ (имеет λ одним своим концом) слева при $\Delta_1<0$ и справа при $\Delta_1>0$. Из этого вытекает, что для любого $\mu\in I_\lambda$ одна из систем (23) — именно та, которая определяется значением ε, для которого $\mu=\lambda+\varepsilon\Delta(\lambda,\varepsilon)$, приводится к невозмущенному виду — системе (23) при $\varepsilon=0$.

Ясно также, что в этом случае $\bigcup\limits_\lambda I_\lambda$ содержит полуось $\lambda\geqslant\lambda_1$ с достаточно большим λ_1. Отсюда следует, что любое значение $\mu>\lambda_1$ обеспечивает приводимость одной из систем (23) ($\lambda \approx \mu$, $\lambda \in R^+ \setminus \mathcal{O}$, $\varepsilon \in I_1$) к невозмущенному виду.

Изложенное относительно случая (37) остается в силе, если вместо (37) выполняется условие

$$\Delta_p(\lambda) = \Delta_p = \text{const}$$

для первого ненулевого члена разложения $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ по степеням ε.

В общем случае для определения расположения $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ на R^+ изучим зависимость функции $\mu(\lambda, \varepsilon)$ от параметра λ. Удобно для этого совершить в исходной системе (23) замену переменных $x \to x^{(1)}$, $\lambda' \to \to \Delta^{(1)}$ по формулам

$$x = [E + U_1(\varphi, \lambda, \varepsilon)]\, x^{(1)},\ \varepsilon\lambda' = \varepsilon\Delta_1 + \Delta^{(1)},$$
$$U_1 = U_1(\varphi, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon Y_1(\varphi, \lambda)$$

и получить систему уравнений

$$d\varphi/dt = \omega, \quad dx^{(1)}/dt = (\lambda + \Delta^{(1)})\, Jx^{(1)} + P^{(1)}(\varphi, \lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon)\, x^{(1)}, \tag{38}$$

в которой

$$P^1(\varphi, \lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon) = (E + U_1(\varphi, \lambda, \varepsilon))^{-1}\{[J, U_1(\varphi, \lambda, \varepsilon)]\,\Delta^{(1)} +$$
$$+ (\varepsilon P(\varphi, \varepsilon) - \varepsilon\Delta_1 J)\, U_1(\varphi, \lambda, \varepsilon)\}.$$

Систему (38) следует взять за исходную для итерационного процесса преобразования ее к невозмущенному виду.

Так как $S[J, U_1] = [J, S\, U_1] = 0$, то

$$SP^{(1)} = \varepsilon^2 d_1(\lambda, \varepsilon) + \varepsilon^3 d_2(\lambda, \varepsilon)\,\Delta^{(1)},$$

где

$$\begin{aligned} d_1(\lambda, \varepsilon) &= S[(E + \varepsilon Y_1)^{-1}(P - \Delta_1 J)\, Y_1], \\ d_2(\lambda, \varepsilon) &= S\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu-1} Y_1^\nu [J, Y_1]\right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Характер зависимости $\mu(\lambda, \varepsilon)$ от λ усматривается из формул для $Y_1(\varphi, \lambda)$, $P^{(1)}(\varphi, \lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon)$ и равенства, связывающего $\Delta^{(1)}$ с $\Delta^{(2)}$:

$$\Delta^{(1)} = \Delta^{(1)}(\lambda, \Delta^{(2)}, \varepsilon) = \frac{\Delta^{(2)} - \varepsilon^2 d_1(\lambda, \varepsilon)}{1 + \varepsilon^3 d_2(\lambda, \varepsilon)}\ . \tag{40}$$

Как ясно из равенств (29), (30), зависимость от λ коэффициентов $Y_k = Y_k(\lambda)$ такая, что они удовлетворяют условию Липшица в области $R^+ \setminus \mathcal{O}$ с постоянной

$$\| Y_k \|_{\text{Lip}} \leqslant \frac{C_1}{K^2}(1 + |k|)^{2d_0} \| p_k \|, \tag{41}$$

где C_1 — положительная постоянная.

Более того, функция $Y_k(\lambda)$ продолжима до функции $\tilde{Y}_k(\lambda)$, заданной на всей полуоси R^+, с сохранением неравенства (41) для продолжения.

Для этого достаточно то из слагаемых в выражениях (29), (30) для Y_k, которое равно $1/(\lambda - |\lambda_k|)$, продолжить до функции $\delta_k(\lambda)$, совпадающей с $1/(\lambda - |\lambda_k|)$ при $|\lambda - |\lambda_k|| \geqslant K/(1 + |k|)^{d_0}$ и равной значению

$$\delta_k(\lambda) = (\lambda - |\lambda_k|)\frac{(1 + |k|)^{2d_0}}{K^2}$$

при $|\lambda - |\lambda_k|| < K/(1 + |k|)^{d_0}$.

Функция $Y_1 = Y_1(\varphi, \lambda)$ удовлетворяет в области $\Pi_{\rho-2\delta} \times (R^+ \setminus \mathcal{O})$ неравенству

$$\| Y_1(\varphi, \lambda) \|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{C_2}{K^2} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2d_0+m},$$

где C_2 — положительная постоянная.

Такому же неравенству удовлетворяет и продолжение $\widetilde{Y}_1 = \widetilde{Y}_1(\varphi$ $\lambda)$ функции $Y(\varphi, \lambda)$ на всю область $\Pi_{\rho-2\delta} \times R^+$, получаемое из, (29) заменой в нем Y_k на $\widetilde{Y}_k = \widetilde{Y}_k(\lambda)$. Но тогда матрица $P^{(1)} = P^{(1)}(\varphi,$ $\lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon)$, рассматриваемая в области $\Pi_{\rho-2\delta} \times (R^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_1$ для всех $\Delta^{(1)}$ из отрезка

$$| \Delta^{(1)} | \leqslant \varepsilon, \tag{42}$$

удовлетворяет по λ условию Липшица с постоянной

$$\| P^{(1)} \|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \varepsilon^2 C_3,$$

где $C_3 = C_3(1/K, 1/\delta)$ — некоторая постоянная.

Более того, этому же неравенству удовлетворяет продолжение $\widetilde{P}^{(1)} = \widetilde{P}^{(1)}(\varphi, \lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon)$ матрицы $P^{(1)} = P^{(1)}(\varphi, \lambda, \Delta^{(1)}, \varepsilon)$ на всю область $\Pi_{\rho-2\delta} \times R^+ \times I_1$ для всех $\Delta^{(1)}$ из отрезка (42).

Этого достаточно, чтобы функция $\Delta^{(1)}(\lambda, \Delta^{(2)})$ удовлетворяла по λ условию Липшица в области $(R^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_1$ с постоянной

$$\| \Delta^{(1)} \|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \varepsilon^2 C_4,$$

где $C_4 = C_4(1/K, 1/\delta)$ — некоторая постоянная. Этому же неравенству удовлетворяет и продолжение $\widetilde{\Delta}^{(1)} = \widetilde{\Delta}^{(1)}(\lambda, \Delta^{(2)}, \varepsilon)$ функции $\Delta^{(1)} = \Delta^{(1)}(\lambda,$ $\Delta^{(2)}, \varepsilon)$ на всю область $R^+ \times I_1$, получаемое из формул (39), (40) заменой в них Y_1 на $\widetilde{Y}_1$, $d_\nu = d_\nu(\lambda, \varepsilon)$, $\nu = 1, 2$, на $\widetilde{d}_\nu = \widetilde{d}_\nu(\lambda, \varepsilon)$, $\nu = 1,$ 2. Рассуждая так дальше, приходим к утверждению, что в области $(R^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_1$ функция $\mu(\lambda, \varepsilon) - \lambda = \varepsilon\Delta(\lambda, \varepsilon)$ удовлетворяет по λ условию Липшица с постоянной

$$| \Delta |_{\mathrm{Lip}} \leqslant \varepsilon C, \tag{43}$$

где $C = C(1/K)$ — некоторая постоянная.

Более того, функция $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ продолжима до функции $\widetilde{\Delta}(\lambda, \varepsilon)$, заданной во всей области $R^+ \times I_1$, с сохранением неравенства (43) для продолжения.

Положим $\widetilde{\mu} = \lambda + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon\widetilde{\Delta}(\lambda, \varepsilon)$. Так как $\widetilde{\mu} = \mu$ для всех $\lambda \in R^+ \setminus$ $\setminus \mathcal{O}$ и $\varepsilon \in I_1$, то образ $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ множества $R^+ \setminus \mathcal{O}$ при отображении $\lambda \to \mu$ совпадает с образом $\widetilde{\mu}_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ множества $R^+ \setminus \mathcal{O}$ при отображении $\lambda \to \widetilde{\mu}$. Но $\widetilde{\mu}_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O}) \supseteq R^+ \setminus \breve{\mathcal{O}}(\varepsilon)$, где $\breve{\mathcal{O}}(\varepsilon) = \bigcup\limits_{q} \widetilde{\mu}_\varepsilon(\Pi_k)$, $\breve{\mu}_\varepsilon(\Pi_k)$ — образ интервала Π_k при отображении $\lambda \to \breve{\mu}$. Согласно оценки постоянной Липшица по λ функции $\widetilde{\Delta}(\lambda, \varepsilon)$ убеждаемся, что отображение $\lambda \to$ $\to \widetilde{\mu}$ является топологическим, следовательно, $\mu_\varepsilon(\Pi_k)$ является интервалом

$$| \mu - \mu_k(\varepsilon) | < l_k(\varepsilon). \tag{44}$$

где

$$\mu_k(\varepsilon) = |\lambda_k| + \varepsilon\Delta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[\widetilde{\Delta}(|\lambda_k| + K/(1+|k|)^{d_0}, \varepsilon) + \widetilde{\Delta}(|\lambda_k| - K/(1+|K|)^{d_0}, \varepsilon)],$$

$$l_k(\varepsilon) = K/(1+|k|)^{d_0} + \frac{\varepsilon^2}{2}[\widetilde{\Delta}(|\lambda_k| + K/(1+|k|)^{d_0}, \varepsilon) - \widetilde{\Delta}(|\lambda_k| - K/(1+|k|)^{d_0}, \varepsilon)].$$

Положим $\lambda_k(\varepsilon) = |\lambda_k| + \varepsilon\Delta_1$. Тогда

$$|\mu_k(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2\mathbb{C}K/(1+|k|)^{d_0}, \quad l_k(\varepsilon) \leqslant (1+\varepsilon^2\mathbb{C})K/(1+|k|)^{d_0} \tag{45}$$

Из неравенства (45) следует, что интервал (44) содержится в интервале

$$\Pi_k(\varepsilon) = \{\mu : |\mu - \mu_k(\varepsilon)| < (1+\varepsilon^2\mathbb{C})K/(1+|k|)^{d_0}\}.$$

Определим $\mathcal{O}(\varepsilon) = \bigcup_k \Pi_k(\varepsilon)$. Из изложенного следует включение

$$\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O}) \supseteq R^+ \setminus \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in I_1,$$

характеризующее расположение множества $\mu_\varepsilon(R^+ \setminus \mathcal{O})$ на полуоси R^+ в общем случае. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Можно указать положительные постоянные* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(1/K)$ и $\mathbb{C} = \mathbb{C}(1/K)$ *такие, что для любого* $\varepsilon \in I_1 = [0, \varepsilon_1]$ *и* $k \in \mathbb{Z}^m$ *в каждой окрестности*

$$|\mu - \lambda_k(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2\mathbb{C}K/(1+|k|)^{d_0}$$

точки $\lambda_k(\varepsilon) = |\lambda_k| + \varepsilon\Delta_1$ *найдется единственное* $\mu_k = \mu_k(\varepsilon)$ *и его окрестность*

$$\Pi_k(\varepsilon) = \{\mu : |\mu - \mu_k(\varepsilon)| \leqslant (1+\varepsilon^2\mathbb{C})K/(1+|k|)^{d_0}\}$$

такие, что если

$$\lambda + \varepsilon\lambda' = \mu(\varepsilon) \notin \bigcup_k \Pi_k(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

то система уравнений (23) *заменой переменных*

$$x = (E + \varepsilon Y(\varphi, \lambda, \varepsilon))y$$

с матрицей $Y = Y(\varphi, \lambda, \varepsilon)$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 5, *приводится к системе*

$$d\varphi/dt = \omega, \quad dy/dt = \lambda J y.$$

Согласно теореме 6 те значения $\mu(\varepsilon)$, которые не принадлежат множеству $\mathcal{O}(\varepsilon)$, гарантируют устойчивость системы уравнений (23), для остальных возможна неустойчивость.

Мера множества $\mathcal{O}(\varepsilon)$ с точностью до множителя $(1+\varepsilon^2\mathbb{C})$ совпадает с мерой множества $\mathcal{O}$.

Отметим, что теорема 6 дополняет результат [39] применительно к уравнению Шредингера, устанавливая возможность разложения приводящей матрицы в сходящиеся ряды по дискретному параметру, обратному к квадратному корню из значения спектра E.

Техника сглаживания позволяет избавить результаты этого пункта от предположений об аналитичности по φ, что для уравнения Шредингера сделано в работе [51].

1. *Poincare H.* Sur les courbes definies par les equations differentielles // J. Math.— 1885.— **1**.
2. *Denjoy A.* Sur les courbes definies par les e quations differentielles a la surface du tore // J. Math. Pure Appl.— 1932.— **2**, N 4.— P. 333—375.
3. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.— 390 с.
4. *Боголюбов Н.* О некоторых статических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Аналит. методы: Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1963.— Т. 1.— С. 93—154.
6. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
7. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР.— 1954.— **98**, № 4.— С. 527—530.
8. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук.— 1963.— **18**, № 5.— С. 13—40.
9. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Там же.— № 6.— С. 91—192.
10. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Там же.— 1968.— **23**, № 4.— С. 179—238.
11. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.— М. : Мир, 1973.— 164 с.
12. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Тр. Первой лет. мат. школы.— Киев: Наук. думка, 1964.— Т. 1.— С. 11—101.
13. *Friedrichs K. O.* Symmetric Positive Linear Differential Equations // Communs Pure and Appl. Math.— 1958.— **11**, N 3.— P. 333—418.
14. *Mozer J.* A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations // Ann. Scuola Norm Super. Pisa. Ser. III. Pt. 1.— 1966.— **20**, N 2.— P. 265—315; Pt. II.— N 3.— P. 499—535.
15. *Sacker R. J.* A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces // Communs Pure and Appl. Math.— 1965.— **18**, N 4.— P. 717—732.
16. *Sacker R. J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Hölder continuity // J. Math. and Mech.— 1969.— **18**, N 8.— P. 705—761.
17. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Аналит. методы: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.— Т. 1.— С. 495—499.
18. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.
19. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 5.— С. 820—834.
20. *Самойленко А. М.* Сепаратрисные многообразия и расщепляемость линейного расширения динамических систем на торе // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 1.— С. 31—38.
21. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 302 с.
22. *Кулик В. Л.* Трехблочная расщепляемость линейных расширений динамических систем на торе // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 124—130.
23. *Кулик В. Л.* О связи квадратичных форм и функции Грина линейного расширения динамических систем на торе // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 2.— С. 258—262.
24. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1990.— 270 с.
25. *Митропольский Ю. А.* О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 4.— С. 475—501.
26. *Митропольский Ю. А.* Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной механики // Funkc. ekvacioj. 1966.— **9**, N 1—3.— P. 27—42.
27. *Самойленко А. М.* К вопросу о структуре траекторий на торе // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 6.— С. 769—782.
28. *Лыкова О. Б., Богатырев Б. М.* О приводимости некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Там же.— 1968.— **20**, № 5.— С. 628—641.
29. *Митропольский Ю. А., Белан Е. П.* О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость // Там же.— № 2.— С. 166—175.
30. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.— 245 с.
31. *Гельман А. Е.* О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1954.— **116**, № 4.— С. 535—537.
32. *Андрианова Л. Я.* О приводимости системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. и астр.— 1962.— № 7.— С. 14—24.
33. *Блинов И. Н.* Аналитическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра // Дифференц. уравнения.— 1965.— **1**, № 8.— С. 1042—1053.

34. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости // Укр. мат. журн.— 1965.— **17**, № 6.— С. 42—59.
35. *Баскаков А. Г.* Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же.— 1983.— **35**, № 4.— С. 416—421.
36. *Lillo J. C.* Approximate similarity and almost periodic matrices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— **12**, N 3.— P. 400—407.
37. *Johnson R. A., Sell G. R.* Smoothness of Spectral Subbundles and Reducibility of Quasi — Periodic Linear Differential Systems // J. Different. Equat.— 1981.— **41**, N 2.— P. 262—288.
38. *Самойленко А. М.* О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 2.— С. 279—281.
39. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил.— 1975.— **9**, № 4.— С. 8—21.
40. *Mozer J., Pöschel J.* An extension of a result by Dunaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. Math. Helv.— 1984.— **59**, N 1.— P. 39—85.
41. *Былов Б. Ф.* О структуре решений систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Мат. сб.— 1965.— **68**, № 2.— С. 215—229.
42. *Sacker J., Sell G.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat.— 1978.— **27**, N 3.— P. 320—358.
43. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О расщепляемости линеаризированных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 5.— С. 587—597.
44. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1991.— 143 с.
45. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
46. *Умбетжанов Д. У.* Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных — Алма-Ата: Наука, 1979.— 211 с.
47. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // Lect. Notes Math.— 1977.— **583**.— 149 p.
48. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории.— Киев, 1990.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
49. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 4.— С. 530—537.
50. *Самойленко А. М.* Приводимость системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же.— 1989.— **41**, № 12.— С. 1669—1680.
51. *Парасюк И. О.* О зонах устойчивости уравнения Шредингера с гладким квазипериодическим потенциалом // Там же.— 1978.— **30**, № 17.— С. 70—78.

Получено 26.04.91