УДК 517.946.9

Ю. В. Жерновий, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

ПРО ОДНОВИМІРНІ ДВОХФАЗНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ СТЕФАНА

New formulations of the inverse nonstationary Stephan problems are considered: a) for $x \in [0, 1]$ (inverse problem IP_1); b) for $x \in [0, \beta(t)]$ with degenerate initial condition (inverse problem IP_β). Necessary conditions for existence and uniqueness of solution for these problems are formulated. In the first phase ($x \in [0, y(t)]$), the solution of the inverse problem is found in the form of a series; in the second phase ($x \in [y(t), 1]$ or $x \in [y(t), \beta(t)]$), it is found in the form of a sum of heat double-layer potentials. As a result of representing the inverse problem as a set of two connected boundary value problems for the heat conduction equation in the domains with moving boundary, it is reduced to the integral Volterra equations of the second kind. An exact solution of the problem IP_β is found for the self-similar motion of the boundaries $x = y(t)$, $x = \beta(t)$.

Розглянуто нові постановки обернених нестаціонарних задач Стефана: а) для $x \in [0, 1]$ (обернена задача $\mathrm{ОЗ}_1$); б) для $x \in [0, \beta(t)]$ при виродженій початковій умові (обернена задача $\mathrm{ОЗ}_\beta$). Сформульовані достатні умови існування та єдиності розв'язку поставлених задач. У першій фазі ($x \in [0, y(t)]$) розв'язок оберненої задачі знайдено у вигляді ряду, а в другій ($x \in [y(t), 1]$ або $x \in [y(t), \beta(t)]$) — у вигляді суми теплових потенціалів подвійного шару. В результаті представлення оберненої задачі у вигляді сукупності двох взаємозв'язаних крайових задач для рівняння теплопровідності в областях з рухомими границями вона зводиться до системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду. Знайдено точний розв'язок задачі $\mathrm{ОЗ}_\beta$ при автомодельному русі границь $x = y(t)$, $x = \beta(t)$.

1. Вступ. Постановка обернених задач. Серед обернених задач математичної фізики [1] важливе прикладне значення мають обернені задачі Стефана [2 – 8]. Суть оберненої нестаціонарної задачі Стефана в різних постановках полягає у знаходженні розподілу температурного поля в середовищі та інших величин (наприклад, температури [2, 3, 8] чи теплового потоку [5, 7, 8] на фіксованій границі середовища або розподілу джерел тепла [6]) за заданим законом руху границі розділу фаз. Найкраще вивчені одновимірні обернені задачі Стефана для півпростору [2, 3, 5], в той же час питання про постановку та розв'язування обернених задач в обмежених областях залишаються відкритими. В даній роботі для обернених нестаціонарних задач Стефана на відрізках з фіксованими кінцями ($x \in [0, 1]$) та з одним рухомим кінцем ($x \in [0, \beta(t)]$) сформульовано достатні умови існування та єдиності розв'язку і запропоновано метод зведення розглядуваних задач до інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.

Перш ніж перейти до постановки обернених задач, розглянемо нестаціонарну задачу Стефана на відрізку [9]:

$$\partial^2 u_1 / \partial x^2 = \partial u_1 / \partial t, \quad 0 < x < y(t), \; t > 0; \tag{1}$$

$$u_1(0, t) = f_1(t) \le 0; \tag{2}$$

$$u_1(y(t), t) = 0; \tag{3}$$

$$a^2 \partial^2 u_2 / \partial x^2 = \partial u_2 / \partial t, \quad y(t) < x < 1, \; t > 0; \tag{4}$$

$$u_2(x, 0) = f(x) \ge 0, \quad y(0) = 0; \tag{5}$$

$$u_2(y(t), t) = 0; \tag{6}$$

$$u_2(1, t) = g_1(t) \ge 0, \quad g_1(0) = f(1); \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=y(t)} - \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \dot{y}(t). \tag{8}$$

Тут функції $u_k(x, t)$ відраховуються в різних шкалах, а саме:

$$u_k(x, t) = \lambda_k c_1 \rho_1 \theta_k / (\lambda_1 p), \quad k = 1, 2,$$

де θ_k — температура в градусах, λ_k — коефіцієнти теплопровідності, c_1, ρ_1 — питома теплоємність і густина, p — прихована теплота фазового переходу. Задача Стефана (1) – (8) полягає у знаходженні температурного поля $u_k(x, t)$ та закону руху границі розділу фаз $x = y(t)$ за заданими початковими (5) і граничними умовами (2), (7) та умовами на рухомій границі (3), (6), (8).

Розглянемо обернену задачу до сформульованої задачі (1) – (8): за заданим законом руху границі розділу фаз

$$x = y(t) \geq y(0) = 0, \ 0 \leq t \leq T, \ 0 < y(t) \leq 1,$$

розподілом температури в початковий момент часу $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, та її значенням $g_1(t) \geq 0$, $g_1(0) = f(1)$ на границі $x = 1$ знайти значення температури при $x = 0$ (тобто, функцію $f_1(t)$). В більш загальному плані поставлена обернена задача (для скорочення позначимо її через ОЗ$_1$) полягає у знаходженні температурного поля $u_k(x, t)$ у всій області $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$ (в тому числі і на границі $x = 0$).

Для задачі Стефана (1) – (8) можливі й інші варіанти постановки обернених задач: а) за заданими функціями $y(t)$, $f(x)$ і $f_1(t)$ знайти $u_k(x, t)$ (в тому числі і $g_1(t)$); б) задано $y(t)$, $f_1(t)$ і $g_1(t)$, знайти $u_k(x, t)$ і $f(x)$.

Розглянемо рівняння теплопровідності (4) в області з рухомими границями

$$a^2 \, \partial^2 u_2 / \partial x^2 = \partial u_2 / \partial t, \quad y(t) < x < \beta(t), \ t > 0; \tag{9}$$

причому вважатимемо, що $y(0) = \beta(0) = 0$. В цьому випадку початкова умова (5) не потрібна, оскільки відрізок $x \in [y(t), \beta(t)]$ при $t = 0$ вироджується в одну точку $x = 0$, і при постановці прямої задачі необхідно задавати дві умови на невідомій рухомій границі:

$$u_2(\beta(t), t) = g_1(t) \geq 0, \quad t > 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(\beta(t), t) = g_2(t) \geq 0, \quad t > 0. \tag{11}$$

Задача Стефана (1) – (3), (6), (8) – (11) з двома невідомими рухомими границями і виродженою початковою умовою відноситься до класу так званих локальних задач Стефана [10]. Задачі такого типу (при наявності внутрішніх джерел тепла) виникають при математичному моделюванні процесів кріодеструкції біологічних тканин.

Обернену задачу до локальної задачі Стефана сформулюємо таким чином (задача ОЗ$_\beta$): за заданими функціями $y(t)$, $\beta(t)$, $g_1(t)$ знайти температурне поле $u_k(x, t)$ (в тому числі $f_1(t)$ і $g_2(t)$). Можливі інші варіанти постановки оберненої задачі до задачі (1) – (3), (6), (8) – (11), наприклад: задано $y(t)$, $\beta(t)$, $g_2(t)$, знайти $u_k(x, t)$ (в тому числі $f_1(t)$ і $g_1(t)$).

Позначивши

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = Q(t), \quad t > 0, \tag{12}$$

умову Стефана (8) запишемо у вигляді

$$Q(t) = \dot{y}(t) + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=y(t)}. \tag{13}$$

Тепер кожну з обернених задач ОЗ$_1$ і ОЗ$_\beta$ можна розбити на дві взаємозв'язані задачі теплопровідності в областях з рухомими границями відносно функцій

$u_1(x, t)$ і $u_2(x, t)$ відповідно. Для знаходження $u_1(x, t)$ в обох випадках маємо задачу (1), (3), (12), де $Q(t)$ виражається за допомогою умови (13) через функцію $u_2(x, t)$, яку у випадку задачі $ОЗ_1$ шукаємо як розв'зок задачі теплопровідності (4) – (7) в області $y(t) \le x \le 1$, $0 \le t \le T$, а у випадку задачі $ОЗ_\beta$ для знаходження $u_2(x, t)$ маємо крайову задачу (9), (6), (10) в області з рухомими границями $y(t) \le x \le \beta(t)$, $0 \le t \le T$.

2. Про єдиність розв'язку задач $ОЗ_1$, $ОЗ_\beta$. Розглянемо множину M_1 функцій $u(x, t)$, неперервних в області $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le T$ і аналітичних в підобласті $0 \le x \le y(t)$, $0 < t \le T$, з аналітичними похідними $\partial u / \partial x \,|_{x=y(t)-0}$, $\partial u / \partial x \,|_{x=y(t)+0}$. Покажемо, що якщо розв'язок задачі $ОЗ_1$ існує на множині функцій M_1 (згідно з (13) це можливо лише тоді, коли $y(t)$ — аналітична функція), то він єдиний.

Єдиність неперервного розв'язку $u_2(x, t)$ задачі теплопровідності (4) – (7) в області $y(t) \le x \le 1$, $0 \le t \le T$, випливає безпосередньо з принципу максимального значення [11] за умови неперервності функцій $f(x)$ і $g_1(t)$. Оскільки $u_2(x, t)$ визначається однозначно, то аналітична при $0 < t \le T$ (за припущенням) функція $Q(t)$ також може бути однозначно вираженою за допомогою умови (13). Тому єдиність розв'язку $u_1(x, t)$ задачі (1), (3), (12) для рівняння теплопровідності в області з рухомою границею безпосередньо випливає з теореми Ковалевської для задачі Коші [11], оскільки на границі задані $u_1(y, t)$ і $\partial u_1(y, t) / \partial x$. Те, що границя рухома, можна усунути, зробивши заміну змінних $\eta = y(t) - x$, $t = t$, після якої рівняння (1) залишається в класі тих рівнянь, для яких доведена теорема Ковалевської. Таким чином, обернена задача $ОЗ_1$ може мати не більше одного розв'язку в розглядуваному класі функцій M_1. Але, враховуючи, що теорема Ковалевської гарантує існування і єдиність розв'язку лише в досить малому околі, про єдиність розв'язку поки що можемо говорити лише для $0 < t \le T = T_\varepsilon$, де T_ε задовольняє умови $T_\varepsilon < \varepsilon$, $y(T_\varepsilon) < \varepsilon$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Розглянемо обернену задачу $ОЗ_\beta$. Покажемо спочатку, що для однозначного визначення розв'язку рівняння теплопровідності (9) досить задати значення цього розв'язку на заданих гладких кривих $x = y(t)$, $x = \beta(t)$, $y(0) = \beta(0) = 0$, тобто граничні умови (6) і (10). Нехай $u_{21}(x, t)$, $u_{22}(x, t)$ — два різні розв'язки крайової задачі (9), (6), (10). Розглянемо функцію $v(x, t) = u_{21}(x, t) - u_{22}(x, t)$, яка, очевидно, задовольняє нульові граничні умови (6), (10) та рівняння теплопровідності (9). Розглянемо інтеграл

$$I(t) = \int_{y(t)}^{\beta(t)} \frac{v^2(x, t)}{2} dx.$$

Для нього

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\left[v^2(\beta(t), t)\dot\beta(t) - v^2(y(t), t)\dot y(t)\right] + \int_{y(t)}^{\beta(t)} v \frac{dv}{dt} dx =$$

$$= a^2 \int_{y(t)}^{\beta(t)} v \frac{d^2 v}{dx^2} dx = a^2 v \frac{dv}{dx}\bigg|_{y(t)}^{\beta(t)} - a^2 \int_{y(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = -a^2 \int_{y(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \le 0.$$

Це значить, що функція $I(t)$ спадає при $t > 0$. Але, оскільки $y(0) = \beta(0) = 0$, то

$I(0)=0$ і, отже, $I(t)\le 0$ для $t>0$. Згідно з означенням $I(t)\ge 0$, тому $I(t)\equiv 0$, а значить, і $v(x,t)=u_{21}(x,t)-u_{22}(x,t)\equiv 0$, звідки випливає єдиність розв'язку задачі (9), (6), (10). Припускаючи далі існування розв'язку задачі ОЗ_β в класі M_β функцій $u(x,t)$, неперервних в області $0\le x\le \beta(t)$, $0<t\le T$, обмеженій гладкою кривою $x=\beta(t)$, і аналітичних в підобласті $0\le x\le y(t)$, $0<t\le T$, з аналітичними похідними $\partial u/\partial x\,|_{x=y(t)-0}$, $\partial u/\partial x\,|_{x=y(t)+0}$, переконаємося у справедливості твердження про єдиність розв'язку задачі ОЗ_β в цілому за умови аналітичності функції $y(t)$, оскільки єдиність розв'язку задачі (1), (3), (12) доведено раніше (при $T=T_\varepsilon$).

Покажемо, що за умови аналітичності функцій $y(t)$ і $Q(t)$ в точках відкритої множини $G\subset[0,\infty)$ для $x\in[0,x_0]$, де x_0 — довільне число, ряд

$$u_1(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{d^k}{dt^k}\left[(y(t)-x)^{2k+1}Q(t)\right] \tag{14}$$

збігається абсолютно і рівномірно на множині $D\times[0,x_0]$, де D — будь-яка компактна підмножина G.

Дійсно, розкладемо $y(t)$ і $Q(t)$ в степеневі ряди в околі довільної точки $t_0\in G$. Нехай r_1, r_2 — радіуси збіжності цих рядів, записаних за степенями $t-t_0$. Оскільки радіуси збіжності рядів для $y(t)$ і $y(t)-x$ співпадають між собою, то $r=\min(r_1,r_2)$ — радіус збіжності аналогічного ряду для функції $F(t;x)=(y(t)-x)^{2k+1}Q(t)$. Нехай $t=\operatorname{Re} z$, тоді функція $F(z;x)$ — аналітичне продовження $F(t;x)$ у крузі $K_{t_0}=\{z: |z-t_0|<r\}$. Для кожного $t\in D$ існує круг збіжності K_t з центром у точці t радіуса $r_t>0$. Очевидно, що $D\subset\bigcup_t K_t$ і $\inf\limits_t r_t>r_0>0$, де r_0 залежить від вибору D. Використовуючи формулу Коші — Адамара, для довільного δ, $0<\delta<r_0$, і достатньо великих k можемо записати нерівність

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}\left[(y(t)-x)^{2k+1}Q(t)\right]\right| < \frac{k!}{(r_0-\delta)^k}.$$

Таким чином, рівномірно відносно всіх $(t;x)\in D\times[0,x_0]$

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{d^k}{dt^k}\left[(y(t)-x)^{2k+1}Q(t)\right]\right| <$$

$$< \sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(r_0-\delta)^{-k}}{(2k+1)2k\ldots(k+1)} < \sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(r_0-\delta)^{-k}}{k!}.$$

Сума числового ряду в правій частині останньої нерівності прямує до нуля при $k_0\to\infty$, що й доводить наше твердження.

Аналогічно [12], можна показати, що функція (14) є розв'язком диференціального рівняння (1), який задовольняє граничні умови (3), (12). Поклавши $D=[\bar t, T]$ для довільного $\bar t>0$, $x_0=x_0(t)=y(t)$, переконаємося у справедливості твердження про рівномірну і абсолютну збіжність ряду (14) в області $0\le x\le y(t)$, $0<\bar t\le t\le T$ для аналітичних при $t\in(0,T)$ функцій $y(t)$ і $Q(t)$. При $t=0$ відрізок $x\in[0,y(t)]$ вироджується в одну точку $x=0$ і задача (1), (3), (12) втрачає зміст. З теореми Вейєрштрасса випливає, що функція (14) як сума ряду, складеного з аналітичних функцій, аналітична в розглядуваній області і ряд (14) можна почленно диференціювати довільне число разів. Єдиність побудованого розв'язку $u_1(x, t)$ в класі аналітичних функцій випливає з теореми єдиності для аналітичних функцій. Таким чином, функція (14) є єдиним розв'язком задачі (1), (3), (12) у класі аналітичних функцій, і обмеження, що $T = T_\varepsilon < \varepsilon$, яке виникло з теореми Ковалевської при доведенні єдиності розв'язку задач ОЗ$_1$, ОЗ$_\beta$, можемо зняти.

3. Зведення задач ОЗ$_1$, ОЗ$_\beta$ до інтегральних рівнянь. Зображення розв'язку задачі (1), (3), (12) у вигляді (14) дозволяє звести розв'язування обернених задач ОЗ$_1$ і ОЗ$_\beta$ до знаходження функцій $u_2(x, t)$ і $Q(t)$.

Зупинимося на знаходжені $u_2(x, t)$ і $Q(t)$ у випадку задачі ОЗ$_1$. Функція

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(z) e^{-(x-z)^2/4a^2 t} dz + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t \frac{x - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{x - 1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_2(\tau) d\tau \right\} \tag{15}$$

задовольняє диференціальне рівняння (4) і початкову умову (5) для довільних неперервних функцій $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ [13]. Підставляючи (15) в граничні умови (6), (7) та використовуючи (13), одержуємо систему рівнянь для знаходження $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ і $Q(t)$:

$$\mu_1(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^t \frac{y(t) - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \frac{y(t) - 1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-1]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_2(\tau) d\tau \right\} = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(x) e^{-\frac{[y(t)-x]^2}{4a^2 t}} dx;$$

$$\tag{16}$$

$$\mu_2(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1 - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[1-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_1(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(x) e^{-(1-x)^2/4a^2 t} dx - 2a^2 g_1(t);$$

$$Q(t) = \dot{y}(t) - \frac{1}{4a^3 t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [y(t) - x] f(x) e^{-\frac{[y(t)-x]^2}{4a^2 t}} dx - \frac{\mu_1(t)\dot{y}(t)}{4a^4} -$$

$$- \frac{\mu_1(0)}{2a^3 t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2 t}{4a^2 t}} - \frac{1}{4a^5\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y(t) - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \dot{y}(\tau)\mu_1(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{\mu}_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-3/2} e^{-\frac{[y(t)-1]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_2(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{[y(t) - 1]^2}{8a^5\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-5/2} e^{-\frac{[y(t)-1]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu_2(\tau) d\tau. \tag{17}$$

Таким чином, задача теплопровідності (4) – (7) зведена до системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра II роду (16) відносно функцій $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$. За умови, що функція $y(t)$ має неперервну похідну при $t > 0$, ця система має єдиний розв'язок [14], який можна знайти, наприклад, методом послідовних наближень, попередньо виключивши $\mu_2(t)$ за допомогою другого рівняння.

Розглядаючи обернену задачу ОЗ_β з двома рухомими границями, $u_2(x, t)$ шукаємо у вигляді суми теплових потенціалів:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\left[\int_0^t \frac{x - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_1(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{x-\beta(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\beta(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_2(\tau)d\tau\right],$$

кожен з яких задовольняє диференціальне рівняння (9) при довільних неперервних $\nu_1(\tau)$, $\nu_2(\tau)$. Використовуючи умови (6), (10) на рухомих границях та співвідношення (13), одержуємо систему двох інтегральних рівнянь Вольтерра II роду для знаходження $\nu_1(\tau)$, $\nu_2(\tau)$:

$$\nu_1(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left[\int_0^t \frac{y(t) - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_1(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{y(t)-\beta(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-\beta(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_2(\tau)d\tau\right] = 0,$$
$$\nu_2(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left[\int_0^t \frac{\beta(t) - \beta(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[\beta(t)-\beta(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_2(\tau)d\tau + \right. \tag{18}$$
$$\left. + \int_0^t \frac{\beta(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[\beta(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_1(\tau)d\tau\right] = -2a^2 g_1(t),$$

яка має єдиний розв'язок за умови неперервної диференційовності функцій $y(t)$, $\beta(t)$, а також формулу для обчислення $Q(t)$:

$$Q(t) = \dot{y}(t) - \frac{\nu_1(t)}{2a^4}\dot{y}(t) - \frac{\nu_1(0)}{2a^3\sqrt{\pi t}} e^{-y^2(t)/4a^2 t} -$$
$$- \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\dot{\nu}_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau -$$
$$- \frac{1}{8a^5\sqrt{\pi}}\left\{2\int_0^t \frac{y(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \dot{y}(\tau)\nu_1(\tau)d\tau - 2a^2\int_0^t (t-\tau)^{-3/2} \times\right.$$
$$\left. \times\, e^{-\frac{[y(t)-\beta(t)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{[y(t)-\beta(\tau)]^2}{(t-\tau)^{5/2}} e^{-\frac{[y(t)-\beta(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu_2(\tau)d\tau\right\}. \tag{19}$$

Підсумовуючи міркування, викладені в пп. 2, 3, можемо сформулювати такі твердження.

Теорема 1. *Якщо існує така аналітична при* $t \in (0, T)$ *функція* $y(t)$, *такі неперервні відповідно при* $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$ *функції* $f(x)$ і $g_1(t)$, *для яких функція* $Q(t)$, *що визначається за формулою* (17), *де* $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — *розв'язки системи інтегральних рівнянь* (16), *аналітична при* $t \in (0, T)$, *то обернена задача* $ОЗ_1$ *має розв'язок в області* $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le T$ *і притому єдиний у класі функцій* M_1.

Теорема 2. *Якщо існують такі функції: аналітична при* $t \in (0, T)$ *функція* $y(t)$, *неперервно диференційовна при* $t \in [0, T]$ *функція* $\beta(t)$ *і неперервна при* $t \in [0, T]$ *функція* $g_1(t)$, *для яких функція* $Q(t)$, *що визначається за формулою* (19), *де* $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ — *розв'язки системи інтегральних рівнянь* (18), *аналітична при* $t \in (0, T)$, *то обернена задача* $ОЗ_\beta$ *має розв'язок в області* $0 \le x \le \beta(t)$, $0 \le t \le T$ *і притому єдиний у класі функцій* M_β.

4. Про розв'язок задачі $\mathbf{ОЗ_\beta}$ **при автомодельному законі руху границі розділу фаз.** Нехай $y(t) = \alpha\sqrt{t}$ (аналітична функція при $t > 0$), $\beta(t) = \beta\sqrt{t}$, $\beta > \alpha > 0$; $g_1(t) \equiv C > 0$. Тоді розв'язками системи інтегральних рівнянь (18) є постійні

$$\nu_1(t) \equiv \nu_1 = \frac{a^2 C\left[\beta\sqrt{\pi}e^{\beta^2/4a^2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}\right)\left(1-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)-2a\left(1+\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)\right]}{\left[\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right]\left[2a+\sqrt{\pi}\alpha e^{\alpha^2/4a^2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)\right]};$$

$$\nu_2(t) \equiv \nu_2 = -a^2 C\left(1-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)\Big/\left(\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right); \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx.$$

Таким чином,

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\left[\nu_1\int_0^t \frac{x-\alpha\sqrt{\tau}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\alpha\sqrt{\tau})^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau + \nu_2\int_0^t \frac{x-\beta\sqrt{\tau}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\beta\sqrt{\tau})^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau\right] =$$

$$= \frac{\nu_1}{4a^3}\left[2a+\sqrt{\pi}\alpha\left(1+\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)e^{\alpha^2/4a^2}\right]\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) +$$

$$+ \frac{\nu_2}{4a^3}\left[-2a\left(1+\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\sqrt{\pi}\beta\left(1+\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}\right)e^{\beta^2/4a^2}\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] =$$

$$= C\left(\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)\Big/\left(\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right),$$

і з (13) знайдемо аналітичну при $t > 0$ функцію

$$Q(t) = Q_0/\sqrt{t}, \quad Q_0 = \frac{\alpha}{2} + Ce^{-\alpha^2/4a^2}\Big/\left[\sqrt{\pi}a\left(\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}-\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2a}\right)\right].$$

Отже, з (14) маємо

$$f_1(t) = u_1(0, t) = -Q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{d^k t^k}{dt^k} =$$

$$= -Q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = -Q_0 \sqrt{\pi} e^{\alpha^2/4} \operatorname{erf} \frac{\alpha}{2} = C_1 < 0;$$

$$u_1(x, t) = -Q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{\left(\alpha\sqrt{t} - x\right)^{2k+1}}{\sqrt{t}} \right] =$$

$$= C_1 \left(\operatorname{erf}(\alpha/2) - \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{t}\right)\right) / \operatorname{erf}(\alpha/2).$$

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. *Мартынов Г. А.* О распространении тепла в двухфазной среде при заданном законе движения границы фаз // Журн. техн. физики. – 1955. – **25**, № 10. – С. 1754 – 1767.
3. *Мартынов Г. А.* О решении обратной задачи Стефана для полупространства при линейном законе движения границы фаз // Докл. АН СССР. – 1956. – **109**, № 2. – С. 279 – 282.
4. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133 – 185.
5. *Исакова К. С.* Решение обратной сферической задачи Стефана при автомодельном законе движения границы // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 5. – С 12 – 16.
6. *Вигак В. М., Жерновой Ю. В.* О решении одномерной обратной задачи Стефана // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 146 – 150.
7. *Жерновой Ю. В.* О решении обратной задачи Стефана в случае осесимметричного температурного поля // Нестационарные задачи Стефана. – Киев, 1988. – С. 35 – 40. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
8. *Жерновой Ю. В.* О решении однофазной обратной задачи Стефана со сферической симметрией // Математическое моделирование физических процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 57 – 61.
9. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о существовании решения задачи Стефана // Докл. АН СССР. – 1948. – **62**, № 2. – С. 195 – 198.
10. *Березовский А. А.* Математическая модель плоской криодеструкции биоткани. – Киев, 1984. – 31 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.50).
11. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
12. *Борисов В. Т., Любов Б. Я., Темкин Д. Е.* О расчете кинетики затвердевания металлического слитка при различных температурных условиях на его поверхности // Докл АН СССР. – 1955. – **104**, № 2. – С. 223 – 228.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4-х т. – М.: Наука, 1981. – Т. 4, ч. II. – 552 с.

Получено 02.12.91