УДК 517. 53

А. А. Довгошей, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ С "ПРОМЕЖУТОЧНОЙ" ТОПОЛОГИЕЙ. КЕРН-ФУНКЦИЯ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

A space of holomorphic functions is considered. The topology of the space in taken to be "intermediate" between the topology of uniform convergence and the topology of uniform convergence on compact sets. Properties of systems of polynomials orthonormal in a Hilbert space with this topology are studied.

Розглядається простір голоморфних функцій з топологією, "проміжною" між топологією рівномірної збіжності та топологією рівномірної збіжності на компактах. Вивчаються властивості системи поліномів, ортонормованих у просторі Гільберта з цією топологією.

Пусть G — произвольная ограниченная область комплексной плоскости, $\mathrm{Hol}\,(G)$ — пространство голоморфных в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах из G, $H^\infty(G)$ — алгебра ограниченных голоморфных в G функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in G\}$, $Q(G)$ — некоторое топологическое пространство функций, голоморфных в G с топологией τ.

Будем считать, что $Q(G)$ содержит все ограниченные голоморфные функции $H^\infty(G) \subseteq Q(G) \subseteq \mathrm{Hol}\,(G)$ и удовлетворяет следующим условиям:

A_1. Топология, индуцированная из $Q(G)$ в $H^\infty(G)$, слабее (грубее) топологии, порожденной нормой $\|f\|_\infty$.

A_2. Заданная в $Q(G)$ топология τ сильнее (тоньше) топологии, индуцированной в $Q(G)$ из $\mathrm{Hol}\,(G)$.

Далее пространства $Q(G)$, для которых справедливы условия A_1 и A_2, будем называть пространствами с промежуточной топологией. Класс таких пространств весьма обширен. Можно показать, что этому классу принадлежат пространства Харди, Бергмана, BMOA, классы Смирнова E^p, весовые аналоги этих классов, их пересечения и другие пространства.

В настоящей работе установлены некоторые общие свойства систем полиномов, ортонормированных (ОН-систем) в гильбертовых пространствах с промежуточной топологией.

Большинство теорем, установленных ниже, известны для хорошо изученных конкретных пространств с промежуточной топологией [1, 2]. Основная задача работы — исследование ортогональных полиномов при максимально общих предположениях: произвольное пространство Гильберта и произвольная область G. Некоторые теоремы об аппроксимации регулярных функций в пространствах с промежуточной топологией опубликованы автором в работах [3, 4].

Прежде чем переходить к изучению ОН-систем, покажем, что условия A_1, A_2 для линейных нормированных пространств могут быть заменены эквивалентными, но во многих случаях более удобными условиями.

Утверждение 1. *Пусть* $Q(G)$ — *линейное нормированное пространство с нормой* $\|f\|_Q$, $H^\infty(G) \subseteq Q(G) \subseteq \mathrm{Hol}\,(G)$. *Тогда*:

условие A_1 *выполняется тогда и только тогда, когда существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что при всех* $f \in H^\infty(G)$ *справедливо неравенство*

$$\|f\|_Q \le c_1 \|f\|_\infty; \tag{1}$$

условие A_2 *выполняется тогда и только тогда, когда для любого* K*-компакта, лежащего в области* G, $K \Subset G$, *найдется постоянная* $c_2 = c_2(K)$

такая, что при всех $f \in Q(G)$ справедливо неравенство

$$\max\{|f(z)| : z \in K\} \le c_2(K)\|f\|_Q. \tag{2}$$

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow A_1$, $(2) \Rightarrow A_2$ — очевидны. Докажем, что $A_1 \Rightarrow (1)$. Рассмотрим пространство $Q(G)$ с нормой $\|f\|_Q$ и $H^\infty(G)$ с нормой $\|f\|_\infty$. Вложение $in_1 : H^\infty(G) \to Q(G)$ является линейным и непрерывным в силу A_1 отображением. Следовательно, оно ограничено и в качестве c_1 можно взять норму оператора вложения — in_1. Очевидно, что $\|in_1\|$ — наименьшая константа, для которой неравенство (1) справедливо. Чтобы доказать импликацию $A_2 \Rightarrow (2)$, достаточно рассмотреть на $\mathrm{Hol}\,(G)$ новую норму (или полунорму в случае конечного K)

$$\|f\|_K = \max\{|f(z)| : z \in K\}$$

и отображение вложения $in_2 : Q(G) \to \mathrm{Hol}\,(G)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $Q(G)$ последовательность линейно независимых элементов $1,\ z,\ z^2, \ldots z^n, \ldots$. Применив к этой последовательности процесс ортогонализации Шмидта (см., например, [1, с. 14]), получим ОН-систему многочленов $\{\hat P_n\}_{n=0}^\infty$, которая и является основным объектом исследования данной работы. Система $\{\hat P_n\}_{n=0}^\infty$ имеет, очевидно, следующие свойства:

$$\text{i) } \deg \hat P_n = n; \qquad \text{ii) } \langle \hat P_n, \hat P_m \rangle_Q = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \ne m, \end{cases}$$

где $\langle \hat P_n, \hat P_m \rangle_Q$ — скалярное произведение многочленов в пространстве $Q(G)$. Свойства i), ii) определяют систему $\{\hat P_n\}_{n=0}^\infty$ с точностью до фазовых множителей $\exp(i\beta_n)$, $\operatorname{Im}\beta_n = 0$. В дальнейшем, следуя [5], старший коэффициент многочлена $\hat P_n$ будем обозначать через μ_n и считать, что $\mu_n > 0$. Имеем

$$\hat P_n(z) = \mu_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} z^k.$$

Для ортогональных в $Q(G)$ многочленов с единичным старшим коэффициентом используем обозначение $\tilde P_n$ [5]: $\tilde P_n(z) = \frac{1}{\mu_n}\hat P_n(z)$.

Приведенные ниже утверждения 2 и 3 показывают, что в любом гильбертовом пространстве с промежуточной топологией можно ввести аналог керн-функции Бергмана. Пусть $\{\hat f_k\}_{k=0}^\infty$ — произвольная ОН-система в $Q(G)$.

Утверждение 2. *Билинейный ряд*

$$K(\xi, z) = \sum_{j=0}^\infty \hat f_j(\xi)\overline{\hat f_j(z)} \tag{3}$$

при любом фиксированном z из G сходится в $Q(G)$ к некоторой функции $K_z(\xi) \in Q(G)$ и

$$\|K_z\|_Q = \left(\sum_{j=0}^\infty \left|\hat f_j(z)\right|^2\right)^{1/2} = (K(z,z))^{1/2}. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$K_{zn}(\xi) = K_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^n \hat f_k(\xi)\overline{\hat f_k(z)}.$$

Квадрат нормы этой суммы

$$(\| K_{zn} \|_Q)^2 = \langle K_{zn}(\xi), K_{zn}(\xi) \rangle_Q = \sum_{j=0}^{n} \left| \hat{f}_j(z) \right|^2 = K_n(z, z). \tag{5}$$

В силу неравенства (2) имеем $| K_{zn}(z) | \le S(z) \| K_{zn} \|_Q$, где $S(z)$ — постоянная, не зависящая от n. Тогда

$$(\| K_{zn} \|_Q)^2 \ge (S(z))^{-2} | K_n(z, z) |^2 = (S(z))^{-2} (\| K_{zn} \|_Q)^4.$$

Следовательно, при всех натуральных n

$$\sum_{j=0}^{n} \left| \hat{f}_j(z) \right|^2 = (\| K_{zn} \|_Q)^2 \le (S(z))^2.$$

Таким образом, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left| \hat{f}_j(z) \right|^2$ сходится при любом $z \in G$. Так как

$$\| K_{zn} - K_{zm} \|_Q = \left(\sum_{j=n}^{m} \left| \hat{f}_j(z) \right|^2 \right)^{1/2},$$

то ряд (3) сходится по норме $Q(G)$. Равенство (4) следует из (5) и непрерывности функции $f \to \| f \|_Q$.

Нетрудно заметить, что в случае полноты системы $\{\hat{f}_k\}_{k=0}^{\infty}$ (ПОН-системы) ядро (3) имеет свойство восстановления.

Утверждение 3. *Пусть $Q(G)$ — гильбертово пространство с промежуточной топологией. Если $f \in Q(G)$, $z_0 \in G$, $\{\hat{f}_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ПОН-система в $Q(G)$, то*

$$f(z_0) = \langle f(\xi), K(\xi, z_0) \rangle_Q. \tag{6}$$

Доказательство стандартно. В силу полноты

$$f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f(\xi), \hat{f}_k(\xi) \rangle_Q \hat{f}_k(z_0) = \lim_{n \to \infty} \langle f(\xi), K_n(\xi, z_0) \rangle_Q, \tag{7}$$

поскольку $\langle f(\xi), \hat{f}_k(\xi) \rangle_Q$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\hat{f}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Переходя к пределу в (7), получаем (6).

Замечание. Из утверждений 2 и 3 следует, что для любых двух полных ортонормированных в $Q(G)$ систем $\{\hat{g}_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\hat{f}_k\}_{k=0}^{\infty}$ и любых двух точек z и ξ из G справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k(\xi) \overline{\hat{g}_k(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k(\xi) \overline{\hat{f}_k(z)}. \tag{8}$$

Таким образом, ядро (3) не зависит от выбора конкретной ПОН-системы. В этом случае $K(\xi, z)$ будем называть керн-функцией (этим термином часто обозначают билинейную форму (3) для пространства функций, интегрируемых с квадратом по площади области). В частности, если полиномы плотны в $Q(G)$, то

$$K(\xi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_k(\xi) \overline{\hat{P}_k(z)}, \tag{9}$$

где $\{ \hat{P}_k \}$ — последовательность полиномов, определяемая равенствами i), ii).

Отметим хорошо известную [1] в частных случаях связь керн-функции (3) с решением соответствующей экстремальной задачи.

Пусть z_0 — фиксированная точка области G, $M =: \{f \in Q(G) : f(z_0) = 1\}$.

Утверждение 4. *Экстремальная задача*

$$\|f\|_Q - \min!, \quad f \in M,$$

имеет единственное решение f_0. *Это решение связано с керн-функцией* $K(\xi, z)$ *следующими соотношениями*:

$$f_0(\xi) = \frac{K(\xi, z_0)}{K(z_0, z_0)}, \quad K(\xi, z_0) = \frac{f_0(\xi)}{\left(\|f_0\|_Q\right)^2}.$$

Доказательство. В силу (6) $f(\xi) = \langle f(z), K(z, \xi)\rangle_Q$. Из неравенств Шварца следует

$$1 = f(z_0) \le \|f\|_Q \sqrt{K(z_0, z_0)}.$$

Равенство здесь справедливо только для функций вида $f_0(\xi) = cK(\xi, z_0)$, где c — постоянная. Так как $f_0(z_0) = 1$, то

$$c = \frac{1}{K(z_0, z_0)}, \quad f_0(\xi) = \frac{K(\xi, z_0)}{K(z_0, z_0)}.$$

Используя равенство (4), получаем

$$\|f_0\|_Q = [K(z_0, z_0)]^{-1/2}, \quad K(\xi, z_0) = \frac{f_0(\xi)}{\left(\|f_0\|_Q\right)^2}.$$

Рассмотрим теперь множество $M_n =: \{P_n : P_n(z_0) = 1, \ \deg P_n \le n\}$. Это полиномы, принадлежащие M и имеющие степень не выше n. Пусть $K_n(\xi, z)$ — n-я частичная сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_k(\xi)\overline{\hat{P}_k(z)}$.

Утверждение 5. *Экстремальная задача*

$$\|P_n\|_Q - \min!, \quad P_n \in M_n,$$

имеет единственное решение $P_n^0(\xi)$. *Это решение связано с ядром*

$$K_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n} \hat{P}_k(\xi)\overline{\hat{P}_k(z)}$$

соотношениями

$$P_n^0(\xi) = \frac{K_n(\xi, z_0)}{K_n(z_0, z_0)}, \quad K_n(\xi, z_0) = \frac{P_n^0(\xi)}{(\|P_n^0\|_Q)^2}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что ядро $K_n(\xi, z)$ имеет свойство восстановления на множестве полиномов степени не выше n, и воспользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве утверждения 4.

Замечание. Очевидно, что для справедливости утверждения 5 не существенно, будет ли область G односвязна и плотны ли полиномы в $Q(G)$.

Рассмотрим теперь один конкретный класс пространств с промежуточной топологией — пространства Харди.

Пусть z_0 — некоторая фиксированная точка области G. Не уменьшая общности считаем, что $0 \in G$ и $z_0 = 0$. Аналитическая в области G функция $f(\xi)$ принадлежит классу Харди $H^p(G)$, $p > 0$, если $|f(\xi)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в G. При $p \ge 1$ в $H^p(G)$ определяется норма, а при $0 < p < 1$ — метрика

$$\|f\|_{H^p} =: [U_f(0)]^{1/p}, \quad \rho(f, g) =: (\|f - g\|_{H^p})^p = U_{f, g}(0), \tag{10}$$

где U_f и U_{fg} — наилучшие гармонические мажоранты $|f|^p$ и $|f-g|^p$ [6].

Для ограниченной односвязной области G положим, что φ — функция Римана, конформно и однолистно отображающая G на единичный круг $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$, а ψ — функция, обратная к φ, $\psi=\varphi^{-1}$. В этом случае пространство $H^p(G)$, $0<p<\infty$, изометрично изоморфно H^p-пространству Харди в единичном круге. Изометрическим изоморфизмом является отображение (см. [6])

$$F: H^p(G)\to H^p,\quad \forall g\in H^p(G)\ F(g)=g\circ\psi.$$

В соответствии с этим норма $H^2(G)$ порождается скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{H^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi(e^{i\theta}))\overline{g(\psi(e^{i\theta}))}\,d\theta. \tag{11}$$

Замыкание множества полиномов в пространстве $H^2(G)$ обозначим через $PH^2(G)$. Если $\Gamma=\partial G$, а ω — гармоническая мера на Γ относительно точки $0\in G$, то $PH^2(G)$ можно рассматривать как замкнутое подпространство из $L^2(d\omega,\Gamma)$. Нетрудно доказать, что для любых f и g, принадлежащих $PH^2(G)$,

$$\langle f,g\rangle_{H^2}=\int_{\Gamma}f(\xi)\overline{g(\xi)}\,d\omega(\xi). \tag{12}$$

Если G не является односвязной, то, используя вместо функции Римана отображение G на универсальную накрывающую поверхность, можно убедиться в том, что существует изометрический изоморфизм пространства $H^2(G)$ и некоторого замкнутого подпространства пространства H^2 в круге. Формула (12) справедлива и в этом случае. Почти очевидно, что $H^p(G)$ — пространство с промежуточной топологией: неравенство (1) следует из определения нормы в $H^p(G)$ (см. (10)), а неравенство (2) — из конформной инвариантности нормы в $H^p(G)$ и неравенства Гарнака для гармонических функций.

Для односвязной области G из (11) (и плотности полиномов в H^2) следует, что последовательность натуральных степеней функции Римана $\{(\varphi(z))^n\}_{n=0}^{\infty}$ будет ПОН-системой в $H^2(G)$. Таким образом, керн-функция $K(\xi,z)$ в $H^2(G)$ имеет вид

$$K(\xi,z)=\sum_{j=0}^{\infty}(\varphi(\xi))^j(\overline{\varphi(z)})^j=[1-\overline{\varphi(z)}\varphi(\xi)]^{-1}.$$

Доказанные выше общие свойства керн-функции влекут, в частности, следствия *1 и 2*.

Как известно, односвязная область G называется областью Каратеодори, если ее граница Γ является также границей неограниченной компоненты дополнения $\overline{G}$ [1].

***Следствие* 1.** *Если G — область Каратеодори, а $\{\hat{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов, ортонормированных относительно гармонической меры ω, то билинейный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}_k(\xi)\overline{\hat{P}_k(z)}$ сходится по норме пространства $H^2(G)$ к функции $(1-\overline{\varphi(z)}\varphi(\xi))^{-1}$.*

Доказательство следует из соотношения (9) и того, что полиномы плотны в $H^p(G)$ для любой области Каратеодори [7].

В следующем предположении установлено точное значение постоянной

$c_2 = c_2(K)$ неравенства (2) для случая $Q(G) = H^p(G)$ и произвольной односвязной области G.

Пусть z — фиксированная точка односвязной области G, $0 < p < \infty$, $S_p =:$ $=: \{f \in H^p(G) : \|f\|_{H^p} = 1\}$, $\not{k}^{(p)}_{\min}(z) =: \sup\{|f(z)| : f \in S_p\}$.

Следствие 2. *При любом p из $(0, \infty)$ имеем $\not{k}^{(p)}_{\min}(z) = (1 - |\varphi(z)|^2)^{-1/p}$. Это значение достигается при $f_0(\xi) = (1 - \varphi(\xi)\overline{\varphi(z)})^{-2/p}$, т. е.*

$$\sup\left\{ \frac{|f(z)|}{\|f\|_{H^p}} : f \in H^p(G) \right\} = \frac{|f_0(z)|}{\|f_0\|_{H^p}} = (1 - |\varphi(z)|^2)^{-1/p}.$$

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу $|f(z)| - \min!$, $f \in S_2$. (В этом случае, т. е. при $p = 2$, рассматриваемая задача двойственна к задаче из утверждения 4.)

Если $f_0(\xi)$— экстремальная функция задачи из утверждения 4, то $f_0(\xi) / \|f_0\|_{H^2}$ — экстремальная функция рассматриваемой задачи. Значит,

$$\not{k}^{(2)}_{\min}(z) = \frac{|f_0(z)|}{\|f_0\|_{H^2}} = (1 - |\varphi(z)|^2)^{-1/2}.$$

При $p \neq 2$ легко видеть, что экстремальная функция задачи

$$|f(z)| - \max!, \quad f \in S_p,$$

не может иметь нулей в G. В самом деле, если некоторая функция f имеет нули в G и $f \in S_p$ (т. е. $(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))|^p d\theta = 1$, то, разделив f на ее произведение Бляшке, получим функцию f^*, для которой

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(\psi(e^{i\theta}))|^p d\theta = 1, \quad |f^*(z)| > |f(z)|.$$

Таким образом, можно ограничиться функциями $g(z) \in S_p$, не обращающимися в нуль ни в одной точке из G. Для таких функций

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\psi(e^{i\theta}))|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |[g(\psi(e^{i\theta}))]^{p/2}|^2 d\theta.$$

Следовательно, если g — экстремальная функция при $p \neq 2$, то $g^{p/2}$ — экстремальная функция при $p = 2$. Т. е.

$$\not{k}^{(p)}_{\min}(z) = (1 - |\varphi(z)|^2)^{-1/p},$$

и это значение достигается при $f(\xi) = (1 - \varphi(\xi)\overline{\varphi(z)})^{-2/p}$.

Перейдем к исследованию ортонормированных многочленов $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в произвольных гильбертовых пространствах $Q(G)$ с промежуточной топологией.

Пусть B_n — множество многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом.

Утверждение 6. *Если $\hat{P}_n(z) = \mu_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} z^k$ — n-й ортонормированный многочлен в пространстве $Q(G)$, то экстремальная задача $\|P_n\|_Q - \min!$, $P_n \in B_n$, имеет решение*

$$\tilde{P}_n(z) = \mu_n^{-1} \hat{P}_n(z)$$

и это решение единственно.

Доказательство. Если P_n — произвольный многочлен из B_n, то

$$P_n(z) = \tilde{P}_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \hat{P}_k(z).$$

Общие свойства рядов Фурье по ОН-системам влекут, в частности, следующее равенство:

$$(\| P_n \|_Q)^2 = \mu_n^{-2} + \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2.$$

Т. е. минимум нормы достигается лишь при условии $\alpha_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Пусть пространство $Q(G)$ имеет следующее свойство: для любых f и g, принадлежащих $Q(G)$, выполняется соотношение

$$[\forall z \in G \ \ (|f(z)| \geq |g(z)|)] \Rightarrow [\| f \|_Q \geq \| g \|_Q]. \tag{13}$$

Следствие 3. *Если в пространстве $Q(G)$ выполняется соотношение* (13), *то все нули ортогональных полиномов $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежат G^*-замыканию выпуклой оболочки области G.*

Доказательство. Положим

$$\mu_n^{-1} \hat{P}_n(z) = \tilde{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Если $z_1 \notin G^*$, то можно найти точку z_1', которая находится ближе чем точка z_1 одновременно ко всем точкам области G: $\exists z_1' \ \ \forall z \in G \ \ (|z - z_1'| < |z - z_1|)$. Следовательно,

$$\forall z \in G \ \ (|\tilde{P}_n(z)| \leq |z - z_1'| \prod_{k=2}^{n} |z - z_k|).$$

Используя соотношение (13), нетрудно видеть, что это противоречит утверждению 6.

Легко привести пример гильбертова пространства $Q(G)$, для которого соотношение (13) не выполняется.

Пусть G — квадрат в правой полуплоскости $G = \{z : z = x + iy, \ 0 < x < \alpha, -\alpha/2 < y < \alpha/2\}$, где α — некоторая постоянная; $Q(G)$ — множество всех функций из $\mathrm{Hol}\,(G)$, интегрируемых с квадратом по площади области. Норму в $Q(G)$ зададим равенством

$$\| f \|_Q = \left[\iint_G |f(x, y)|^2 dx dy + \left| f'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 \right]^{1/2}.$$

Выберем $f(z) = 1$, $g(z) = \exp(-kz)$, $k > 0$. Простые вычисления показывают, что

$$\| g \|_Q \geq \left| g'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = k \exp\left(-\frac{\alpha k}{2}\right), \quad \| f \|_Q = \alpha, \quad \forall z \in G \ \ |f(z)| > |g(z)|.$$

Положим $k = 1/\alpha$. Непосредственно видно, что при малых α

$$\| g \|_Q \geq \alpha^{-1} e^{-1/2} > \alpha = \| f \|_Q.$$

Рассматривая задачу, двойственную к задаче из утверждения 6, легко получаем следующее утверждение.

Пусть S_{Qn} — множество всех многочленов степени не выше n, принадлежащих единичному шару пространства $Q(G)$:

$$S_{Qn} = \{P_n : \deg P_n \leq n; \ \| P_n \|_Q \leq 1\}.$$

Обозначим через $\alpha(P_n)$ старший коэффициент многочлена $P_n \in S_{Qn}$ (в случае $\deg P_n < n$ полагаем $\alpha(P_n) = 0$.

Утверждение 7. *Экстремальная задача*

$$|\alpha(P_n)| - \max!, \quad P_n \in S_{Qn},$$

имеет решение вида $\hat{P}_n(z)$, *где* $\hat{P}_n$ — *n-й ортонормированный в* $Q(G)$ *многочлен. Это решение единственно с точностью до фазовых множителей* — $e^{i\tau_n}$, $\operatorname{Im}\tau_n = 0$.

Доказательство. Следующие выкладки показывают, что многочлен $P_n(z)$ будет экстремальной функцией задачи из утверждения 7 тогда и только тогда, когда $(\alpha(P_n))^{-1} P_n$ — экстремальная функция задачи из утверждения 6:

$$\sup\{|\alpha(P_n)| : \|P_n\|_Q \le 1,\ \deg P_n \le n\} =$$

$$= \sup\{|\alpha(P_n)| : \|P_n\|_Q = 1,\ \deg P_n = n\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{|\alpha(P_n)|}{\|P_n\|_Q} : \deg P_n = n\right\} = \left(\inf\left\{\frac{\|P_n\|_Q}{|\alpha(P_n)|} : \deg P_n = n\right\}\right)^{-1} =$$

$$= (\inf\{\|P_n\|_Q : \deg P_n = n,\ \alpha(P_n) = 1\})^{-1}.$$

Теперь утверждение 6 следует из утверждения 7.

Используя равенство

$$\|\tilde{P}_n\|_Q = \mu_n^{-1}\|\hat{P}_n\|_Q = \mu_n^{-1} \tag{14}$$

и экстремальное свойство многочлена $\tilde{P}_n$, доказанное в утверждений 6, можно получить некоторую дополнительную информацию о поведении коэффициента μ_n, зная трансфинитный диаметр множества $\overline{G}$-замыкания области G.

Утверждение 8. *Пусть* G — *ограниченная область на плоскости* (*может быть бесконечносвязная*); $Q(G)$ — *пространство Гильберта с промежуточной топологией;* μ_n — *старший коэффициент* n*-го ортонормированного в* $Q(G)$ *многочлена* $\hat{P}_n$; τ — *трансфинитный диаметр* $\overline{G}$ [8]. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n} = \tau^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим через t_n полином Чебышева для $\overline{G}$, т. е. полином с единичным старшим коэффициентом и наименьшим среди всех полиномов степени n максимумом модуля на $\overline{G}$:

$$t_n(z) = z^n + \ldots + c_n, \quad m_n = \max\{|t_n(z)| : z \in \overline{G}\}.$$

Используя неравенство (1) и утверждение 6, получаем

$$\|\tilde{P}_n\|_Q \le \|t_n\|_Q \le c_1 m_n.$$

Отсюда в силу (14)

$$\mu_n^{-1/n} \le (c_1 m_n)^{1/n}. \tag{16}$$

Так как трансфинитный диаметр $\overline{G}$ равен постоянной Чебышева $\lim\limits_{n\to\infty}|m_n|^{1/n} = \tau$, то, используя (16), имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n^{-1/n} \le \tau. \tag{17}$$

Пусть теперь K — произвольный компакт, лежащий в области G, $K \Subset G$, t_{nk} — полином Чебышева компакта K. В силу неравенства (2) и экстремальных свойств t_{nk}

$$\| \tilde{P}_n \|_Q \geq c_2(K) \max\{ | \tilde{P}_n(z) | : z \in K\} \geq c_2(K) \max\{ | t_{nk}(z) | : z \in K\}.$$

Следовательно, для любого компакта $K \Subset G$

$$\varliminf_{n \to \infty} \mu_n^{-1/n} \geq \tau_K, \tag{18}$$

где τ_K — постоянная Чебышева (трансфинитный диаметр) компакта K.

Используя (17) и (18), получаем

$$\tau \geq \varlimsup_{n \to \infty} \mu_n^{-1/n} \geq \varliminf_{n \to \infty} \mu_n^{-1/n} \geq \sup\{ \tau_K : K \Subset G\}.$$

Осталось показать, что $\tau \leq \sup\{\tau_K : K \Subset G\}$.

Построим последовательность связных компактов $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, исчерпывающих область G: $\forall n \in N$, $K_{n+1} \supset K_n$, $G \Supset K_n$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$. Рассмотрим последовательность отображений $\{\Phi_n\}$ и областей $\{\Omega_n\}$, где Ω_n — компонента связности $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$, содержащая бесконечно удаленную точку, Φ_n — конформное и однолистное отображение Ω_n на внешность единичного круга D, нормированное условиями $\Phi_n(\infty) = \infty$, $\Phi_n'(\infty) > 0$. Известно, что

$$\Phi_n(z) = c_1^{(n)} z + c_0^{(n)} + \frac{c_{-1}^{(n)}}{z} + \ldots,$$

где $1 / c_1^{(n)}$ — трансфинитный диаметр K_n.

Ядром последовательности областей $\{\Omega_n\}$ является область Ω — компонента связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть функция

$$\Phi(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots$$

конформно и однолистно отображает Ω на внешность единичного круга D, $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Тогда $c_1 = \tau^{-1}$.

В силу теоремы о сходимости последовательности областей к ядру [8] $\lim_{n \to \infty} c_1^{(n)} = c_1 = 1/\tau$. Следовательно, $\sup\{\tau_K : K \Subset G\} \geq \tau$. Доказательство завершено.

1. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
2. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1964. – 440 с.
3. *Довгошей А. А.* Приближение аналитических функций в некоторых функциональных пространствах и рациональная аппроксимация функций из классов Харди // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – №10. – С. 19 – 21.
4. *Довгошей А. А.* Об интегральных представлениях в классах Харди и наилучших приближениях в некоторых функциональных пространствах // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №3. – С. 342 – 347.
5. *Суэтин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. – New York; London: Acad. press, 1970. – 258 p.
7. *Довгошей А. А.* Об аппроксимации полиномами функций из классов Харди в односвязных областях на плоскости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №9. – С. 1266 – 1271.
8. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Получено 22. 10. 92