УДК 517.984

М. И. ГЕХТМАН, А. А. КАЛЮЖНЫЙ, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН УССР, Киев)

Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных

Показано, что системы ортонормальных полиномов нескольких переменных полностью описываются наборами самосопряженных перестановочных операторов специального вида и установлена связь с многомерной проблемой моментов.

Показано, що системи ортонормальних поліномів кількох змінних цілком визначаються наборами самоспряжених комутуючих операторів спеціального вигляду і встановлено зв'язок з багатовимірною проблемою моментів.

Как известно, всякий эрмитов оператор с простым спектром в сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен разностному оператору второго порядка, действующему в пространстве $l_2(0, \infty)$ (якобиевой матрице). Спектральная теория таких операторов позволяет описать системы ортогональных полиномов одного переменного (см., например, [1, 2]). Несмотря на то, что рекуррентные соотношения для ортогональных полиномов нескольких переменных известны, аналога спектральной теории и описания коэффициентов соотношений в этом случае, по-видимому, нет [3]. Впервые трехдиагональная структура рекуррентных соотношений в случае многих переменных встречается в [4]. В настоящей работе показано, что системы ортонормальных многочленов m переменных полностью описываются аналогами якобиевых матриц — наборами m перестановочных самосопряженных операторов специального вида — и установлена связь с многомерной проблемой моментов. Операторы рассматриваемого вида изучались в [5] в связи с исследованием разрешимости двумерной проблемы моментов, а также в [6] при переформулировке аксиоматической теории поля в терминах операторных якобиевых матриц. Близкие вопросы рассматривались в [7] в связи со спектральной теорией многопараметрических разностных уравнений второго порядка. В целях упрощения обозначений будем рассматривать случай $m = 2$, хотя все приведенные ниже результаты доказаны для произвольного m.

1. Пусть L_1 и L_2 — эрмитовы операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обладающие общим циклическим вектором Ω, причем $L_1^{m_1}L_2^{m_2}\Omega = L_2^{m_2}L_1^{m_1}\Omega$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Предположим также, что векторы $L_1^{m_1}L_2^{m_2}\Omega$ линейно независимы и $(L_1^{m_1}L_2^{m_2}\Omega, \Omega) \in \mathbb{R}^1$. Обозначим $\Omega_n =$ л. о. $\{L_1^{m_1}L_2^{m_2}\Omega \mid m_1 + m_2 \leqslant n\}$, $n = 0, 1, \dots$, $V_{n+1} = \Omega_n \ominus \Omega_{n-1}$ и разложим $\mathcal{H}$ в прямую сумму $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} V_{n+1}$, где $V_1 = \{c\Omega\}$. Размерность V_{n+1} равна $n + 1$. Если $h_n \in V_{n+1}$, $h_m \in V_{m+1}$, то $L_i h_n \in \Omega_{n+1}$, $i = 1, 2$, поэтому $(L_i h_n, h_m) = 0$ при $|n - m| \geqslant 2$. Отсюда следует, что $L_i V_{n+1} \subset \subset V_n \oplus V_{n+1} \oplus V_{n+2}$, т. е. $L_i V_{n+1} = (A_{n-1,i})^* V_{n+1} \oplus B_{n,i} V_{n+1} \oplus A_{n,i} V_{n+1}$, $i = 1, 2$, где $B_{n,i} = B_{n,i}^*$: $V_{n+1} \to V_{n+1}$, $A_{n,i} : V_{n+1} \to V_{n+2}$. Таким образом, мы показали, что оператор L_i порожден разностным выражением L_i', действующим на последовательности $u = (u_n \mid u_n \in V_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$(L_i' u)_n = A_{n-1,i} u_{n-1} + B_{n,i} u_n + A_{n,i}^* u_{n+1} \quad (i = 1, 2;\ A_{-1,i} = 0) \qquad (1)$$

Тогда перестановочность операторов L_1 и L_2 на линейном множестве $\mathcal{D}$ финитных последовательностей $u=(u_n)_{n=0}^{\infty}$ эквивалентна соотношениям

$$A_{n,1}A_{n-1,2}=A_{n,2}A_{n-1,1},$$
$$A_{n-1,1}B_{n-1,2}+B_{n,1}A_{n-1,2}=A_{n-1,2}B_{n-1,1}+B_{n,2}A_{n-1,1}, \tag{2}$$
$$A_{n-1,1}A^{*}_{n-1,2}+B_{n,1}B_{n,2}+A^{*}_{n,1}A_{n,2}=A_{n-1,2}A^{*}_{n-1,1}+B_{n,2}B_{n,1}+A^{*}_{n,2}A_{n,1}.$$

Предположим теперь, что ортонормированный базис в $\mathcal{H}$: $e_{00}=\Omega$, $e_{10}, e_{11}, \dots, e_{n0}, \dots, e_{nn}, \dots$ получен ортогонализацией Грамма — Шмидта системы $L_1^{n-k}L_2^k\Omega$, $n=0, 1, \dots; k=0, \dots, n$. Тогда $e_{nk}=\sum_{s=0}^{k}c_sL_1^{n-k}L_2^k\Omega+$ $+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}d_{ij}L_1^{i-j}L_2^j\Omega$, где $c_k>0$, $c_s, d_{ij}\in\mathbb{R}^1$. Отсюда

$$L_1e_{nk}=\sum_{s=0}^{k}c_sL_1^{n+1-k}L_2^k\Omega+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}d_{ij}L_1^{i+1-j}L_2^j\Omega=$$
$$=c_ke_{n+1-k}+\sum_{s=0}^{k-1}c'_se_{n+1_s}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}d'_{ij}e_{ij}.$$

Следовательно, $A_{n,1}e_{nk}=c_ke_{n+1k}+\sum_{s=0}^{k-1}c'_se_{n+1s}$, т. е. матрицы $A_{n,1}$ имеют вид верхнетреугольных $(n+1)\times(n+1)$ матриц с положительными диагональными элементами и с добавленной снизу нулевой строкой. Аналогично матрицы $A_{n,2}$ имеют вид верхнетреугольных $(n+1)\times(n+1)$ матриц с добавленной сверху, вообще говоря, ненулевой строкой. Иными словами, для элементов $a_{jk}^{n,i}$ матриц $A_{n,i}$, $i=1, 2;$ $j=0, \dots, n+2;$ $k=$ $=0, \dots, n+1$, выполняются условия

$$a_{jk}^{n,1}=0\ (j>k),\ a_{kk}^{n,1}>0;\ a_{jk}^{n,2}=0\ (j>k+1),\ a_{k+1k}^{n,2}>0. \tag{3}$$

Таким образом, задача изучения операторов L_1, L_2 с указанными выше свойствами свелась к изучению пары эрмитовых операторов, порожденных разностными выражениями вида (1) в гильбертовом пространстве $H=$ $=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}^{n+1}$, для которых выполняются соотношения коммутации (2) и условия (3). При этом общим циклическим вектором является вектор $\Omega=(1, 0, \dots)$. Такие пары операторов являются естественным аналогом полубесконечных якобиевых матриц, которые мы бы получили, если бы применили изложенную выше процедуру к одному эрмитову оператору с простым спектром. Всюду в дальнейшем будем понимать под L_i замыкание оператора, порожденного действием разностного выражения L'_i на финитные последовательности $u\in\mathcal{D}$. Рассмотрим задачу

$$(L'_iu)_n=\lambda_iu_n,\ u_{-1}=0,\ u_0=1,\ i=1, 2. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для разностных выражений L'_1, L'_2 существует единственное ненулевое решение задачи* (4). *При этом $u_n=u_n(\lambda_1, \lambda_2)=$ $=(P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2))_{k=0}^{n}$, где $P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2)$ — полином от двух переменных со старшим членом $\alpha_{nk}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k$ $(\alpha_{nk}>0)$.*

Теорема 2. *Предположим, что L_1, L_2 допускают коммутирующие самосопряженные расширения* (*возможно, с выходом из пространства*). *Тогда полиномы $P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2)$ ортогональны относительно меры $\sigma(\Delta)=$ $=(E(\Delta)\Omega, \Omega)$, где $E(\Delta)$ — вообще говоря, обобщенное разложение единицы, отвечающее L_1 и L_2. Совокупность всех полиномов от λ_1, λ_2 плотна в $L_2(\mathbb{R}^2, d\sigma)$ тогда и только тогда, когда $E(\Delta)$ — обычное разложение единицы.*

Мера $d\sigma$ называется спектральной мерой пары L_1, L_2. (Напомним, что если перестановочные эрмитовы операторы L_1 и L_2 в гильбертовом пространстве допускают расширение до коммутирующих самосопряженных T_1 и T_2, действующих в пространстве $\tilde{H} \supset H$, $P : \tilde{H} \to H$ — ортогональный проектор и $\tilde{E}(\Delta)$ — совместное разложение единицы T_1 и T_2, то $E(\Delta) = P\tilde{E}(\Delta) P$ называется обобщенным разложением единицы, отвечающим L_1 и L_2.)

Приведем достаточные условия того, что L_1 и L_2 являются коммутирующими самосопряженными операторами. Очевидно, что если матрицы $A_{n,i}$, $B_{n,i}$ ограничены по норме в совокупности, то операторы L_1 и L_2 ограничены, а значит, самосопряжены и коммутируют.

Теорема 3. *Пусть* $E_n = A_{n,1}^* A_{n+1,1}^* + A_{n,2}^* A_{n+1,2}^*$, $F_n = A_{n,1}^* B_{n+1,1} + B_{n,1} A_{n,1}^* + A_{n,2}^* B_{n+1,2} + B_{n,2} A_{n,2}^*$ *и* $\varkappa_n = \max(\|E_n\|, \|E_{n+1}\|, \|F_n\|)$. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_n}$ *расходится, то операторы* L_1 *и* L_2 *самосопряжены и коммутируют.*

2. Рассмотрим теперь задачу восстановления пары операторов (1)—(3) по спектральной мере. Пусть $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^2$ с бесконечным числом точек роста, для которой существуют все моменты $\sigma_{nk} = \int |\lambda_1|^{n-k} |\lambda_2|^k d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$; $k = 0, \ldots, n$. Ортогонализуя последовательность мономов $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_1^n, \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \ldots, \lambda_2^n, \ldots$, упорядоченную в лексикографическом порядке, относительно меры $d\sigma$, получаем последовательность $P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha_{nk}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k + \ldots$ ортонормированных полиномов двух переменных с положительными главными коэффициентами α_{nk}. Используя тот факт, что произвольный полином со старшим членом $\lambda_1^{m-s}\lambda_2^s$ может быть однозначно представлен как линейная комбинация полиномов $P_0, \ldots, P_{m-1m-1}, P_{m0}, \ldots, P_{ms-1}$, несложно получить рекуррентные формулы для P_{nk}:

$$\lambda_i P_{nk} = \sum_{s=k}^{n-1} c_{n-1s}^i P_{n-1s} + \sum_{s=0}^{n} c_{ns}^i P_{ns} + \sum_{s=0}^{k} c_{n+1s}^i P_{n+1s}, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где $c_{ms}^i = \int \lambda_i P_{nk} P_{ms} d\sigma$ (см., например, [3]). Обозначим

$$a_{ks}^{n,i} = \int \lambda_i P_{n+1k} P_{ns} d\sigma, \quad k = 0, \ldots, n+1; \; s = 0 \ldots, n;$$
$$b_{ks}^{n,i} = \int \lambda_i P_{nk} P_{ns} d\sigma, \quad k, s = 0, \ldots, n. \tag{6}$$

При этом из процедуры ортогонализации следует выполнение условий (3). Полагая $P_n = P_n(\lambda_1, \lambda_2) = (P_{n0}(\lambda_1, \lambda_2), \ldots, P_{nn}(\lambda_1, \lambda_2))$, $A_{n,i} = (a_{ks}^{n,i})_{k=0, s=0}^{n+1, n}$, $B_{n,i} = (b_{ks}^{n,i})_{k,s=0}^n$, можно представить (5) в виде

$$\lambda_i P_n = A_{n-1,i} P_{n-1} + B_{n,i} P_n + A_{n,i}^* P_{n+1}, \quad i = 1, 2; \; n = 0, 1, \ldots, A_{-1,i} = 0. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что из соотношений (6), равенства $\lambda_1(\lambda_2 P_n) = \lambda_2(\lambda_1 P_n)$ и ортогональности системы полиномов P_{nk} следует, что для матриц $A_{n,i}$, $B_{n,i}$, $n = 0, 1, \ldots$; $i = 1, 2$, выполняются соотношения коммутации (2). Мы убедились, что последовательность векторов $P_n \in \mathbb{C}^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, является решением задачи (4) для пары L_1, L_2 вида (1)—(3) с коэффициентами, восстановленными по мере $d\sigma$ с помощью формул (6). Таким образом, решена задача восстановления по мере $d\sigma$, обладающей указанными выше свойствами, пары операторов L_1, L_2 в $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}^{n+1}$, порожденных разностными выражениями (1) — (3).

Теорема 4. I. *Операторы* L_1 *и* L_2, *восстановленные по* $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$, *допускают коммутирующие самосопряженные расширения, возможно, с выходом из пространства.*

II. *Существует, (вообще говоря, обобщенное) совместное разложение единицы* $E(\Delta)$, *отвечающее* L_1 *и* L_2, *такое, что* $\sigma(\Delta) = (E(\Delta)\Omega, \Omega)$ $(\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, *т. е.* $d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$ *является спектральной мерой для* L_1 *и* L_2.

3. Установим связь между теорией эрмитовых операторов вида (1)—(3) и двумерной проблемой моментов. В пространстве $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2]$ всех полиномов двух переменных λ_1, λ_2 введем полуторалинейную форму $\Phi(Q, R) = (Q(L_1, L_2)\Omega, R(L_1, L_2)\Omega)$ $(Q, R \in \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2])$. Легко видеть, что она обладает следующими свойствами: 1) $\Phi(1, 1) = 1$; 2) $\Phi(Q, Q) \geqslant 0$; 3) $\Phi(Q, R) = \Phi(Q\bar{R}, 1)$ $(Q, R \in \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2])$. Из свойства 3 вытекает, что Φ полностью определяется функционалом $F(Q) = \Phi(Q, 1)$. Кроме того, полиномы $P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2)$, построенные в теореме 1 при решении задачи (4), ортогональны относительно $\Phi : \Phi(P_{ms}, P_{nk}) = \delta_m^n \delta_s^k$. Рассмотрим последовательность

$$m_{\bar{n}} = m_{(n_1, n_2)} = F(\lambda_1^{n_1}, \lambda_2^{n_2}), \; n_1, n_2 = 0, 1, \ldots . \tag{8}$$

Она положительно определена (п. о.), так как для любых $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{C}$,

$$\bar{n}^{(1)}, \ldots, \bar{n}^{(k)} \in \mathbb{Z}_+^2 \quad \sum_{i,j=1}^{k} \xi_i \bar{\xi}_j m_{\bar{n}^{(i)} + \bar{n}^{(j)}} = \sum_{i,j=1}^{k} \xi_i \bar{\xi}_j F(\lambda_1^{n_1^{(i)} + n_1^{(j)}} \lambda_2^{n_2^{(i)} + n_2^{(j)}}) =$$

$$= F\Big(\Big|\sum_{i=0}^{k} \xi_i \lambda_1^{n_1^{(i)}} \lambda_2^{n_2^{(i)}}\Big|^2\Big) > 0.$$

Обратно, по п. о. последовательности $m_{\bar{n}}$ $(\bar{n} = (n_1, n_2);\; n_1, n_2 = 0, 1, \ldots)$ можно построить с помощью формулы (8) невырожденную полуторалинейную форму Φ, обладающую свойствами 1—3. Форма Φ порождает невырожденное скалярное произведение $(Q, R)_\Phi = \Phi(Q, R)$ $(Q, R \in \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2])$. Обозначим через $\tilde{H}$ пополнение $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2]$ относительно этого скалярного произведения. Ортогонализуя последовательность мономов $\lambda_1^{n-k}\; \lambda_2^k$, $n = 0, 1, \ldots$; $k = 0, \ldots, n$, относительно $(\cdot, \cdot)_\Phi$, получаем последовательность $P_{nk}(\lambda_1, \lambda_2)$ ортонормированных относительно Φ полиномов двух переменных с положительным главным коэффициентом. Как и в п. 2, можно построить операторы L_1, L_2 вида (1), перестановочные на $\mathcal{D}$, обозначив $a_{ks}^{n,i} = (\lambda P_{n+1k}, P_{ns})_\Phi$, $b_{ks}^{n,i} = (\lambda P_{nk}, P_{ns})_\Phi$. Если по L_1, L_2 снова построить п. о. последовательность, то получим исходную последовательность $m_{\bar{n}}$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между парами эрмитовых операторов вида (1)—(3) и п. о. последовательностями $m_{\bar{n}}$ $(\bar{n} = (n_1, n_2);\; n_1, n_2 = 0, 1, \ldots)$, каждая из которых задает двумерную проблему моментов. Из теоремы 4 следует, что операторы L_1 и L_2 допускают коммутирующие самосопряженные расширения (возможно, с выходом из пространства) тогда и только тогда, когда связанная с ними двумерная проблема моментов разрешима. Так как не всякая двумерная проблема моментов разрешима [8, 9], то приходим к выводу, что не каждая пара эрмитовых операторов вида (1)—(3) в $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}^{n+1}$, перестановочных на финитных последовательностях из H, допускает расширение до коммутирующих самосопряженных операторов (даже с выходом из пространства).

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М.: Физматгиз, 1961.— 311 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1966.— 295 с.
4. *Kowalsky M. A.* The recursion formulas for orthogonal polynomials in *n* variables // SIAM J. Math. Anal.— 1982.— 13, N 2.— P. 309—316.
5. *Зархина Р. Б.* О двумерной проблеме моментов // Докл. АН СССР.— 1959.— 124, № 4.— С. 743—746.
6. *Березанский Ю. М., Кошманенко В. Д.* Аксиоматическая теория поля в терминах операторных якобиевых матриц // Теорет. и мат. физика.— 1971.— 8, № 2.— С. 175—191.
7. *Гусейнов Г. Ш.* К спектральной теории многопараметрических разностных уравнений второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— № 4.— С. 785—811.
8. *Berg C., Christensen J. P. R., Jensen C. U.* A remark on multidimensional moment problem // Math. Ann.— 1979.— 223.— P. 163—169.
9. *Schmudgen K.* An example of positive polynomial which is not a sum of squares of polinomials // Math. Nachr.— 1979.— 88.— P. 385—390.

Получено 28.01.91