УДК 517.96

В. П. Бурский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТИ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Classes of differential equations with constant coefficients which have the uniqueness property for the Dirichlet or Cauchy type boundary value problem, are considered in a bounded domain with the algebraic boundary. For the Dirichlet problem in a ball, necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the solution are obtained in terms of a countable sequence of inequalities polynomial with respect to the equation coefficients.

В обмеженій області з алгебраїчною межею розглянуто класи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, для яких існує єдиність розв'язку крайової задачі типу Діріхле або Коші. Для задачі Діріхле у кулі одержано необхідні та достатні умови єдиності розв'язку у вигляді зчисленної послідовності нерівностей, поліноміальних за коефіцієнтами рівняння.

1. Введение. Граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в ограниченной области в неэллиптическом случае систематически изучались лишь в параллелепипеде, в произвольной области исследованы только вопросы единственности решения задачи Дирихле в плоском случае для гиперболического уравнения (см. [1]). Получены также некоторые результаты для случая круга и шара [2 – 7]. Во всех указанных случаях условия нетривиальной разрешимости рассмотренных однородных граничных задач записываются в виде счетного числа условий на коэффициенты уравнения или на область. Возникает вопрос: насколько типична эта ситуация? Отметим, что в некоторых работах (см. ссылки в обзоре [1]) условия тривиальной разрешимости граничных задач в шаре или эллипсоиде записываются в функциональной (неявной) форме, например, как условие на спектр конкретного оператора, зависящего от области и исходного уравнения. В настоящей работе рассматриваются вопросы единственности решения граничных задач для уравнений с постоянными коэффициентами в ограниченной области с алгебраической границей и дается ответ на поставленный выше вопрос.

Пусть $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ — ограниченная полуалгебраическая область, заданная неравенством $\Omega = \{x \mid P(x) > 0\}$ с вещественным полиномом P, не вырождающимся на границе $\partial\Omega$: $|\nabla P| \neq 0$ на $\partial\Omega$, откуда следует, что $\partial\Omega$ — гладкая поверхность в $\boldsymbol{R}^n$. Рассмотрим граничную задачу

$$L(D_x)u = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = u'_\nu\Big|_{\partial\Omega} = \ldots = u_\nu^{(\gamma-1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где L — полином с комплексными коэффициентами от производных $D_x = -i\nabla$, $u(x) \in \boldsymbol{C}$, $\nu = -\nabla P / |\nabla P|$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Обозначим через l и l_0 соответственно старший и младший порядки оператора L, p и p_0 — старший и младший порядки полинома P, $p \geq 2$, $\gamma \leq l$. Для простоты будем рассматривать классические решения задачи (1), т. е. $u \in C^l(\overline{\Omega})$. Заметим только, что, как следует из работы [8], можно придать смысл постановке задачи (1) в $L_2(\Omega)$, при этом теоремы 1, 2 остаются верными для решений из $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. 1). *Если* $2\gamma < l_0$ *и* $2 \leq p < l_0/\gamma$, *то задача* (1) *имеет полиномиальное решение.*

2). *Если* $2\gamma \geq l$, $l_0/\gamma \leq p \leq l_0/(l-\gamma)$, *то имеется не более чем счетное число алгебраических условий на коэффициенты полиномов* L *и* P, *невыполнение которых влечет только тривиальную разрешимость задачи* (1) *в пространстве* $C^l(\overline{\Omega})$.

Утверждение 2, в частности, означает, что лебегова мера в пространстве ко-

© В. П. БУРСКИЙ, 1993

эффициентов пар полиномов (L, P) заданных степеней множества тех пар, для которых задача (1) имеет нетривиальное решение, равна нулю. Заметим, что здесь в качестве l_0 можно выбрать максимум по всем сдвигам $a \in C^n$ младших степеней полиномов $L(\xi + a)$. При $p > l_0/(l-\gamma)$ вопрос остается открытым и обычные задачи о спектре $(l_0 = 0)$ дают нам примеры и нетривиальной, и только тривиальной разрешимости. Отметим, что в этом случае уравнение (3) почти для всех коэффициентов допускает формальное нетривиальноерешение, но вопрос о сходимости такого формального степенного ряда представляется трансцендентно сложным.

В частном случае удается получить счетный набор алгебраических условий, являющийся необходимым и достаточным для нетривиальной разрешимости.

Теорема 2. *Для нетривиальной разрешимости в* $C^l(\overline{\Omega})$ *задачи Дирихле* (1) *при* $2\gamma = l$ *в случае однородного оператора вида* $L = (\sum_{i,j=1}^n a^{ij}D_iD_j)^\gamma$ *в шаре* $\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid 1 - x^2 > 0\}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовало нетривиальное полиномиальное решение* V *уравнения*

$$\Delta_\xi^\gamma[(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j)^\gamma V(\xi)] = 0,$$

где Δ_ξ *— оператор Лапласа. При выполнении этого условия существует полиномиальное решение задачи Дирихле* (1) *в шаре* Ω.

Здесь номером в наборе условий является степень полинома $V(\xi)$.

2. Двойственность уравнение — область. Наряду с задачей (1) рассмотрим связанные с ней уравнения

$$L(D_x)[(P(x))^\gamma w(x)] = 0, \tag{2}$$

$$[P(-D_\xi)]^{l-\gamma}[L(\xi)v(\xi)] = 0. \tag{3}$$

Под двойственностью уравнение — область понимается соответствие уравнений (2) и (3), обсуждаемое ниже.

Утверждение 1. *Каждому нетривиальному полиномиальному решению уравнения* (2) *отвечает нетривиальное полиномиальное решение задачи* (1).

Доказательство очевидно, поскольку $u = P^\gamma w$ является решением задачи (1), если w — решение уравнения (2).

В таком виде формулировка утверждения 1 достаточна для дальнейшего, хотя она может быть усилена до следующего утверждения.

Утверждение 2. *Существует изометрический изоморфизм между пространством* S_1 *решений из* $C^l(\overline{\Omega})$ *задачи* (1), *полным в индуцированной метрике, и пространством* S_2 *решений уравнения* (2) *из пространства* $C^l(\Omega) \cap C^{l-\gamma}(\overline{\Omega})$ *с конечной нормой* $\| w \|_{S_1} = \| P^\gamma w \|_{C^l(\overline{\Omega})}$.

Утверждение 3. *Для каждого нетривиального решения задачи* (1) *из* $C^l(\overline{\Omega})$ *существует нетривиальное аналитическое во всем* Ω *решение* (3).

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Перебрасывая производные, получаем формулу Грина для оператора L:

$$\int_\Omega Lu\overline{\varphi}\,dx - \int_\Omega uL\overline{\varphi}\,dx = \sum_{q=0}^{l-1}\int_{\partial\Omega} L_{(l-q-1)}u\overline{\varphi_\nu^{(q)}}\,ds_x, \tag{4}$$

где $L_{(l-q-1)}u$ — линейные дифференциальные выражения, которые вырабатываются в результате перебрасывания производных, причем оператор $L_{(m)}$ имеет степень m. Подставим в равенство (4) функцию $\varphi = (P(x))^{l-\gamma}\psi$ с некоторой функцией ψ из пространства Шварца S и функцию u, являющуюся решением задачи (1). Тогда $\varphi_\nu^{(q)} = 0$ для $q = 0, 1, \ldots, l-\gamma-1$, $L_{(l-q-1)}u\Big|_{\partial\Omega} = 0$ для $q = l-1, \ldots, l-\gamma$, поэтому правая часть в равенстве (4) исчезает. Получим равенство

$$\int_\Omega uL\overline{\varphi}\,dx = 0 \quad \text{или} \quad \int_{\boldsymbol{R}^n} u\theta_\Omega L(P^{l-\gamma}\overline{\psi})dx = 0, \tag{5}$$

где $u\theta_\Omega$ — продолжение функции u на $\boldsymbol{R}^n$ нулем. Применим преобразование Фурье. Равенство Парсеваля превратит формулу (5) в равенство

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \widehat{u\theta}_\Omega(\xi)L(\xi)[P^{l-\gamma}(-D_\xi)\hat{\overline{\psi}}(\xi)]d\xi = 0. \tag{6}$$

Здесь опять можно перебросить производные, поскольку функция $\hat{\overline{\psi}}$ из пространства S, а функция $\widehat{u\theta}_\Omega$ из пространства $L_2(\Omega) \subset S'$. В силу произвольности функции ψ получаем уравнение (3) для функции $\upsilon = \widehat{u\theta}_\Omega$, принадлежащей пространству $\widehat{C^l(\overline{\Omega})} = \{\widehat{u\theta}_\Omega \mid u \in C^l(\overline{\Omega})\}$, которое состоит по теореме Пэли — Винера в силу компактности $\overline{\Omega}$ из целых функций первого порядка роста по мнимому подпространству. Утверждение доказано.

Формулировка утверждения 3 также может быть усилена.

Утверждение 4. *Пространство S_1 решений задачи* (1) *и пространство S_3 решений уравнения* (3) *изометрически изоморфны.*

3. Полиномиальные и формальные решения. Рассмотрим уравнение

$$M(D)\,[Q(x)\,w(x)] = 0, \tag{7}$$

где M и Q — полиномы из $\boldsymbol{C}[x]$. Через m и q будем обозначать их соответствующие старшие степени, а через m_0 и q_0 — младшие степени. Будем рассматривать решения уравнения (7) из $\boldsymbol{C}[x]$ (полиномиальные) и из $\boldsymbol{C}[[x]]$ (формальные). Обозначим через $N(n, s)$ число различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = s$, а через $\tilde{N}(n, s) = N(n, s) + N(n, s-1) + \ldots$ число коэффициентов у общего многочлена с n переменными степени s.

Утверждение 5. *Пусть $m_0 \le q$. Тогда имеется не более чем счетный набор полиномов Δ_s от коэффициентов полиномов M, Q, $\overline{M}$, $\overline{Q}$ и порождаемых ими условий $\Delta_0 \ne 0$, $\Delta_1 \ne 0, \ldots, \Delta_s \ne 0, \ldots$, выполнение которых влечет тривиальность каждого полиномиального решения w уравнения* (7). *При выполнении условий $\Delta_0 \ne 0, \ldots, \Delta_{s-1} \ne 0$, $\Delta_s = 0$ имеется нетривиальный полином w степени s, являющийся решением уравнения* (7). *При $m_0 > q$ имеется нетривиальное полиномиальное решение уравнения* (7) *любой степени.*

Доказательство. Подставив в уравнение (1) полином w степени s, получим для его $\tilde{N}(n, s)$ коэффициентов $\tilde{N}(n, s+q-m_0)$ линейных однородных алгебраических уравнений, коэффициенты которых билинейно зависят от коэффициентов полиномов M и Q. При $m_0 > q$ эта система всегда имеет нетривиальное решение при любом s. При $m_0 = q$ число уравнений равно числу неизвестных и равенство нулю детерминанта Δ_s равносильно существованию нетривиального полиномиального решения степени s. Наконец, при $m_0 < q$ число уравнений больше числа неизвестных. Обозначим через Δ_s сумму квадратов модулей всех миноров порядка $\tilde{N}(n, s)$, составленных из матрицы системы. Здесь также равенство $\Delta_s = 0$, очевидно, равносильно существованию нетривиального решения w степени s. Отличие от предыдущего случая, однако в том, что Δ_s не является полиномом от коэффициентов M и P, поскольку в его определение входит операция сопряжения.

Следствие. *При $m_0 \le q$ для почти всех полиномов M старшей степени m и младшей степени m_0 и почти всех полиномов Q старшей степени q уравнение* (7) *не имеет нетривиальных полиномиальных решений.*

Пусть теперь $w \in C[[x]]$ — формальный степенной ряд. После подстановки его в (7) для коэффициентов ряда w получим счетную систему линейных алгебраических уравнений, причем каждый коэффициент ряда w входит в конечное число уравнений. Под формальным решением уравнения (7) понимается формальный ряд, удовлетворяющий этой системе. Под степенью формального степенного ряда w понимается младшая степень входящих в него членов.

Утверждение 6. *Пусть $m \le q_0$. Тогда имеется не более чем счетный набор полиномов $\tilde{\Delta}_s$ от коэффициентов полиномов M, Q, $\overline{M}$, $\overline{Q}$ и порождаемых ими условий $\tilde{\Delta}_0 \ne 0$, $\tilde{\Delta}_1 \ne 0$, ... , $\tilde{\Delta}_s \ne 0$, ... , выполнение которых влечет тривиальность каждого формального решения w уравнения* (7). *Если выполнены условия $\tilde{\Delta}_0 \ne 0$, ... , $\tilde{\Delta}_{s-1} \ne 0$, $\tilde{\Delta}_s = 0$, то существует однородный полином w_s степени s, являющийся решением уравнения*

$$M_m(D_x)[Q_{q_0}(x)\, w(x)] = 0,$$

где M_m — старшая часть полинома M, Q_{q_0}— младшая часть полинома Q.

Доказательство. Пусть s — порядок формального решения w и w_s — младшая часть ряда w, имеющая $N(n, s)$ коэффициентов. Тогда порядок ряда $M(D)(Qw)$ равен $s + q_0 - m$, и для коэффициентов однородного полинома w_s мы имеем $N(n, s + q_0 - m)$ линейных алгебраических уравнений. При $m = q_0$ число уравнений совпадает с числом неизвестных и неравенство нулю детерминанта $\tilde{\Delta}_s$ влечет тривиальность w_s. При $m = q_0$ в этой системе число уравнений больше числа неизвестных. Обозначив через $\tilde{\Delta}_s$ сумму квадратов модулей всех миноров порядка s, получим, что $\tilde{\Delta}_s \ne 0$ влечет тривиальность w_s. Доказательство закончено.

Заметим, что в таком виде формулировка утверждения 6 достаточна для дальнейшего, и вопрос о существовании формального решения в выделенных случаях не ставится. Этот вопрос, относящийся к дифференциальной алгебре, имеет в ряде простых случаев положительное решение. Например, при $m_0 \ne 0$, $q_0 = 0$ имеется нетривиальное формальное решение w, определяемое как $1/Q$. При $m = q_0$ и нарушении конечного числа условий $\tilde{\Delta}_0 \ne 0$, ..., $\tilde{\Delta}_s \ne 0$, ... также можно показать существование нетривиального формального решения. В общем случае вопрос открыт. Еще более сложным является вопрос о сходимости ряда формального решения, тем более к функции из пространства $\widehat{C^l(\overline{\Omega})}$.

Следствие. *При $m \le q_0$ для почти всех полиномов M старшей степени m и для почти всех полиномов Q старшей степени q и младшей степени q_0 уравнение* (7) *не имеет нетривиальных формальных решений.*

4. Множества неоднозначной разрешимости. Применим полученные выше утверждения к уравнениям (2) и (3). Но вначале введем некоторые определения. Пусть K^i, $i = 1, 2$, означает любое из полей $\boldsymbol{R}$ или C, $\Sigma_{K^2, q, q_0}^{K^1, m, m_0}$ — овеществленное аффинное пространство пар полиномов (M, Q), $M \in K^1[x]$, $Q \in K^2[x]$ от n переменных старших порядков m и q и младших порядков m_0 и q_0 соответственно, α, $\beta \in \boldsymbol{Z}^+$. Обозначим через $\Sigma_{K^2, q, q_0, \beta}^{K^1, m, m_0, \alpha}(E)$ множество всех пар полиномов $(M, Q) \in \Sigma_{K^2, q, q_0}^{K^1, m, m_0}$, для которых уравнение

$$[M(-D)]^{\alpha}\{[Q(x)]^{\beta}u(x)\} = 0$$

имеет нетривиальное решение $u(x)$ из пространства функций E. Будем говорить, что множество $\Sigma \subset \Sigma^{K^1,m,m_0}_{K^2,q,q_0}$ *счетно алгебраично*, если Σ есть конечное или счетное объединение алгебраических многообразий в аффинном пространстве $\Sigma^{K^1,m,m_0}_{K^2,q,q_0}$, и назовем множество Σ *полным*, если $\Sigma = \Sigma^{K^1,m,m_0}_{K^2,q,q_0}$. Как известно, неполное счетно алгебраическое множество в афинном пространстве имеет лебегову меру нуль. В этих обозначениях из утверждений 2 и 4 следует такое утверждение.

Утверждение 7. *Отображение двойственности*

$$\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega})) \xrightarrow{J} \Sigma^{\boldsymbol{R},p,p_0,l-\gamma}_{C,l,l_0,1}(C^l(\overline{\Omega})),$$

действующее по правилу $(L(D_x), P(x)) \xrightarrow{J} (P(-D_\xi), L(\xi))$, *биективно.*

Утверждение 5 можно записать в таком виде.

Утверждение 8. *При* $m_0 \le q$ *множество* $\Sigma^{C,m,m_0,1}_{C,q,q_0,1}(\boldsymbol{C}[x])$ *счетно алгебраично, при* $m_0 > q$ *это множество полно.*

Отсюда следует такое утверждение.

Утверждение 9. *При* $m_0 \le q$ *множество* $\Sigma^{C,m,m_0,1}_{\boldsymbol{R},q,q_0,1}(\boldsymbol{C}[x])$ *счетно алгебраично, при* $m_0 > q$ *оно полно.*

Утверждение 6 можно записать в следующем виде.

Утверждение 10. *При* $m \le q_0$ *множество* $\Sigma^{C,m,m_0,1}_{\boldsymbol{R},q,q_0,1}(\boldsymbol{C}[x])$ *счетно алгебраично.*

Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 11. *При* $m \le q_0$ *множество* $\Sigma^{C,m,m_0,1}_{\boldsymbol{R},q,q_0,1}(\widehat{C^l(\overline{\Omega})})$ *счетно алгебраично.*

Применяя утверждение 9 к уравнению (2), получаем такое утверждение.

Утверждение 12. *При* $l_0 / \gamma > p$ *множество* $\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(\boldsymbol{C}[x])$ *полно, т. е. уравнение* (2) *имеет нетривиальное решение в полиномах.*

Применяя утверждение 11 к уравнению (3), получаем следующее утверждение.

Утверждение 13. *При* $p \le l_0 / (l-\gamma)$ *существование нетривиального решения уравнения* (3) *влечет, что коэффициенты полиномов удовлетворяют хотя бы одному из не более чем счетного числа алгебраических условий.*

Применяя утверждение 7 к уравнению (3), получаем такое утверждение.

Утверждение 14. *При* $p \le l_0 / (l-\gamma)$ *множество* $\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$ *счетно алгебраично.*

Рассмотрим теперь вопрос о полноте множества $\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$.

Утверждение 15. *Полнота множества* $\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$ *при* $p \le l_0 / (l-\gamma)$ *влечет полноту множества* $\Sigma^{\boldsymbol{R},p,p,l-\gamma}_{C,l_0,l_0,1}(\boldsymbol{C}[\xi])$.

Доказательство. Полнота множества $\Sigma^{C,l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$, согласно утверждению 7, влечет полноту множества $\Sigma^{\boldsymbol{R},p,p_0,l-\gamma}_{C,l,l_0,1}(\widehat{C^l(\overline{\Omega})})$, что в свою очередь влечет полноту множества $\Sigma^{\boldsymbol{R},p,p_0,l-\gamma}_{C,l,l_0,1}(\boldsymbol{C}[[\xi]])$, т. е. для любых полиномов $P \in \boldsymbol{R}[\xi]$, $L \in \boldsymbol{C}[\xi]$ указанных степеней уравнение (3) имеет формальное решение. Пусть $M = P^{l-\gamma}$, $Q = L$. Тогда согласно утверждению 6 имеется не более чем счетный набор полиномиальных по коэффициентам полиномов P и L условий

$\tilde{\Delta}_s = 0$, одно из которых выполняется для любой пары (P, L) указанных степеней. Но каждое алгебраическое многообразие $\tilde{\Delta}_s = 0$ в аффинном пространстве коэффициентов полиномов P и L имеет либо нулевую, либо полную меру как замкнутое по Зарисскому множество. Поэтому найдется такое s, что равенство $\tilde{\Delta}_s = 0$ выполняется тождественно. Но тогда согласно второй части утверждения 6 множество $\Sigma^{\boldsymbol{R},p,p,l-\gamma}_{\boldsymbol{C},l_0,l_0,1}(\boldsymbol{C}[\xi])$ полно.

Утверждение 16. *При* $p \le \dfrac{l_0}{l-\gamma}$ *множество* $\Sigma^{\boldsymbol{R},p,p,l-\gamma}_{\boldsymbol{C},l_0,l_0,1}(\boldsymbol{C}[\xi])$ *не полно.*

Доказательство. Достаточно привести пример. Пусть $P(-D_\xi) = \partial^p / \partial\xi_1^{\,p}$, $L_1(\xi) = \xi_1^{\,l_0}$. Для любого полинома $v(\xi)$ уравнение (3) не удовлетворяется. Доказательство закончено. Заметим, что как будет показано ниже, полученное утверждение не противоречит утверждению 12.

***Доказательство теоремы* 1.** Согласно утверждениям 15 и 16 множество $\Sigma^{\boldsymbol{C},l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$ не полно, а по утверждению 13 оно счетно алгебраично, в частности, оно имеет нулевую лебегову меру в $\Sigma^{\boldsymbol{C},l,l_0}_{\boldsymbol{R},p,p_0}$. Теорема доказана.

В силу ограниченности области Ω $p \ge 2$, кроме того, очевидно, что $l \ge l_0$, $0 \le \gamma \le l$.

Утверждение 17. *Пусть*

$$l_0 \ge p(l-\gamma). \tag{8}$$

Тогда: 1) $l_0 \le p\gamma$; 2) $l \le 2\gamma$; 3) $\gamma \ge 1$; 4) $l_0 \ge p$ *при* $\gamma < l$.

Доказательство. 1). Если $l_0 > p\gamma$, то складывая с неравенством (8), получаем $2l_0 > pl \ge 2l$, что противоречит $l \ge l_0$. 2). Продолжим неравенство 1) с помощью (8). Неравенства 3) и 4) непосредственно следуют из неравенства (8).

Следствие. *Правая часть неравенства из п. 2 теоремы 1 в предположениях* $p \ge 2$, $l \ge l_0$ *влечет левую часть того же неравенства, следовательно, неполнота множества* $\Sigma^{\boldsymbol{C},l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(C^l(\overline{\Omega}))$ *при выполнении* (8) *не противоречит полноте множества* $\Sigma^{\boldsymbol{C},l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,\gamma}(\boldsymbol{C}[x])$ *при* $p\gamma < l_0$.

Замечание. На самом деле интервал изменения p еще уже, поскольку из (8) следует, что $p\gamma \ge pl - l_0 \ge 2l - l_0 \ge l \ge l_0$; в частности, $p \ge (2l - l_0)/\gamma$.

5. Некоторые граничные задачи. Назовем задачу (1) *задачей Коши,* если $\gamma = l$; *почти задачей Коши,* если $\gamma = l - 1$, и *задачей Дирихле,* если $2\gamma = l$.

Для задачи Коши условие (8) не ограничивает p сверху, но уравнение (3) показывает, что нетривиальных решений быть не может. Таким образом, из утверждения 4 следует такое утверждение.

Утверждение 18. *Задача Коши* (1) $(\gamma = l)$ *имеет только тривиальное решение.*

Для почти задачи Коши левое ограничение на p: $p\gamma \ge l_0$ и даже $p\gamma \ge 2l - l_0$ не существенно по сравнению с ограничением $p \ge 2$, а правое упрощается: $p \le \le l_0$. Получаем следующее утверждение.

Утверждение 19. *Почти задача Коши* (1) $(\gamma = l-1)$ *при* $2 \le p \le l_0$ *имеет только тривиальное решение для пар полиномов* (L, P), *не принадлежащих не более чем счетно алгебраическому неполному множеству* $\Sigma^{\boldsymbol{C},l,l_0,1}_{\boldsymbol{R},p,p_0,l-1}(C^l(\overline{\Omega}))$.

Для задачи Дирихле $(2\gamma = l)$ интервал $[l_0/\gamma,\ l_0/(l-\gamma)]$ сводится к точке $p = l_0/\gamma = 2l_0/l$, поэтому из условия $p \ge 2$ следует $l = l_0$, или что многочлен L в этом случае однородный, при этом $p = 2$. Далее, заметим прежде всего, что в исследуемом случае $P \in \boldsymbol{R}[x]$, $p = 2$ означает, что $\partial\Omega$ — эллипсоид в $\boldsymbol{R}^n$. Не ограничивая общности можно, осуществив растяжение, считать его сферой, а область Ω шаром. Тогда $P(x) = 1 - |x|^2$, $P^{l-\gamma}(D_\xi) = (\Delta_\xi + 1)^\gamma$. Если u — решение задачи (1) из пространства $C^l(\overline{\Omega})$, то $v = \widehat{u\theta_\Omega} \in C^l(\overline{\Omega})$ — решение уравнения

$$(\Delta_\xi + 1)^\gamma [L(\xi)v(\xi)] = 0. \tag{9}$$

Младшая однородная часть v_s разложения в ряд функции v удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\xi^\gamma [L(\xi)v(\xi)] = 0, \tag{10}$$

так что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 20. *Для того чтобы задача Дирихле* (1) $(2\gamma = l)$ *в шаре для уравнения с однородным оператором* L *имела в пространстве* $C^l(\overline{\Omega})$ *нетривиальное решение, необходимо, чтобы существовал нетривиальный* γ*-полигармонический однородный полином, делителем которого является символ* $L(\xi)$, *т. е. чтобы нашлась форма* $v_s \not\equiv 0$, *являющаяся решением уравнения* (10).

Заметим, что условия $\tilde{\Delta}_s = 0$ утверждения 6 для уравнения (3) в рассматриваемом случае есть в точности условия на коэффициенты формы L для существования нетривиальных коэффициентов формы v_s, удовлетворяющей уравнению (10).

Далее, будем искать полиномиальное решение задачи Дирихле (1) в виде

$$u(x) = (x^2 - 1)^\gamma (u_s + u_{s-2} + \dots), \tag{11}$$

где u_j — однородный полином степени j. Условия $\Delta_s = 0$ утверждения 5 в этом случае дают условия на коэффициенты формы L для существования нетривиальных коэффициентов формы u_s, удовлетворяющей уравнению

$$L(D_x)[(x^2)^\gamma u_s(x)] = 0. \tag{12}$$

Таким образом, для существования нетривиального полиномиального решения задачи Дирихле (1) в шаре необходимо существование нетривиальной формы u_s любой степени $s = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющей уравнению (12). Покажем достаточность этого условия. Пусть s_0 — минимальное число из всех s, для которых есть нетривиальная форма u_s степени s, являющаяся решением уравнения (12). Это значит, что каждое уравнение (12) с $s < s_0$ имеет только тривиальное решение, а это, в свою очередь, означает, что для каждой формы f_s в силу конечномерности пространства s-форм уравнение $L(D_x)[x^{2\gamma} u_s(x))] = f_s(x)$ однозначно разрешимо. Уравнение $Lu = 0$ сведется к цепочке уравнений

$$L(x^{2\gamma} u_{s_0}) = 0, \; L(x^{2\gamma} u_{s_0-2}) = -\gamma L(x^{2\gamma-2} u_{s_0}), \dots,$$

каждое неоднородное из которых в силу предположения на s_0 однозначно разрешимо, что позволяет по каждому решению уравнения (12) однозначно построить полиномиальное решение задачи Дирихле.

Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 21. *Для того чтобы задача Дирихле* (1) $(2\gamma = l)$ *в шаре для уравнения с однородным оператором* L *имела нетривиальное полиномиальное решение* $u(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала нетривиальная форма* u_s, *удовлетворяющая уравнению* (12). *При этом решению минимальной степени* u_s *уравнения* (12) *отвечает единственное решение* $u(x)$ *вида* (11) *задачи* (1) *и каждому решению* $u(x)$ *вида* (11) *отвечает единственное реше-*

ние u_s *уравнения* (12).

Из этого утверждения, в частности, следует, что каждому решению минимальной степени уравнения (12) отвечает единственное решение v_{s_1} уравнения (9), и это соответствие, очевидно, линейно и непрерывно как действующее из конечномерного пространства решений младшей степени в пространство $(\widehat{C^l(\overline{\Omega})})$.

Рассмотрим теперь оператор L вида

$$L = \lambda_1 \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}, \tag{13}$$

где все $\lambda_i \in C \setminus \{0\}$. Покажем, что для оператора такого вида условия нетривиальной разрешимости уравнений (10) и (12) совпадают, $\gamma = 1$. Для этого достаточно указать обратимое преобразование, переводящее уравнение (10) в уравнение (12). Таким преобразованием, как легко видеть, будет линейная замена $x^i = \sqrt{\lambda_i}\, \xi_i$, где знак у корня выбран произвольно. Сопоставляя теперь утверждения 20 и 21, получаем следующее утверждение.

Утверждение 22. *Задача Дирихле в шаре* $\Omega = \{x \mid 1 - x^2 > 0\}$

$$Lu \equiv \lambda_1 u''_{x^1 x^1} + \lambda_2 u''_{x^2 x^2} + \ldots + \lambda_n u''_{x^n x^n} = 0 \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{14}$$

имеет нетривиальное решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *тогда и только тогда, когда существует нетривиальный однородный полином* v, *являющийся решением уравнения*

$$\Delta_\xi[(\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2) v(\xi)] = 0. \tag{15}$$

При выполнении условия утверждения существует полиномиальное решение задачи (14).

Можно указать несколько достаточных признаков разрешимости уравнения (15):

1) при $\Lambda := \sum_{i=1}^{n} \lambda_n = 0$ функция $v = \mathrm{const} \neq 0$ — решение уравнения (15);

2) если хотя бы одно $\lambda_i = -\Lambda / 2$, то $v = \xi_i$ — решение;

3) если $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{4\lambda_i + \Lambda} + 1 = 0$, то найдутся C_i не все равные нулю такие, что $v = \sum_{i=1}^{n} C_i (\xi_i)^2$ — также решение.

Заметим, что вместо задачи (14) можно рассматривать более общий случай задачи в шаре Ω

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

где $A = (a^{ij})$ — симметрическая невырожденная матрица. Тогда существует симметрическая невырожденная матрица B такая, что $A = B^T B$ (см. [9]). В этом случае замена $x^k = \sum_i b^{ki} \xi_i$ переводит форму $L(\xi) = \sum_{ij} a^{ij} \xi_i \xi_j$ в форму $L(x) = x^2$, а оператор Δ_ξ в оператор

$$L = \sum_{i,k,l=1}^{n} b^{ki} b^{li} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} = \sum_{kl} a^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}$$

в силу справедливости соотношений $\sum_{ij} a^{ij} c_{ir} c_{js} = \delta_{rs}$, $\sum_{ij} b^{ki} b^{lj} \delta_{ij} = a^{kl}$, где

$\sum_i c_{il}b^{ki} = \delta_l^k$, $\xi_j = \sum_l c_{jl}x^l$, а δ_l^k, δ_{ij} — тензоры Кронекера. Из утверждений 20 и 21 следует такое утверждение.

Утверждение 23. *Для того чтобы задача* (16) *имела нетривиальное решение* $u \in C^2(\overline{\Omega})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало однородное полиномиальное решение* $v(\xi)$ *уравнения* $\Delta_\xi [\sum_{ij} a^{ij}\xi_i\xi_j v(\xi)] = 0$. *При выполнении условия существует полиномиальное решение задачи* (16).

Нетрудно видеть, что последнее уравнение можно свести к уравнению (15) ортогональным преобразованием, поскольку оператор Δ инвариантен относительно группы $O(n, C)$. Если теперь ввести линейные операторы $T_{mi}: F_m \to F_m$, действующие в конечномерном линейном пространстве форм степени m по правилу $T_{mi}v_m = \Delta [\xi_i^2 v_m(\xi)]$, то из уравнения (15), являющегося условием существования задачи (14), следует алгебраическая версия утверждения 22:

Утверждение 24. *Для того чтобы задача* (14) *имела нетривиальное решение* $u \in C^2(\Omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *удовлетворяли хотя бы одному из последовательности уравнений*

$$\det [\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_{mi}] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим задачу Дирихле (1) в шаре для уравнения с оператором $L = M^\gamma$, $M = \sum_{ij} a^{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. Повторяя рассуждения утверждения 23, получаем в силу утверждения 20 необходимое условие нетривиальной разрешимости вида

$$\exists\, v_s \not\equiv 0, \quad \Delta^\gamma\{[M(\xi)]^\gamma v_s(\xi)\} = 0,$$

эквивалентное условию

$$\exists\, w_s \not\equiv 0, \quad [M(-D_\xi)]^\gamma [\xi^{2\gamma} w_s(\xi)] = 0,$$

которое в силу утверждения 21 является и достаточным. Таким образом, теорема 2 доказана.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32 – 36.
3. *Бурский В. П.* Некоторые краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка с однородным символом в круге // Мат. физика и нелинейн. механика.– 1988.– № 9.– С. 32 – 35.
4. *Бурский В. П.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего и четвертого порядков с постоянными коэффициентами в круге // Там же. – 1985. – № 4. – С. 76 – 81.
5. *Бурский В. П.* Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 6. – С. 1038 – 1039.
6. *Бурский В. П.* Замечания о задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре и интегральной геометрии на сфере // Успехи мат. наук. – 1988. – **43**, № 5. – С. 181 – 182.
7. *Бурский В. П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 2. – С. 22 – 29.
8. *Бурский В. П.* Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение-область // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 5. – С. 1036 – 1039.
9. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств.– М.: Наука, 1972.– 232 с.

Получено 22. 10. 92