УДК 517.9

Б. В. Базалий, д-р физ.-мат. наук,
А. Ф. Тедеев, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

СИММЕТРИЗАЦИЯ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Initial boundary–value problems for the differential equations of porous medium and p-Laplace types are considered. By using the Schwarz symmetrization method, L_p-estimates for solutions of the initial problems are obtained in terms of similar estimates for the corresponding symmetric solutions.

Розглядаються початково-крайові задачі для рівнянь типу пористого середовища та p-Лапласа. За допомогою методу симетрування за Шварцом одержані L_p-оцінки розв'язків вихідних задач через аналогічні оцінки відповідних симетричних розв'язків.

1. В работах [1, 2] предложена схема получения точных оценок L_p-норм, $1 \le \le p \le \infty$, решений линейных эллиптических краевых задач с помощью метода симметризации. При этом на коэффициенты уравнения и область налагались минимальные требования гладкости. Далее эти методы применялись к изучению квазилинейных эллиптических краевых задач [3, 4]. Перенесению этих результатов на параболический случай посвящены работы [3, 5–7]. В работе [5] идеи симметризации применены к задаче Коши для уравнения пористой среды с использованием теории полугрупп. В работе [3] при исследовании параболических краевых задач был использован метод Роте. При этом существенным является линейность задачи. В статье [6] предложен прямой подход к симметризации линейных параболических краевых задач, который мы используем в данной работе при изучении нелинейных краевых задач.

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, — ограниченная достаточно гладкая область. В цилиндре $D_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u) + |u|^{r-1}\,u,\ p > 1, r \ge 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\,(|u|^{m-1}\,u) + |u|^{r-1}\,u,\ m \ge 1, r \ge 1, \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$u\,|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0,\quad u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{3}$$

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов, приведем необходимые определения. Для любой измеримой в Ω функции $v(x)$ введем функцию распределения

$$\mu(s) = |\{x \in \Omega\colon\ |v(x)| > s\}| \quad \forall\ s \in [0, \infty),\ |\Omega| \equiv \operatorname{mes}\Omega.$$

Определим невозрастающую перестановку функции $v(x)$ следующим образом:

$$v^*(\theta) = \inf\{s\colon\ \mu(s) < \theta\}.$$

Сферической симметризацией по Шварцу функции $v(x)$ называется функция

$$v^{\#}(x) = v^*(C_n |x|^n), \quad x \in \Omega^{\#},$$

где $\Omega^{\#}$ — шар в R^n с центром в нуле радиуса R, определяемого из равенства $|\Omega| = C_n R^n$; C_n — объем единичного шара в R^n. Если функция v определена в D_T и измерима относительно пространственных переменных, то можно рассматривать перестановки функции $v(x, t)$ только относительно пространственных переменных: $\mu(s,t) = |\{x \in \Omega: |v(x,t)| > s\}|$, $v^*(\theta, t) = \inf\{s: \mu(\cdot, t) < \theta\}$, $v^\#(x,t) = v^*(C_n |x|^n, t)$.

Обобщенным решением задачи (1), (3) в D_T назовем функцию $u(x,t)$ из класса $C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_p((0,T): \mathring{W}_p^1(\Omega)) \cap L_\infty(D_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{D_T} u\,\eta_t\,dx\,dt + \int_{D_T} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \eta - |u|^{r-1} u\eta)\,dx\,dt = \int_{\Omega} u_0\,\eta(x,0)\,dx \tag{4}$$

для любой функции $\eta(x,t)$ такой, что $\eta_t \in L_2(D_T)$, $\eta \in L_p((0,T); \mathring{W}_p^1(\Omega))$, $\eta(x,T) = 0$. При этом предполагаем, что $u_0 \in L_\infty(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$, $q = \max(2,p)$.

Аналогично обобщенным решением задачи (2), (3) будем называть функцию $u(x,t)$ из класса V: $u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_\infty(D_T)$, $|u|^{m-1} u \in L_2((0,T); \mathring{W}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{D_T} u\,\eta_t\,dx\,dt + \int_{D_T} (\nabla |u|^{m-1} u \nabla \eta - |u|^{r-1} u\eta)\,dx\,dt = \int_{\Omega} u_0\,\eta(x,0)\,dx \tag{5}$$

для любой функции $\eta(x,t)$ такой, что

$$\eta_t \in L_2(D_T),\quad \eta \in L_2((0,T): \mathring{W}_2^1(\Omega)),\quad \eta(x,T) = 0,\quad u_0 \in L_\infty(\Omega).$$

Задаче (1), (3) сопоставим соответствующую симметризованную задачу

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_t - \operatorname{div}(|\nabla \mathcal{U}|^{p-2} \nabla \mathcal{U}) = \mathcal{U}^r \quad \text{в} \quad \Omega^\# \times (0,T), \\ \mathcal{U}|_{\partial\Omega^\# \times (0,T)} = 0, \quad \mathcal{U}(x,0) = u_0^\#(x), \quad x \in \Omega^\#, \end{gathered} \tag{6}$$

а задаче (2), (3) — симметризованную задачу

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_t - \Delta \mathcal{U}^m = \mathcal{U}^r \quad \text{в} \quad \Omega^\# \times (0,T), \\ \mathcal{U}|_{\partial\Omega^\# \times (0,T)} = 0, \quad \mathcal{U}(x,0) = u_0^\#(x), \quad x \in \Omega^\#. \end{gathered} \tag{7}$$

Для обобщенных решений задач (1), (3) и (2), (3) получены следующие теоремы сравнения.

Теорема 1. *Пусть задача* (6) *имеет сферически симметричное убывающее решение* $\mathcal{U}(x,t)$. *Тогда при* $n/2 < p \le 2$

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma \le \int_0^s \mathcal{U}^*(\sigma,t)\,d\sigma, \quad s \in (0, |\Omega|), \tag{8}$$

при почти всех $t > 0$, *при* $p > 2$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^{|\Omega|} u^*(\sigma,t)\,d\sigma \le \int_0^{|\Omega|} \mathcal{U}^*(\sigma,t)\,d\sigma, \tag{9}$$

где $u(x,t)$ *— решение задачи* (1), (3).

Теорема 2. *Пусть задача* (7) *имеет сферически симметричное убывающее решение* $\mathcal{U}(x,t)$. *Тогда*

$$\int_0^{|\Omega|} u^*(\sigma,t)\,d\sigma \le \int_0^{|\Omega|} \mathcal{U}^*(\sigma,t)\,d\sigma, \tag{10}$$

где $u(x,t)$ *— решение задачи* (2), (3).

Отметим, что в случае линейных параболических задач в работах [3, 6] получены оценки вида (8).

2. *Доказательство теоремы* 1. Вначале докажем следующий результат.

Лемма. *Пусть* $u(x,t)$ *— обобщенное решение задачи* (1), (3) *в* D_T, $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{D_T} u_t^2\,dx\,dt \le C(M(T), \|u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}), \quad M(T) = \operatorname*{ess\,sup}_{D_T} |u|. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим регуляризованную задачу

$$u_{\varepsilon t} = \operatorname{div}\,[(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon)\,\nabla u_\varepsilon] + |u_\varepsilon|^{r-1} u_\varepsilon, \tag{12}$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), \; u_{0\varepsilon} \to u_0 \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega). \tag{13}$$

Известно [8], что $u_\varepsilon(x,t) \in C^{2,1}(D_T)$. Умножая обе части равенства (12) на $u_{\varepsilon t}$ и итегрируя по D_T, получаем

$$\int\limits_{D_T} u_{\varepsilon t}^2\,dx\,dt + \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x,T)|^p\,dx + \frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x,T)|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u_{0\varepsilon}|^p\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u_{0\varepsilon}|^2 dx + \int\limits_{D_T} |u_\varepsilon|^{r-1} u_\varepsilon u_{\varepsilon t}\,dx\,dt. \tag{14}$$

Третье слагаемое в правой части (14) оцениваем по неравенству Юнга:

$$\int\limits_{D_T} |u_\varepsilon|^{r-1} u_\varepsilon u_{\varepsilon t}\,dx\,dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{D_T} u_{\varepsilon t}^2\,dx\,dt + \frac{M(T)^{2r-2}}{2}\int\limits_{D_T} u_\varepsilon^2\,dx\,dt.$$

Тогда из (14) имеем

$$\int\limits_{D_T} u_{\varepsilon t}^2\,dx\,dt + \frac{2}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x,T)|^p\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x,T)|^2\,dx \le$$

$$\le \frac{2}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u_{0\varepsilon}|^p\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla u_{0\varepsilon}|^2 dx + M(T)^{2r-2}\int\limits_{D_T} u_\varepsilon^2\,dx\,dt. \tag{15}$$

Для оценки третьего слагаемого в правой части (15) умножим обе части (12) на $u_\varepsilon e^{-\lambda t}$ и затем проинтегрируем по D_T. В результате получим

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_\Omega u_\varepsilon^2(x,T)\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{D_T} e^{-\lambda t}u_\varepsilon^2\,dx\,dt + \varepsilon\int\limits_{D_T} e^{-\lambda t}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{D_T} e^{-\lambda t}|\nabla u_\varepsilon|^p dx\,dt \le \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{0\varepsilon}^2\,dx + M^{r-1}\int\limits_{D_T} u_\varepsilon^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt. \tag{16}$$

Выбирая $\lambda = 1 + 2(M(T))^{r-1}$, из (16) находим

$$\int\limits_{D_T} u_\varepsilon^2\,dx\,dt \le C(M(T))\int\limits_\Omega u_{0\varepsilon}^2 dx.$$

С учетом (15) получаем неравенство

$$\int\limits_{D_T} u_{\varepsilon t}^2\,dx\,dt \le C(M(T), \|u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ следует требуемая оценка(11).

Обозначим $g(s) = s^{p-1}$, $b(s) = s^r$. С учетом леммы интегральное тождество (4) представим в виде

$$\int_{D_T} \Big(u_t \eta + \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \nabla \eta\Big)\, dx\, dt = \int_{D_T} \frac{b(|u|)}{|u|}\, u\, \eta\, dx\, dt. \tag{17}$$

В качестве пробной функции в (17) используем функцию

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sign} u, & |u(x,t)| > \theta + h,\ h > 0; \\ \dfrac{1}{h}(|u| - \theta) \operatorname{sign} u, & \theta < |u| \le \theta + h; \\ 0, & |u| < \theta. \end{cases}$$

Тогда для почти всех $t > 0$ имеем равенство

$$\frac{1}{h} \int_{\theta<|u|\le\theta+h} g(|\nabla u|)|\nabla u|\, dx = \frac{1}{h} \int_{\theta<|u|\le\theta+h} b(|u|)(|u| - \theta)\, dx + \int_{|u|>\theta+h} b(|u|)\, dx -$$

$$- \Big(\frac{1}{h} \int_{\theta<|u|\le\theta+h} u_t \operatorname{sign} u\, (|u| - \theta)\, dx + \int_{|u|>\theta+h} u_t \operatorname{sign} u\, dx \Big).$$

Устремляя $h \to 0$, получаем

$$-\frac{d}{d\theta} \int_{|u|>\theta} g(|\nabla u|)|\nabla u|\, dx = \int_{|u|>\theta} b(|u|)\, dx - \int_{|u|>\theta} u_t \operatorname{sign} u\, dx. \tag{18}$$

Согласно формуле Флеминга – Ришеля (см., например, [1, 2])

$$\int_{|u|>\theta} |\nabla u|\, dx = \int_\theta^\infty P\{x: |u(x, t)| > \xi\}\, d\xi$$

и изопериметрическому неравенству в форме Де-Джорджи [1, 2]

$$P\{x: |u(x, t)| > \theta\} \ge \kappa_n \mu(\theta, t)^{\frac{n-1}{n}}, \quad \kappa_n = n C_n^{1/n},$$

имеем

$$-\frac{d}{d\theta} \int_{|u|>\theta} |\nabla u|\, dx \ge \kappa_n \mu(\theta, t)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) находим

$$-\frac{d}{d\theta} \int_{|u|>\theta} g(|\nabla u|)|\nabla u|\, dx \Big/ -\frac{d}{d\theta} \int_{|u|>\theta} |\nabla u|\, dx \le$$

$$\le \kappa_n^{-1} \mu^{-\frac{n-1}{n}} \Big(\int_{|u|>\theta} (b(|u|) - u_t \operatorname{sign} u)\, dx \Big). \tag{20}$$

Пусть $\Psi(s) = s g(s)$. Из неравенства Йенсена [9] для выпуклых функций имеем

$$\Psi\Big(\int_\Omega f_1 f_2\, dx \Big(\int_\Omega f_1\, dx \Big)^{-1} \Big) \le \int_\Omega \Psi(f_2) f_1\, dx \Big(\int_\Omega f_1\, dx \Big)^{-1}, \quad f_1 \ge 0,\ f_2 \ge 0,$$

или, что то же самое,

$$\int_\Omega f_1 f_2\, dx \le \Big(\int_\Omega f_1\, dx \Big) \Psi_{-1}\Big(\int_\Omega \Psi(f_2) f_1\, dx \Big(\int_\Omega f_1\, dx \Big)^{-1} \Big).$$

Полагая в этом неравенстве $f_1 = 1/h$, $f_2 = |\nabla u|$, $\Omega = \{\theta < |u| \le \theta + h\}$, получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\theta<|u|\le\theta+h} |\nabla u|dx \le$$

$$\le \Big(\frac{1}{h}\int\limits_{\theta<|u|\le\theta+h} dx\Big)\Psi_{-1}\Big(\frac{1}{h}\int\limits_{\theta<|u|\le\theta+h}\Psi(|\nabla u|)\,dx\Big(\frac{1}{h}\int\limits_{\theta<|u|<\theta+h} dx\Big)^{-1}\Big).$$

Устремляя $h \to 0$, имеем

$$-\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|u|>\theta} |\nabla u|dx \le (-\mu'(\theta,t))\;\Psi_{-1}\Big(\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|u|>\theta}\Psi(|\nabla u|)dx\,(\mu'(\theta,t))^{-1}\Big)$$

или

$$\Psi\Big(\Big(-\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|u|>\theta} |\nabla u|dx\Big)(-\mu'(\theta,t))^{-1}\Big) \le \Big(\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|u|>\theta}\Psi(|\nabla u|)dx\Big)(\mu'(\theta,t))^{-1}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует

$$g\Big(\Big(-\frac{d}{d\theta}\int\limits_{|u|>\theta} |\nabla u|dx\Big)(-\mu'(\theta,t))^{-1}\Big) \le \kappa_n^{-1}\mu^{-\frac{n-1}{n}}\Big(\int\limits_{|u|>\theta}(b(|u|) - u_t \operatorname{sign} u)\,dx\Big).$$

Используя неравенство (19) и монотонность $g(s)$, получаем

$$g\Big(\kappa_n \mu^{\frac{n-1}{n}}/-\mu'\Big) \le \kappa_n^{-1}\mu^{-\frac{n-1}{n}}\Big(\int\limits_{|u|>\theta}(b(|u|) - u_t \operatorname{sign} u)\,dx\Big). \quad (22)$$

Поскольку [2]

$$\int\limits_{|u|>\theta} b(|u|)\,dx \le \int\limits_0^{\mu(\theta,t)} b(u^*)\,ds$$

и [6]

$$\int\limits_{|u|>\theta} u_t \operatorname{sign} u\,dx = \int\limits_0^{\mu(\theta,t)} \frac{\partial u^*}{dt}\,ds, \quad (23)$$

то из (22) следует

$$g\Big(\kappa_n \mu^{\frac{n-1}{n}}/-\mu'\Big) \le \kappa_n^{-1}\mu^{-\frac{n-1}{n}}\Big(\int\limits_0^{\mu}\Big(b(u^*) - \frac{\partial u^*}{dt}\Big)\,ds\Big). \quad (24)$$

Отметим, что для справедливости формулы (23) достаточно, чтобы $u_t \in L_2(D_T)$ [6]. Используя замену $\mu(\theta, t) = s$, из (24) получаем (см. [1])

$$g\Big(\kappa_n s^{\frac{n-1}{n}}(-u_s^*)\Big) \le \kappa_n^{-1}s^{-\frac{n-1}{n}}\Big(\int\limits_0^{s}(b(u^*) - u_t^*)\,d\sigma\Big). \quad (25)$$

Замечание. Вывод неравенства (25) показывает, что вместо (1) можно рассматривать уравнение с нелинейностью более общего вида, например,

$$u_t = \operatorname{div}\Big(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big) + b(|u|)\frac{u}{|u|},$$

где $g(s)$ и $b(s)$, $s \in [0,\infty)$, $g(0) = b(0) = 0$, — функции из класса C^1, удовлетворяющие условиям

$$0 < \frac{s g'(s)}{g(s)} \le c_1, \quad s g(s) \text{ — выпуклая}, \quad 0 < \frac{s b'(s)}{b(s)} \le c_2. \tag{26}$$

Например, для уравнения нестационарных минимальных поверхностей $u_t = \operatorname{div}(\nabla u / \sqrt{1+|\nabla u|^2})$ имеем $g(s) = s / \sqrt{1+s^2}$. Вследствие эквивалентности $g(s)$ и $g_1(s) = s/(1+s)$, для которой выполняются условия (26), утверждение теоремы можно получить и в этом случае, если, конечно, обобщенное решение рассматривать как элемент некоторого пространства Орлича. Эллиптический случай такой задачи рассмотрен в [10].

Рассмотрим случай $p < 2$. Введем функции

$$k_\delta(s,t) = \int_\delta^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma, \quad \mathcal{K}_\delta(s,t) = \int_\delta^s \mathcal{U}^*(\sigma,t)\,d\sigma.$$

Тогда

$$\kappa_n s^{(n-1)/n} g\Big(\kappa_n s^{(n-1)/n}(-k_{\delta ss})\Big) \le \int_\delta^s (b(u^*) - u_t^*)\,d\sigma + \int_0^\delta (b(u^*) - u_t^*)\,d\sigma \equiv$$

$$\equiv \int_\delta^s b(u^*)\,d\sigma - k_{\delta t} + f_\delta(u^*) \tag{27}$$

и справедливо соответствующее равенство в терминах функции $\mathcal{K}_\delta(s,t)$.

Для разности $z_\delta(s,t) = k_\delta(s,t) - \mathcal{K}_\delta(s,t)$ получаем

$$\kappa_n^2 s^{2(n-1)/n}(-z_{\delta ss}) \int_0^1 g'\Big[-\kappa_n s^{(n-1)/n}\Big(\xi \frac{\partial^2 \mathcal{K}_\delta}{\partial s^2} + (1-\xi)\frac{\partial^2 k_\delta}{\partial s^2}\Big)\Big]d\xi \le$$

$$\le c z_\delta - z_{\delta t} - f_\delta(\mathcal{U}^*) + f_\delta(u^*), \tag{28}$$

причем мы воспользовались гладкостью функции $b(s)$ и ограниченностью решений u^*, $\mathcal{U}^*$. Для функции $z_\delta(s,t)$ выполнены граничные и начальные условия

$$z_\delta(\delta,t),\ z_{\delta s}(|\Omega|,t) = 0, \quad z_\delta(s,0) = 0.$$

Коэффициенты дифференциального неравенства и функцию $z_\delta(s,t)$ продолжим четным образом относительно точки $s = |\Omega|$ и применим принцип максимума Александрова для параболических уравнений (см. [11]). Для это заметим, что из неравенства (25) можно получить оценку

$$-u_s^* \le C s^{-(n-1)/n} g_{-1}(c s^{-1/2+1/n}).$$

Поэтому $k_\delta \in W_2^2(\delta, |\Omega|)$ и аналогично $\mathcal{K}_\delta \in W_2^2(\delta, |\Omega|)$, а следовательно, $z_\delta \in W_2^2(\delta, 2|\Omega| - 2\delta)$. Покажем, что интеграл

$$I_\delta \equiv \Big(\int_\delta^{|\Omega|} (|f_\delta(u^*)| + |f_\delta(\mathcal{U}^*)|)\,ds\Big)\times$$

$$\times\Big(\kappa_n^2 s^{\frac{2(n-1)}{n}} \int_0^1 g'[-\kappa_n s^{\frac{n-1}{n}}(\xi \mathcal{K}_{\delta ss} + (1-\xi)k_{\delta ss})]\,d\xi\Big)^{-1}$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поскольку $u_t \in L_2(D_T)$, $\mathcal{U}_t \in L_2(D_T)$ и $g(s) = s^{p-1}$, имеем

$$I_\delta \le C \int_\delta^{|\Omega|} \delta^1 s^\lambda \, ds = C_1 \delta^1 (|\Omega|^{\lambda+1} - \delta^{\lambda+1}),$$

где $\lambda = -[(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \frac{(2-p)}{p-1} + 2\frac{(n-1)}{n}]$. Таким образом, $I_\delta \to 0$ при $p > \frac{n}{2}$. По теореме сравнения имеем $z \le CI_\delta$, откуда при $\delta \to 0$ следует неравенство (8). Первая часть теоремы 1 доказана.

При доказательстве второй части теоремы 1 рассмотрим регуляризованную задачу (12), (13). Для $u_s^*(s, t)$, как и в предыдущем случае, получаем неравенство

$$\kappa_n^2 \varepsilon s^{2(n-1)/n}(-u_{\varepsilon s}^*) + \kappa_n^p s^{(n-1)p/n}(-u_{\varepsilon s}^*)^{p-1} \le \int_\delta^s ((u_\varepsilon^*)^r - u_{\varepsilon t}^*) \, d\sigma. \tag{29}$$

Для решения $\mathcal{U}_\varepsilon^*(s, t)$ соответствующей симметризованной задачи получаем неравенство

$$\kappa_n^2 \varepsilon s^{2(n-1)/n}(-\mathcal{U}_{\varepsilon s}^*) + \kappa_n^p s^{(n-1)p/n}(-\mathcal{U}_{\varepsilon s}^*)^{p-1} \le \int_\delta^s ((\mathcal{U}_\varepsilon^*)^r - \mathcal{U}_{\varepsilon t}^*) \, d\sigma. \tag{30}$$

Введем функции

$$\mathcal{K}_{\varepsilon\delta}(s, t) = \int_\delta^s \mathcal{U}_\varepsilon^*(\sigma, t) \, d\sigma, \quad k_{\varepsilon\delta}(s, t) = \int_\delta^s u_\varepsilon^*(\sigma, t) \, d\sigma.$$

Проводя те же рассуждения, что и выше, для $z_{\varepsilon\delta} = k_{\varepsilon\delta} - \mathcal{K}_{\varepsilon\delta}$ получаем оценку $z_{\varepsilon\delta} \le CI_{\varepsilon\delta}$, где

$$I_{\varepsilon\delta} = \Big(\int_\delta^{|\Omega|} \big(|f_\delta(u_\varepsilon^*)| + |f_\delta(\mathcal{U}_\varepsilon^*)| \big)^2 \kappa_n^{-2} s^{-\frac{2(n-1)}{n}} ds \Big) \times$$

$$\times \Big(\varepsilon + \int_0^1 g'\big(-\kappa_n s^{\frac{n-1}{n}} (\xi \mathcal{K}_{\delta\varepsilon ss} + (1-\xi) k_{\delta\varepsilon ss}) \big) d\xi \Big)^{-1}.$$

Поскольку для $u_\varepsilon(x, t)$ справедливы равномерные оценки $|u_\varepsilon(x, t)|$ и $|u_{\varepsilon t}(x, t)|$ по D_T (см. [8]), то для $I_{\varepsilon\delta}$ выполняется неравенство

$$I_{\varepsilon\delta} \le C \frac{\delta^2}{\varepsilon} \delta^{-1+2/n} = \frac{C}{\varepsilon} \delta^{2/n+1}.$$

Следовательно, при $\delta \to 0$ имеем

$$\int_0^s u_\varepsilon^*(\sigma, t) \, d\sigma \le \int_0^s \mathcal{U}_\varepsilon^*(\sigma, t) \, d\sigma, \quad s \in [0, |\Omega|].$$

Учитывая, что $\|u_\varepsilon - u\|_{L_1(\Omega)} \to 0$ и $\|\mathcal{U}_\varepsilon(x, t) - \mathcal{U}\|_{L_1(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (9). Теорема 1 доказана.

3. ***Доказательство теоремы 2*** основано на изучении регуляризованной задачи

$$u_{\varepsilon t} - \Delta[(u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon] = |u_\varepsilon|^{r-1} u_\varepsilon, \tag{31}$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \; u_{0\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega), \tag{32}$$

$$u_{0\varepsilon} \to u_0 \text{ в } L_1(\Omega), \quad u_{0\varepsilon}^m \to u_0^m \text{ в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 для $u_\varepsilon^*(s,t)$ и $\mathcal{U}_\varepsilon^*(s,t)$ получим соотношения

$$\kappa_n^2 s^{2(n-1)/n}\left(-((u_\varepsilon^*)^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon^*\right)_s \le \int\limits_0^s \left(-u_{\varepsilon t}^* + (u_\varepsilon^*)^r\right) d\sigma, \tag{33}$$

$$\kappa_n^2 s^{2(n-1)/n}\left(-((\mathcal{U}_\varepsilon^*)^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{U}_\varepsilon^*\right)_s = \int\limits_0^s \left(-\mathcal{U}_{\varepsilon t}^* + (\mathcal{U}_\varepsilon^*)^r\right) d\sigma. \tag{34}$$

Пусть

$$z(s,t) = k(s,t) - \mathcal{K}(s,t) \equiv \int\limits_0^s \left(u_\varepsilon^*(\sigma,t) - \mathcal{U}_\varepsilon^*(\sigma,t)\right) d\sigma.$$

Тогда из (33) и (34) имеем

$$\left(-(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s\right)_s + \left((\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{K}_s\right)_s \le (-z_t + zc(s,t))\,\kappa_n^{-2} s^{-2(n-1)/n}, \tag{35}$$

где $c(s,t) = \int_0^1 r((1-\xi)u_\varepsilon^* + \xi\mathcal{U}_\varepsilon^*)^{r-1} d\xi \le \text{const}$.

Пусть $z_+ = \max\{0, z\}$. Умножая обе части (35) на $z_+ e^{-\lambda t}$ и интегрируя по $(a, |\Omega|)\times(0,T)$, $a>0$, с учетом граничных условий $z(0,t) = z_s(|\Omega|, t) = 0$ и $z(s,0) = 0$, получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_a^{|\Omega|} \left[(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s - (\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{K}_s\right](z_+)_s e^{-\lambda t} ds\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \left[(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s - (\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{K}_s\right]\Big|_{s=a} z_+(a,t) e^{-\lambda t} dt \le$$

$$\le \kappa_n^{-2} \int\limits_0^T \int\limits_a^{|\Omega|} \left(-s^{-2(n-1)/n}\right) z_t z_+ e^{-\lambda t} ds\, dt + \kappa_n^{-2} c \int\limits_0^T \int\limits_a^{|\Omega|} s^{-2(n-1)/n} z_+^2 e^{-\lambda t} ds\, dt. \tag{36}$$

Покажем теперь, что второе слагаемое слева стремится к нулю при $a \to 0$. Интегрируя (35) от a до $|\Omega|$, имеем

$$\left|\left(-(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s + (\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{K}_s\right)\Big|_{s=a}\right| \le \kappa_n^{-2} \int\limits_a^{|\Omega|} \left(\int\limits_0^s \left| \frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon^*}{\partial t} \right| d\sigma \right) s^{-2(n-1)/n} ds + \kappa_n^{-2} \int\limits_a^{|\Omega|} \left(\int\limits_0^s |u_\varepsilon^* - \mathcal{U}_\varepsilon^*| d\sigma \right) c(s,t)\, s^{-2(n-1)/n} ds \le$$

$$\le C \int\limits_a^{|\Omega|} s^{1/2-2(n-1)/n} ds = C_1\left(|\Omega|^{1/2+2/n} - a^{1/2+2/n}\right).$$

Поскольку $z = \int_0^s (u_\varepsilon^* - \mathcal{U}_\varepsilon^*) d\sigma \le 2sM$, то из (36) при $a \to 0$ получаем неравенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_a^{|\Omega|} \left[(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s - (\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{K}_s\right](z_+)_s e^{-\lambda t} ds\, dt \le$$

$$\leq -\frac{\kappa_n^{-2}}{2}\int_a^{|\Omega|} s^{-2(n-1)/n}\, z_+^2(s,T)\, e^{-\lambda t} ds \;-\; \frac{\lambda}{2}\kappa_n^{-2}\int_0^T\int_a^{|\Omega|} s^{-2(n-1)/n}\, z_+^2 e^{-\lambda t} ds\, dt \;+$$

$$+\; C\int_0^T\int_a^{|\Omega|} s^{-2(n-1)/n}\, z_+^2 e^{-\lambda t} ds\, dt.$$

Выбирая λ достаточно большим и пользуясь монотонностью

$$[(k_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2} k_s \;-\; (\mathcal{K}_s^2+\varepsilon)^{(m-1)/2}\mathcal{K}_s](k_s-\mathcal{K}_s) \;\geq\; c|k_s-\mathcal{K}_s|^{m+1},$$

имеем

$$\int_a^{|\Omega|} e^{-\lambda t} z_+^2 s^{-2(n-1)/n} ds \;\leq\; 0,$$

откуда следует $z_+ = 0$. Таким образом, мы доказали неравенство

$$\int_0^s u_\varepsilon^*(\sigma,t)\, d\sigma \;\leq\; \int_0^s \mathcal{U}_\varepsilon^*(\sigma,t)\, d\sigma, \quad s\in(0,|\Omega|].$$

Отсюда при $\varepsilon\to 0$, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, получаем требуемое неравенство (10).

1. *Talenti G.* Elliptic equations and rearrangements // Ann. Scuola norm. super. Piza. Sci. fis. e mat. – 1976. – **4**, № 3. – P. 697–718.
2. *Talenti G.* Linear Elliptic P. D. E's: Level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1985. – **4B**, № 3. – P. 917–949.
3. *Alvino A., Trombetti G., Lions P.-L.* Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1990. – **7**, № 2. – P. 37–65.
4. *Giarrusso E.* Su una classe di equazioni non lineari ellittiche // Ric. mat. – 1982. – **31**, № 2. – P. 245–257.
5. *Vasquez J.* Symmetrization in nonlinear parabolic equations // Port. math. – 1982.– **41**, № 1–4. – P. 339– 346.
6. *Mossino J., Rakotoson J.* Isoperimetric inequalities in parabolic equations // Ann. Scuola norm. super. Piza. Sci. fis. e mat. – 1986. – **13**, № 1. – P. 51–73.
7. *Nakao M.* Existence and decay of global solutions of some nonlinear degenerate parabolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1985. – **109**. – P. 118–129.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
10. *Alvino A., Trombetti G.* Su una classe di equazioni ellittiche non lineari degenery // Ric. mat. – 1980. – **29**, № 2. – P. 193–212.
11. *Назаров А. И., Уральцева Н. Н.* Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения // Краевые задачи мат. физики и смежные вопросы теории функций. – 1985. – Вып. 147. – С. 95–109.

Получено 22.10.92