УДК 517.947

А. И. Марковский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ОБ $L_p - L_q$-ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Conditions on the powers p, q and dimension of the space, n, are given so that, if they are satisfied, then the $L_p - L_q$- estimates hold for the solution of the Cauchy problem for the second order hyperbolic equations with constant coefficients.

Вказано умови на показники p, q і розмірність простору n, при виконанні яких вірні $L_p - L_q$-оцінки розв'язків задачі Коші для гіперболічного рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Настоящая статья непосредственно примыкает к работам [1–4], а также к работам [5–7]. В ней рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x). \tag{2}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, a, c и b_j, $j = 1,\dots, n$, — комплексные постоянные. Если f — гладкая быстроубывающая на бесконечности функция, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представляет собой некоторый линейный оператор $T_t f$ от начальной скорости:

$$u(x, t) \doteq T_t f(x). \tag{3}$$

Возникает вопрос: можно ли оператор T_t продолжить по непрерывности до оператора, действующего из $L_p(R^n)$ в $L_q(R^n)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор T_t непрерывно действует из $L_p(R^n)$ в $L_q(R^n)$ тогда и только тогда, когда точка плоскости с координатами $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ принадлежит замкнутому треугольнику Γ с вершинами в точках* $P_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)$.

В случае, когда $a = 0$, $b_j = 0$, $j = 1,\dots, n$, $c = -1$ (оператор Клейна — Гордона), эта теорема доказана в [1]. Там же были получены точные двусторонние оценки $\| T_t \|_{L_p \to L_q}$ в зависимости от t (см. также [2]).

В случае $p = q$ и волнового уравнения ($a = c = 0$, $b_j = 0$, $j = 1,\dots, n$) (треугольник Γ сводится к отрезку $[P_1, P_3]$) соответствующие результаты установлены в [5 – 7].

В случае $p = q$ и оператора общего вида (1) соответствующий результат получен в [3]. Настоящая статья содержит доказательство теоремы 1 (достаточная часть). При этом существенно использованы методы, разработанные в работе [1].

В дальнейшем используются стандартные обозначения классов функций такие, как $L_p = L_p(R^n)$, C^k; $\hat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье (обобщенной) функции $f(x)$. Напомним, что мультипликатором из L_p в L_q называется такая измеримая ограниченная функция $m(\xi)$, что линейный оператор

$$T_m f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi$$

непрерывно действует из L_p в L_q, т. е.

$$\| T_m \|_{p,q} = \sup_{\| f \|_{L_p} \le 1} \| T_m f \|_{L_q} < \infty.$$

В этом случае записываем $m(\xi) \in M_p^q$. Если $p = q$, полагаем $M_p^p = M^p$. Будем называть функцию $m(\xi)$ символом оператора T_m.

Важным классом символов является класс функций $m(\xi)$, $\xi \in R^n$, $m \in C^k(R^n \setminus \{0\})$, $k \ge n/2$, удовлетворяющих с некоторой постоянной $A = A(n, k)$ неравенству

$$| D_\xi^\alpha m(\xi) | \le A(1 + |\xi|)^{-|\alpha|} \quad \forall \xi \in R^n, \ |\alpha| \le \frac{n}{2}, \tag{4}$$

где, как обычно, $D_\xi^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha}$.

Как показал С. Г. Михлин (см., например, [8, 9]), такая функция $m(\xi) \in M^p$ при $1 < p < \infty$ и $\| m \|_{M^p} = \| T_m \|_p \le C_p A$.

В дальнейшем для краткости функции $m(\xi)$, удовлетворяющие неравенству (4), будем называть функциями Михлина (ф. М.).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(\xi)$, $\xi \in R^n$, *— комплекснозначная функция из пространства* S *Л. Шварца быстроубывающих функций. Тогда для любых* $1 < p \le q < \infty$ $\varphi \in M_p^q$.

Обозначим $r = |\xi|$, $\xi \in R^n$, и пусть $l > 0$, а t — вещественный параметр. Пусть $\psi(r) \in C^\infty$, $\psi \equiv 0$ при $r \le 1$, $\psi \equiv 1$ при $r \ge 2$ и $0 \le \psi \le 1$.

Лемма 2. *Функция* $m(\xi) = \psi(r) r^{-l} e^{irt} \in M_p^q$ *тогда и только тогда, когда точка плоскости* $\left(\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q}\right)$ *принадлежит замкнутому треугольнику* Γ_l *с вершинами в точках* $P_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{l}{n-1}, \dfrac{1}{2} - \dfrac{l}{n-1}\right)$, $P_2 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{l}{n+1}, \dfrac{1}{2} - \dfrac{l}{n+1}\right)$, $P_3 = = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{l}{n-1}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{l}{n-1}\right)$.

Замечание. При $p = q$ треугольник Γ_l сводится к отрезку, соединяющему точки P_1 и P_3. В этом случае лемма 2 была установлена в работах [6, 7].

Ниже в процессе доказательства получена точная оценка зависимости $\| m \|_{p,q}$ от t.

Доказательство теоремы **1.** С помощью замены $u(x, t) = v(x, t) e^{at + i(\beta, x)}$, где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — постоянный вещественный вектор, задача (1), (2) сводится к случаю, когда $a = 0$, $\operatorname{Im} b_j = 0$.

Поскольку при этом

$$\| u(\cdot, t) \|_{L_p} = e^{\operatorname{Re} at} \| v(\cdot, t) \|_{L_p},$$

можно считать, что $a = 0$, b_j, $j = 1, \dots, n$, — вещественны. Обозначим $g(\xi) = = \sum_{j=1}^n b_j \xi_j$.

Применяя к задаче (1), (2) преобразование Фурье и обозначая Фурье-образ решения

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{R^n} u(x, t) e^{-i(x, \xi)} dx,$$

находим

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2(\mu + i\nu)} \left[e^{(\mu + i\nu)t} - e^{-(\gamma + i\nu)t} \right] \hat{f}(\xi), \tag{5}$$

где

$$\mu = \mu(\xi) = \operatorname{sign}(g(\xi) + \gamma_2) \left[\frac{\omega(\xi) - |\xi|^2 + \gamma_1}{2} \right]^{1/2}, \tag{6}$$

$$\nu = \nu(\xi) = \left[\frac{\omega(\xi) + |\xi|^2 - \gamma_1}{2} \right]^{1/2}, \tag{7}$$

$$\omega(\xi) = [(|\xi|^2 - \gamma_1)^2 + (g(\xi) + \gamma_2)^2]^{1/2}, \tag{8}$$

а γ_1 и γ_2 — вещественные постоянные, явно выражаемые через коэффициенты b_j и c исходного уравнения.

Из (8) ясно, что многообразие Λ нулей функции $\omega(\xi)$ пусто, если $\gamma_1 < 0$, или представляет собой пересечение гиперплоскости $g(\xi) = -\gamma_2$ с гиперсферой $|\xi| = \sqrt{\gamma_1}$, если $\gamma_1 > 0$, так что Λ — компактное многообразие, причем $\mu(\xi) + i\nu(\xi) = 0$ в точности в точках Λ. Предположим, что $\Lambda \neq \varnothing$ (в противном случае рассуждения упрощаются), и пусть $\delta = 4\max\{\sqrt{\gamma_1}, 2\}$, а $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$ — функция, тождественно равная 1 при $|\xi| < \delta/2$ и 0 при $|\xi| > \delta$, $\psi(\xi) = 1 - \varphi(\xi)$. Представим $\hat{u}(\xi, t)$ в виде

$$\hat{u}(\xi, t) = \varphi(\xi)\hat{u}(\xi, t) + \psi(\xi)\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi, t) + \hat{u}_1(\xi, t).$$

Замечая, что $\Lambda \subset \operatorname{supp}\varphi$, $\dfrac{e^{zt} - e^{-zt}}{z}$ — целая функция от z и $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, применяем к слагаемому $\hat{u}_0(\xi, t)$ лемму 1, откуда следует, что

$$u_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \frac{\varphi(\xi)}{\mu + i\nu} \operatorname{sh}(\mu + i\nu)t \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi$$

удовлетворяет неравенству

$$\| u_0(\cdot, t) \|_{L_q} \le C_t \| f(\cdot) \|_{L_p} \tag{9}$$

для всех $1 < p \le q < \infty$, где C_t — постоянная, зависящая от t, p, q, n.

Обозначим $\omega_+(\xi) = \left[\frac{1}{2}(\omega(\xi) + |\xi|^2 - \gamma_1)\right]^{1/2}$, $\omega_-(\xi) = \left[\frac{1}{2}(\omega(\xi) - |\xi|^2 + \gamma_1)\right]^{1/2}$ и пусть $\theta(s)$ — характеристическая функция полуоси $[0, \infty)$. Тогда $\hat{u}_1(\xi, t)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\xi, t) = \frac{\psi(\xi)}{2[\omega_+^2 + \omega_-^2]} \{ & \theta(g(\xi) + \gamma_2)[\omega_-(\xi) - i\omega_+(\xi)] e^{\omega_-(\xi)t} e^{i\omega_+(\xi)t} - \\ & - \theta(-g(\xi) - \gamma_2)[\omega_-(\xi) + i\omega_+(\xi)] e^{-\omega_-(\xi)t} e^{i\omega_+(\xi)t} - \\ & - \theta(g(\xi) + \gamma_2)[\omega_-(\xi) - i\omega_+(\xi)] e^{-\omega_-(\xi)t} e^{-i\omega_+(\xi)t} + \\ & + \theta(-g(\xi) - \gamma_2)[\omega_-(\xi) + i\omega_+(\xi)] e^{\omega_-(\xi)t} e^{-i\omega_+(\xi)t} \} \hat{f}(\xi) = \\ & = \hat{u}_{11}(\xi, t) + \hat{u}_{12}(\xi, t) + \hat{u}_{13}(\xi, t) + \hat{u}_{14}(\xi, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Слагаемые в (10) исследуются одинаково, поэтому рассмотрим первое из них.

Итак,

$$\hat{u}_{11}(\xi, t) = m(\xi, t)\hat{f}(\xi), \tag{11}$$

где

$$m(\xi, t) = \frac{\psi(\xi)}{2[\omega_+^2(\xi) + \omega_-^2(\xi)]}\theta(g(\xi) + \gamma_2)[\omega_-(\xi) - i\omega_+(\xi)]e^{\omega_-(\xi)t}e^{i\omega_+(\xi)t}. \tag{12}$$

Заметим, что при $\xi \in \operatorname{supp}\psi$ $|\xi|^2 - \gamma_1 > 0$, и можно считать, что $|\xi|$ достаточно велико. Обозначая $y = -\frac{2\gamma_1}{|\xi|^2} + \frac{\gamma_1^2}{|\xi|^4} + \frac{(g(\xi) + \gamma_2)^2}{|\xi|^4}$, получаем

$$\omega_-(\xi) = \left[\frac{1}{2}\left(\gamma_1 - \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2|\xi|^2} - \frac{g^2(\xi)}{2|\xi|^2} - \frac{\gamma_2 g(\xi)}{|\xi|^2}\right)\int_0^1 (1 + ty)^{-1/2}dt\right)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $\psi^{1/4}(\xi)\omega_-(\xi)$ — ф. М., аналогично $\psi^{1/4}(\xi)e^{\omega_-(\xi)t}$ — также ф. М.

Рассмотрим теперь функцию

$$m_1(\xi, t) = \frac{\psi^{1/4}(\xi)\omega_+(\xi)}{2[\omega_+^2(\xi) + \omega_-^2(\xi)]}e^{i\omega_+(\xi)t}. \tag{14}$$

Пусть

$$z = \frac{\gamma_1}{2|\xi|^2} + \frac{1}{2|\xi|^2}\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2|\xi|^2} - \frac{g^2(\xi)}{2|\xi|^2} - \frac{\gamma_2 g(\xi)}{|\xi|^2}\right)\int_0^1 (1 + ty)^{-1/2}dt. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_+(\xi) = |\xi| + \nu_1(\xi), \tag{16}$$

где

$$\nu_1(\xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_1}{2|\xi|} + \frac{1}{2|\xi|}\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2|\xi|^2} - \frac{g^2(\xi)}{2|\xi|^2} - \frac{\gamma_2 g(\xi)}{|\xi|^2}\right)\int_0^1 (1 + ty)^{-1/2}dt\right] \times$$

$$\times \int_0^1 (1 - tz)^{-1/2}\,dt. \tag{17}$$

Из (17) видно, что $\psi^{1/4}(\xi)e^{i\nu_1(\xi)t}$ — ф. М. Замечая, что

$$(|\xi| + \nu_1(\xi))^2 + \omega_-^2(\xi) = |\xi|^2\left[\left(1 + \frac{\nu_1(\xi)}{|\xi|}\right)^2 + \frac{\omega_-^2(\xi)}{|\xi|^2}\right],$$

записываем $m_1(\xi, t)$ в виде

$$m_1(\xi, t) = \frac{\psi^{1/8}(\xi)\left(1 + \frac{\nu_1(\xi)}{|\xi|}\right)}{\left(1 + \frac{\nu_1(\xi)}{|\xi|}\right)^2 + \frac{\omega_-^2(\xi)}{|\xi|^2}}e^{i\nu_1(\xi)t}\frac{\psi^{1/8}(\xi)e^{i|\xi|t}}{|\xi|} = m_{11}(\xi, t)m_{12}(\xi, t) \tag{18}$$

и аналогично

$$m_2(\xi, t) = \frac{\psi^{1/8}(\xi)\omega_-(\xi)e^{i\nu_1(\xi)t}}{\left(1 + \frac{\nu_1(\xi)}{|\xi|}\right)^2 + \frac{\omega_-^2(\xi)}{|\xi|^2}}\frac{\psi^{1/8}(\xi)e^{i|\xi|t}}{|\xi|^2} = m_{21}(\xi, t)m_{22}(\xi, t). \tag{19}$$

В силу изложенного выше $m_{11}(\xi, t)$ и $m_{21}(\xi, t)$ — ф. М., стало быть, принадлежат M^q при $1 < q < \infty$. В силу леммы 2 функция $m_{12}(\xi, t) \in M_p^q$, если

$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \Gamma_1$, а $m_{22}(\xi, t) \in M_p^q$, если $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \Gamma_2$. Очевидно, что $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Поскольку $m(\xi, t) = \theta(g(\xi) + \gamma_2)m_{11}m_{12} + \theta(g(\xi) + \gamma_2)m_{21}m_{22}$, $\theta(g(\xi) + \gamma_2) \in M^q$, $1 < q < \infty$ (см. [8]), получаем $m(\xi, t) \in M_p^q$, если $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \Gamma_1$. Это доказывает достаточную часть теоремы 1. Доказательство необходимости рассматривать не будем.

***Доказательство леммы* 1.** Поскольку $\varphi \in S$, нетрудно проверить, что при $\lambda > 0$ $\varphi_\lambda = |\xi|^\lambda\varphi(\xi)$ — ф. М., и, стало быть, $\varphi_\lambda \in M^p$, $1 < p < \infty$. С другой стороны, символу $|\xi|^{-\lambda}$ соответствует оператор свертки K_λ с ядром $c_{n,\lambda}|x|^{\lambda-n}$, где $c_{n,\lambda} = \text{const}$. В силу известной леммы С. Л. Соболева, если $\frac{\lambda}{n} < \frac{1}{p}$, то K_λ непрерывно действует из L_p в L_q, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{n}$. Записывая $\varphi(\xi) = |\xi|^{-\lambda}|\xi|^\lambda\varphi(\xi)$, видим, что оператор K_φ свертки с символом φ представим в виде $K_\varphi = K_\lambda K_{\varphi\lambda}$ при любом λ, $0 < \lambda < n$. При заданных $0 < p \le q < \infty$ можно взять λ так, чтобы $\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$; тогда $K_{\varphi\lambda}: L_p \to L_p$, $K_\lambda: L_p \to L_q$, так что $K_\varphi: L_p \to L_q$..

***Доказательство леммы* 2.** В случае $p = q$ эта лемма доказана в [6, 7], так что остается доказать ее для случая точки $P_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{l}{n+1}\right)$, лежащей на линии двойственности $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Для этого, следуя [1], рассмотрим аналитическую деформацию символа $m(\xi, t) = \psi(r)r^{-l}e^{irt}$, а именно

$$m_\alpha(\xi, t) = \psi(r)\, r^{-l\,[\alpha + (n+1)/2]}\, e^{irt}, \quad \alpha = \sigma + i\tau, \tag{20}$$

$$-\infty < \tau < \infty, \quad \sigma \in \left[\frac{1-n}{2}, \frac{1-n}{2} + \frac{n+1}{2l}\right].$$

Если $\sigma = (1-n)/2$, то $m_\alpha(\xi, t) = \psi(r)e^{irt}r^{-i\tau l}$ — ограниченная функция, и соответствующий оператор непрерывно действует из L_2 в L_2. Если $\sigma = \frac{1-n}{2} + \frac{n+1}{2l}$, то $m_\alpha(\xi, t) = \psi(r)r^{-(n+1)/2}e^{irt}r^{-i\tau l}$. Докажем, что Фурье-прообраз $k_1(x)$ функции $\psi(r)r^{-(n+1)/2}e^{irt}$ — функция из пространства функций ограниченной средней осцилляции (ВМО) (сведения о ВМО можно найти, например, в [10], гл. VI). Предположим, что это доказано. Оператор K с символом $\psi(r)r^{-(n+1)/2}e^{irt}r^{-i\tau l}$ рассмотрим как произведение операторов K_1K_2 с символами соответственно $\psi(r)r^{-(n+1)/2}e^{irt}$ и $r^{-i\tau l}$ и ядрами $k_1(x)$ и $k_2(x)$. Как показано в [11], оператор K_2 непрерывно действует из H^1 в H^1, причем

$$\| K_2 \| \le c(1 + |\tau|l)^{n/2}. \tag{21}$$

Там же показано, что пространства H^1 и ВМО двойственны, т.е. $(H^1)^* =$ ВМО. Если $f(x) \in H^1$, то можно записать

$$Kf(x) = \int\limits_{R^n} k_1(x-y)(K_2 f)(y)\, dy. \tag{22}$$

По нашему предположению, $k_1 \in$ BMO, а в силу упомянутой двойственности из (22) получаем

$$|Kf(x)| \le \| k_1(x-\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} \| K_2 f\|_{H^1}. \tag{23}$$

Поскольку $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ трансляционно-инвариантна, из (21) и (23) имеем

$$\| K_2 f\|_{L_\infty} \le c_1(1+|\tau|l)^{n/2}\|f\|_{H^1}.$$

Отсюда следует, что K непрерывно действует из H^1 в $L_\infty \subset$ BMO. Интересующий нас оператор имеет символ, получающийся из $m_\alpha(\xi, t)$ при $\sigma = \dfrac{3-n}{2}$, $\tau = 0$. Для оценки его нормы воспользуемся интерполяционной теоремой Стейна — Феффермана [11].

Предварительно отобразим линейно отрезок $\left[\dfrac{1-n}{2}, \dfrac{1-n}{2} + \dfrac{n+1}{2l}\right]$ на отрезок $[0, 1]$; при этом точка $\sigma = \dfrac{3-n}{2}$ преобразуется в точку $\eta = \dfrac{2l}{n+1}$, так что должно быть выполнено условие $l \le \dfrac{n+1}{2}$. Будем считать его выполненным.

Теперь оператор T с символом $\psi(r)r^{-l}e^{irt}$ действует из L_p в L_q, где $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\eta}{2} + \dfrac{\eta}{1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{l}{n+1}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\eta}{2} + \dfrac{\eta}{\infty} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{l}{n+1}$, т. е. мы доказали лемму 2 в точке P_2. При этом

$$\| T\|_{p,q} \le c_1 \| k_1\|^{\eta}_{\mathrm{BMO}}. \tag{24}$$

Для доказательства леммы 2 необходимо установить, что $k_1 \in$ BMO, а также получить оценку $\| k_1\|_{\mathrm{BMO}}$ в зависимости от t. Обозначим $R = 2\pi|x|$. Поскольку $\psi(r)r^{-(n+1)/2}e^{irt}$ — функция, зависящая только от $r = |\xi|$, ее Фурье-прообраз зависит только от R и выражается формулой [12]

$$k_1(R, t) = F(R, t) = \kappa_n R^{1-n/2}\int_0^\infty \psi(r)r^{-1/2}J_{n/2-1}(Rr)e^{irt}dr. \tag{25}$$

Здесь κ_n — постоянная, зависящая только от n, $J_{n/2-1}$ — функция Бесселя первого рода порядка $n/2-1$. Прямое исследование поведения функции (25) затруднительно, содержащийся в ней несобственный интеграл не является абсолютно сходящимся. Поэтому будем интегрировать по частям в (25). Используя известное соотношение из теории бесселевых функций (см., например, [13, 14])

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}J_\nu(z), \tag{26}$$

получаем, что для любого целого $s \ge 0$

$$\frac{d^s}{dz^s}J_\nu(z) = J_{\nu-s}(z) + c_1 z^{-1}J_{\nu-s+1}(z) + \ldots + c_s z^{-s}J_\nu(z), \tag{27}$$

где коэффициенты c_j, $j = 1,\ldots, n$, зависят только от ν, s, j.

Условимся далее не выписывать в оцениваемых выражениях некоторые множители, не влияющие на качество оценок, такие, например, как κ_n в формуле (25) и т. п. Интегрируя по частям в (25) и учитывая, что при $r \to \infty$ $J_\nu(r) = O(r^{-1/2})$, а $\psi(0) = \psi'(0) = \ldots = 0$, получаем

$$F(R,t) = t^{-k}R^{1-n/2}\int_0^\infty e^{irt}\frac{d^k}{dr^k}[\psi(r)r^{-1/2}J_{n/2-1}(Rr)]dr. \tag{28}$$

Используя формулу Лейбница и формулу (27), после несложных преобразований из (28) имеем

$$F(R,t) = t^{-k}R^{1-n/2}\int_0^\infty e^{irt}\sum_{\sigma=0}^{k}R^\sigma J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr)\sum_{j=0}^{k-\sigma}\sum_{l+m=k-\sigma-j}c_{l,m,\sigma,j}\,\psi^{(l)}(r)r^{-1/2-m-j}dr, \tag{29}$$

где $c_{l,m,\sigma,j}$ — коэффициенты, зависящие только от указанных индексов.

Дальнейшая оценка выражения (29) проводится по-разному в зависимости от величины t. Сначала рассмотрим случай $t>1$. Если n — нечетно, положим $k=(n-1)/2$, а если n — четно, то $k=n/2-1$. В соответствии с этим слагаемое суммы (29), отвечающее индексу $\sigma=k$, имеет вид

$$F_0(R,t) = t^{-(n-1)/2}R^{1/2}\int_0^\infty e^{irt}J_{-1/2}(Rr)\psi(r)r^{-1/2}dr,$$

если n — нечетно, или, поскольку $J_{-1/2}(z)=\sqrt{2/\pi z}\cos z$ (см. [13, 14]),

$$F_0(R,t) = t^{-(n-1)/2}\int_0^\infty e^{irt}\frac{\cos Rr}{r}\psi(r)dr. \tag{30}$$

Если n — четно, слагаемое в (29) с индексом $\sigma=k$ равно

$$F_l(R,t) = t^{-n/2+1}\int_0^\infty e^{irt}r^{-1/2}J_0(Rr)\psi(r)dr. \tag{31}$$

Оценим сначала $F_0(R,t)$, помня, что $t>1$. Можно считать, что

$$F_0(R,t) = F_0^+(R,t)+F_0^-(R,t),$$

где

$$F_0^\pm(R,t) = t^{-(n-1)/2}\int_0^\infty e^{i(t\pm R)r}\psi(r)\frac{dr}{r}. \tag{32}$$

Но

$$F_0^+(R,t) = \frac{t^{-(n-1)/2}}{t+R}\int_0^\infty\left[\frac{\psi'}{r}-\frac{\psi}{r^2}\right]e^{irt}dr, \tag{33}$$

и, поскольку $\operatorname{supp}\psi'\subset[1,2]$, $\operatorname{supp}\psi=[1,\infty)$, из (33) видим, что

$$|F_0^+(R,t)| \le c\,t^{-(n-1)/2}. \tag{34}$$

Очевидно, если $R<t/2$ или $R>2t$, аналогично получаем оценку

$$|F_0^-(R,t)| \le c\,t^{-(n-1)/2}. \tag{35}$$

Пусть теперь $t/2<R<2t$. Представим $F_0^-(R,t)$ в виде

$$F_0^-(R,t) = t^{-(n-1)/2}\int_1^2\psi(r)e^{i(t-R)r}\frac{dr}{r}+t^{-(n-1)/2}\int_2^\infty e^{ir(t-R)}\frac{dr}{r} = F_{01}^-+F_{02}^-.$$

Очевидно, $|F_{01}^-(R,t)| \le t^{-(n-1)/2}\ln 2$. Если $0<2(t-R)<1$, имеем

$$F_{02}^- = t^{-(n-1)/2}\int_{2(t-R)}^\infty e^{i\rho}\frac{d\rho}{\rho} = t^{-(n-1)/2}\int_{2(t-R)}^1\frac{d\rho}{\rho}+t^{-(n-1)/2}\int_{2(t-R)}^1\frac{\cos\rho-1}{\rho}d\rho+$$

$$+ it^{-(n-1)/2} \int\limits_{2(t-R)}^{1} \frac{\sin\rho}{\rho} d\rho + t^{-(n-1)/2} \int\limits_{1}^{\infty} e^{i\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -t^{-(n-1)/2} \ln 2(t-R) + t^{-(n-1)/2} O(1). \quad (36)$$

Здесь и далее $O(1)$ означает ограниченную функцию, у которой $\sup\limits_R O(1)$ оценивается постоянной, не зависящей от t.

Если $0 < 2(R-t) < 1$, аналогично получаем

$$F_{02}^{-} = t^{-(n-1)/2} \int\limits_{2(t-R)}^{1} \frac{d\rho}{\rho} + t^{-(n-1)/2} \int\limits_{2(t-R)}^{1} \frac{\cos\rho - 1}{\rho} d\rho - it^{-(n-1)/2} \int\limits_{2(t-R)}^{1} \frac{\sin\rho}{\rho} d\rho +$$

$$+ t^{-(n-1)/2} \int\limits_{1}^{\infty} e^{-i\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -t^{-(n-1)/2} \ln 2(R-t) + t^{-(n-1)/2} O(1). \quad (37)$$

Если же $2|R-t| > 1$, то, интегрируя по частям, легко убедится в том, что

$$F_{02}^{-} = t^{-(n-1)/2} O(1). \quad (38)$$

Из (34) – (38) следует

$$F_0(R,t) = -t^{-(n-1)/2} \ln^{-} 2|R-t| + t^{-(n-1)/2} O(1), \quad (39)$$

где $\ln^{-} s = \min\limits_{s>0} (\ln s, 0)$. Из (39) получаем

$$\| F_0(\cdot,t) \|_{\text{BMO}} \le t^{-(n-1)/2} (\| \ln^{-} 2|R-t| \|_{\text{BMO}} + c). \quad (40)$$

Известно, однако [10], что если вещественная функция принадлежит BMO, то ее отрицательная часть f^{-} также принадлежит BMO, причем $\| f^{-} \|_{\text{BMO}} \le \le \| f \|_{\text{BMO}}$. С другой стороны, $\| \ln 2|R-t| \|_{\text{BMO}} < \infty$ и инвариантна относительно гомотетии $R \to Rt$, так что

$$\| \ln 2|R-t| \|_{\text{BMO}} = \| \ln 2t + \ln|R-1| \|_{\text{BMO}} = \| \ln|R-1| \|_{\text{BMO}} < \infty. \quad (41)$$

Последняя величина не зависит от t, так что из (40) и (41) получаем

$$\| F_0(\cdot,t) \|_{\text{BMO}} \le c\, t^{-(n-1)/2}. \quad (42)$$

Обратимся теперь к оценке $F_e(R,t)$. Покажем, что

$$F_e(R,t) = t^{-(n-1)/2} t^{1/2} \int\limits_0^{\infty} \psi(r) r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr = t^{-(n-1)/2} [w(R,t) + O(1)],$$

где $\| w(\cdot,t) \|_{\text{BMO}} \le$ const. Для этого запишем

$$I_e = \int\limits_0^{\infty} \psi(r) r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr = \int\limits_0^{\infty} r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr - \int\limits_0^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr = I_{e1} + I_{e2}.$$

При этом (опуская множитель $\sqrt{2/\pi}$)

$$I_{e1} = t^{1/2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos rt}{\sqrt{rt}} J_0(Rr) dr + it^{1/2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin rt}{\sqrt{rt}} J_0(Rr) dr =$$

$$= t^{1/2} \int\limits_0^{\infty} J_{-1/2}(rt) J_0(Rr) dr + it^{1/2} \int\limits_0^{\infty} J_{1/2}(rt) J_0(Rr) dr = I_{e1}^{r} + iI_{e1}^{i}.$$

По формуле 6.574-75 из [15] получаем

$$I_{e1}^r = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{4})}{R^{1/2}\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{R^2}\right), & \text{если} \quad t < R; \\ \dfrac{1}{t^{1/2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{R^2}{t^2}\right), & \text{если} \quad t > R, \end{cases} \tag{43}$$

$$I_{e1}^i = \begin{cases} \dfrac{t\Gamma(\frac{3}{4})}{R^{3/2}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{2})} F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{R^2}\right), & \text{если} \quad t < R; \\ \dfrac{1}{t^{1/2}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, \frac{R^2}{t^2}\right), & \text{если} \quad t > R. \end{cases} \tag{44}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция. В рассматриваемом случае параметры α, β, γ связаны соотношением $\alpha + \beta = \gamma$ и потому при $z \to 1 - 0$ $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ имеет следующую асимптотику [14, с. 104]:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = -\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \ln(1 - z) + O(1). \tag{45}$$

Используя (43) и (45), при $t < R$ имеем

$$I_{e1}^r = -\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}\left[\ln^-\left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + O(1)\right] + t^{-1/2}\left(1 - \sqrt{\frac{t}{R}}\right)\left[\ln^-\left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + O(1)\right].$$

Но очевидно, что $\left(1 - \sqrt{\frac{t}{R}}\right)\left[\ln^-\left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + O(1)\right] = O(1)$ при $t < R$, так что

$$I_{e1}^r = -\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})} \ln^-\left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + t^{-1/2} O(1). \tag{46}$$

С другой стороны, если $t > R$, из (43) и (45) получаем

$$I_{e1}^r = -\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}\left[\ln^-\left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + O(1)\right]. \tag{47}$$

Формулы (46) и (47) можно объединить в одну, справедливую при любых R:

$$I_{e1}^r = -\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}\left[\ln^-\left|1 - \frac{t^2}{R^2}\right| + \theta\left(1 - \frac{R}{t}\right)\ln\frac{R^2}{t^2}\right] + t^{-1/2} O(1). \tag{48}$$

Поскольку BMO-норма инвариантна относительно гомотетий $R \to Rt$ и функция $\theta(1 - R)\ln R \in \mathrm{BMO}$, получаем из (48), что $t^{1/2} I_{e1}^r \in \mathrm{BMO}$, и с некоторой постоянной c, не зависящей от t,

$$\| t^{1/2} I_{e1}^r \|_{\mathrm{BMO}} \le c. \tag{49}$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно I_{e1}^i, получаем

$$\| t^{1/2} I_{e1}^i \|_{\mathrm{BMO}} \le c, \tag{50}$$

так что из оценок (49) и (50) имеем

$$t^{1/2} \| I_{e1} \|_{\mathrm{BMO}} \le c. \tag{51}$$

Отметим, что мы получили оценку (51), не налагая на t других ограничений, кроме $t > 0$. Стало быть, она верна при $t > 0$. Перейдем теперь к оценке I_{e2}. Можно считать, что $t > 2$, поскольку при $1 < t < 2$ оценка $|I_{e2}| \le ct^{1/2}$ очевидна.

Представим I_{e2} в виде

$$I_{e2} = \int_0^{2/t} \varphi(r) r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr + \int_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_0(Rr) e^{irt} dr = I_{e21} + I_{e22}.$$

Поскольку $|J_0(Rr)| \le 1$, получаем

$$|I_{e21}| \le \int_0^{2/t} r^{-1/2} dr < 2t^{-1/2}. \tag{52}$$

При оценке I_{e22} предположим вначале, что $R > t/2$, так что при $r \in [2/t, 2]$ $Rr \ge 1$. Тогда можно использовать асимптотическое представление [13]

$$J_0(Rr) = R^{-1/2} r^{-1/2} \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) + O(R^{-3/2} r^{-3/2}),$$

так что

$$I_{e22} = R^{-1/2} \int_{2/t}^{2} \varphi(r) \frac{\cos\left(Rr - \dfrac{\pi}{4}\right)}{r} e^{irt} dr + \int_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} e^{irt} O(R^{-3/2} r^{-3/2}) dr = I_{e221} + I_{e222}.$$

Очевидно,

$$|I_{e222}| \le cR^{-3/2} \int_{2/t}^{2} r^{-2} dr < cR^{-3/2} t < ct^{-1/2}. \tag{53}$$

Ясно также, что для оценки I_{e221} достаточно оценить

$$I^{\pm}_{e221} = R^{-1/2} \int_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1} e^{i(t \pm R)r} dr.$$

Учитывая, что $\dfrac{2(t+R)}{t} \ge 3$, нетрудно получить оценку

$$|I^{+}_{e221}| \le ct^{-1/2}. \tag{54}$$

Далее,

$$I^{-}_{e221} = R^{-1/2} \int_{2/t}^{1} r^{-1} e^{i(t-R)r} dr + R^{-1/2} \int_{1}^{2} \varphi(r) r^{-1} e^{i(t-R)r} dr = I^{-}_{e2211} + I^{-}_{e2212}.$$

Ясно, что

$$|I^{-}_{e2212}| \le R^{-1/2} \int_1^2 \frac{dr}{r} < t^{-1/2} \sqrt{2} \ln 2.$$

Рассуждая, как при получении формул (36) – (39), видим, что

$$I^{-}_{e2211} = R^{-1/2} \left[\ln^{-} |R-t| - \ln^{-} \frac{2|R-t|}{t} \right] + t^{-1/2} O(1). \tag{55}$$

Поскольку

$$\max_{t \le R \le t+1} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{R}}\right) |\ln^{-}(R-t)| \le \frac{e^{-1}}{2t} < \frac{e^{-1}}{4},$$

(55) можно записать в виде

$$I^{-}_{e2211} = t^{-1/2} \left[\ln^{-} |R-t| - \ln^{-} \frac{2|R-t|}{t} \right] + t^{-1/2} O(1). \tag{56}$$

Оценим теперь I_{e22} при $R < t/2$. Интегрируя по частям, находим

$$I_{e22} = \frac{R}{t}\int\limits_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt} dr + t^{-1/2} O(1). \tag{57}$$

Если $R < 1/2$, то из оценки $|J_1(Rr)| < cRr$ получаем

$$\left| \frac{R}{t}\int\limits_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt} dr \right| \le \frac{R^2}{t}\int\limits_{0}^{2} r^{1/2} dr < ct^{-1}.$$

Пусть теперь $1/2 < R < t/2$, так что $2/t < 1/R < 2$, и можно записать

$$\frac{R}{t}\int\limits_{2/t}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt} dr = \frac{R}{t}\left(\int\limits_{2/t}^{1/R} + \int\limits_{1/R}^{2}\right)(\varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt}) dr.$$

Тогда

$$\left| \frac{R}{t}\int\limits_{2/t}^{1/R} \varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt} dr \right| \le \frac{cR}{t}\int\limits_{2/t}^{1/R} r^{-1/2} dr < c\frac{\sqrt{R}}{t} < c_1 t^{-1/2}.$$

Используя асимптотическое представление $J_1(R\,r)$ при $R\,r > 1$, получаем

$$\frac{R}{t}\int\limits_{1/R}^{2} \varphi(r) r^{-1/2} J_1(Rr) e^{irt} dr = \frac{R^{1/2}}{t}\int\limits_{1/R}^{2} \varphi(r) r^{-1} \cos(Rr-\alpha) e^{irt} dr +$$

$$+ \frac{R^{-1/2}}{t}\int\limits_{1/R}^{2} \varphi(r) e^{irt} O(r^{-2}) dr, \quad \alpha = \text{const}.$$

Но второе слагаемое по модулю не превышает

$$\frac{R^{-1/2}}{t}\int\limits_{1/R}^{\infty} r^{-2} dr = \frac{R^{1/2}}{t} < ct^{-1/2}.$$

Первое слагаемое — сумма вида

$$a_1\frac{R^{1/2}}{t}\int\limits_{1/R}^{1} r^{-1} e^{i(t+R)r} dr + a_2\frac{R^{1/2}}{t}\int\limits_{1/R}^{1} r^{-1} e^{i(t-R)r} dr + t^{-1/2} O(1).$$

Поскольку $t/R - 1 \ge 1$, $t/R + 1 \ge 3$, отсюда следует, что при $R < t/2$ справедлива оценка $|I_{e22}| \le ct^{-1/2}$.

Итак, слагаемое I_{e2} удовлетворяет неравенству

$$\| I_{e2}(\cdot, t) \|_{\mathrm{BMO}} \le ct^{-1/2}. \tag{58}$$

Теперь из (51) и (58) следует

$$\| F_e(\cdot, t) \|_{\mathrm{BMO}} \le ct^{-\frac{(n-1)}{2}}, \quad t > 1.$$

Мы оценили первое слагаемое в сумме (29) при $t > 1$. Что касается слагаемых, отвечающих значению индекса $\sigma = k-1, k-2, \ldots$, то в них возможно последующее интегрирование по частям. Используя неравенство

$$| z^{-\nu} J_\nu(z) | \le c_\nu, \quad \nu > -1/2, \tag{59}$$

вытекающее из интегрального представления [13],

$$J_\nu(z) = c_\nu z^\nu \int\limits_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt,$$

а также тот факт, что если в формуле (29) $l = 0$, $\sigma \le k-1$, то $m + j \ge 1$, и, стало быть, $r^{-1/2-m-j} \in L_1(0, \infty)$, получаем, что для любого из последующих слагаемых $\tilde{F}$ справедлива оценка

$$\sup_{0<R<\infty} |\tilde{F}(R,t)| \le c\, t^{-(n+1)/2}, \quad t > 1. \tag{60}$$

Таким образом, последующие слагаемые в этом случае подчинены первому, и поскольку $\|\tilde{F}(\cdot,t)\|_{\mathrm{BMO}} \le \|\tilde{F}(\cdot,t)\|_{L_\infty}$, при $t>1$ получаем

$$\|F(\cdot,t)\|_{\mathrm{BMO}} \le c\, t^{-(n-1)/2}. \tag{61}$$

Перейдем теперь к случаю $0<t<1$. Оценка (60) показывает, что в этом случае слагаемые в сумме (29) с индексами $\sigma = k-1, k-2, \ldots$ не могут быть подчинены первому, так как при $0<t<1$ $t^{-(n+1)/2} > t^{-(n-1)/2}$. Однако при $0<t<1$ оценка (60) слишком грубая. Покажем, что для каждого слагаемого F_σ суммы (29) верна оценка

$$\|F_\sigma(\cdot,t)\|_{\mathrm{BMO}} \le c\, t^{-(n-1)/2}, \qquad t > 1. \tag{62}$$

Пусть n — нечетно. Первое слагаемое в (29) суть

$$F_0(R,t) = t^{-(n-1)/2}\int_0^\infty e^{irt}\frac{\cos Rr}{r}\psi(r)dr = t^{-(n-1)/2}\int_1^2 e^{irt}\frac{\cos Rr}{r}\psi(r)dr +$$

$$+ t^{-(n-1)/2}\int_2^\infty \frac{\cos Rr}{r}e^{irt}dr = F_{01}(R,t) + F_{02}(R,t). \tag{63}$$

Очевидно,

$$\left|\int_1^2 e^{irt}\frac{\cos Rr}{r}\psi(r)dr\right| \le \ln 2,$$

так что

$$|F_{01}(R,t)| \le \ln 2\; t^{-(n-1)/2}. \tag{64}$$

С другой стороны, F_{02} — сумма слагаемых вида

$$F_{02}^{\pm} = t^{-(n-1)/2}\int_2^\infty e^{i(t\pm R)r}\frac{dr}{r},$$

так что

$$F_{02}^{+} = t^{-(n-1)/2}\int_{2(t+R)}^\infty e^{i\rho}\frac{d\rho}{\rho}.$$

Если $2(t+R) > 1$, то $|F_{02}^{+}| \le c\, t^{-(n-1)/2}$. Если же $2(t+R) < 1$, то

$$F_{02}^{+} = t^{-\frac{(n-1)}{2}}\int_{2(t+R)}^1 e^{i\rho}\frac{d\rho}{\rho} + t^{-\frac{(n-1)}{2}}\int_1^\infty e^{i\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -t^{-\frac{(n-1)}{2}}\ln^{-}2(t+R) + t^{-\frac{(n-1)}{2}}O(1). \tag{65}$$

Таким образом, при $0<R<\infty$ имеем

$$F_{02}^{+} = -t^{-(n-1)/2}\ln^{-}2(t+R) + t^{-(n-1)/2}O(1). \tag{66}$$

Обратимся теперь к слагаемому

$$F_{02}^{-} = t^{-(n-1)/2}\int_2^\infty \frac{e^{i(t-R)r}}{r}dr.$$

Если $0 < t - R$, то $0 < t - R < 1$, и если $2(t - R) < 1$, то

$$F_{02}^{-} = t^{-\frac{(n-1)}{2}} \int\limits_{2(t-R)}^{1} e^{i\rho} \frac{d\rho}{\rho} + t^{-\frac{(n-1)}{2}} \int\limits_{1}^{\infty} e^{i\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -t^{-\frac{(n-1)}{2}} \ln^{-} 2(t-R) + t^{-\frac{(n-1)}{2}} O(1). \tag{67}$$

Если же $2(t - R) > 1$, то ясно, что

$$|F_{02}^{-}| \le c\, t^{-(n-1)/2}. \tag{68}$$

Если $t - R < 0$, то

$$F_{02}^{-} = t^{-(n-1)/2} \int\limits_{2(R-t)}^{\infty} e^{-i\rho} \frac{d\rho}{\rho},$$

и, если $2(R - t) < 1$, то как и выше, получаем

$$F_{02}^{-} = -\, t^{-(n-1)/2} \ln^{-} 2(R-t) + t^{-(n-1)/2} O(1), \tag{69}$$

а при $2(R - t) > 1$

$$|F_{02}^{-}| \le c\, t^{-(n-1)/2}. \tag{70}$$

В итоге из (67) – (70) следует

$$F_{02}^{-} = -\, t^{-(n-1)/2} \ln^{-} 2|R - t| + t^{-(n-1)/2} O(1). \tag{71}$$

Совместно с (66) это приводит к оценке

$$\| F_0(\cdot, t)\|_{\mathrm{BMO}} \le c\, t^{-(n-1)/2}, \quad 0 < t < 1. \tag{72}$$

Пусть теперь $\sigma < k = (n-1)/2$. Рассмотрим слагаемое F_σ суммы (29) вида

$$F_\sigma = t^{-(n-1)/2} R^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_{1}^{\infty} e^{irt} R^{\sigma} J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr) \psi^{(l)}(r) r^{-1/2-m-j} dr, \tag{73}$$

где $l + m = \frac{1}{2}(n-1) - \sigma - j$, $0 \le j \le \frac{1}{2}(n-1) - \sigma$, $l \ge 0$, $m \ge 0$.

Если $l \ge 1$, то $\psi^{(l)}(r) \in C_0^{\infty}[1, 2]$, и в этом случае из (59) получаем

$$|F_\sigma| \le c\, t^{-(n-1)/2} \int\limits_{1}^{2} r^{-3/2-m-j-\sigma+n/2} dr \le c_1 t^{-(n-1)/2}. \tag{74}$$

Если в (73) $l = 0$, то $m + j = \frac{1}{2}(n-1) - \sigma$. Если $0 < R < 1$, то

$$F_\sigma = t^{-(n-1)/2} \left(\int\limits_{1}^{1/R} + \int\limits_{1/R}^{\infty} \right) (e^{irt} (Rr)^{\sigma+1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr) \psi(r) r^{-1}) dr = F_{\sigma 1} + F_{\sigma 2}.$$

При оценке $F_{\sigma 1}$ заметим, что при $Rr < 1$ можно записать

$$(Rr)^{\sigma+1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr) = \gamma_{n,\sigma} + O(Rr),$$

где $\gamma_{n,\sigma} = \mathrm{const}$, и для простоты считаем $\gamma_{n,\sigma} = 1$. Тогда

$$F_{\sigma 1} = t^{-(n-1)/2} \int\limits_{1}^{1/R} e^{irt} \psi(r) \frac{dr}{r} + t^{-(n-1)/2} \int\limits_{1}^{1/R} e^{irt} O(Rr) \psi(r) \frac{dr}{r} = F_{\sigma 11} + F_{\sigma 12}. \tag{75}$$

При этом

$$|F_{\sigma 12}| \le c t^{-(n-1)/2} R \int\limits_{1}^{1/R} dr = c t^{-(n-1)/2},$$

а

$$F_{\sigma 11} = t^{-(n-1)/2} \int_1^{1/R} e^{irt} \frac{dr}{r} + t^{-(n-1)/2} \tag{76}$$

Рассуждая, как и ранее, из (76) получаем

$$F_{\sigma 1} = t^{-(n-1)/2} \ln^- \frac{t}{R} + t^{-(n-1)/2} O(1). \tag{77}$$

При оценке $F_{\sigma 2}$ заметим, что $Rr > 1$, так что

$$J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr) = (Rr)^{-1/2} \cos(Rr - \delta) + O(R^{-3/2} r^{-3/2}), \quad \delta = \delta(n, \sigma). \tag{78}$$

Тогда

$$F_{\sigma 2} = t^{-(n-1)/2} \int_{1/R}^{\infty} e^{irt} (Rr)^{\sigma + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}} \cos(Rr - \delta) \psi(r) r^{-1} dr +$$

$$+ t^{-(n-1)/2} \int_{1/R}^{\infty} e^{irt} \psi(r) r^{-1} O((Rr)^{\sigma - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}) dr = F_{\sigma 21} + F_{\sigma 22}. \tag{79}$$

Поскольку $\sigma = n/2 - 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то

$$| F_{\sigma 22} | \le t^{-(n-1)/2} R^{\sigma - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}} \int_{1/R}^{\infty} r^{\sigma - \frac{3}{2} - \frac{n}{2}} dr,$$

а так как $\sigma - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} = -2 - \varepsilon$, то последний интеграл сходится, и мы получаем

$$| F_{\sigma 22} | \le c t^{-(n-1)/2}. \tag{80}$$

Аналогично оценивается и $F_{\sigma 21}$.

Пусть теперь $l = 0$ и $R > 1$. Тогда

$$F_\sigma = t^{-(n-1)/2} R^{1 - \frac{n}{2}} \int_1^{\infty} e^{irt} R^\sigma J_{\frac{n}{2}-1-\sigma}(Rr) \psi(r) r^{-\frac{n}{2}+\sigma} dr. \tag{81}$$

Поскольку в (81) $Rr > 1$, используем асимптотическое разложение (78), так что

$$F_\sigma = t^{-(n-1)/2} R^{\sigma + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}} \int_1^{\infty} e^{irt} \cos(Rr - \delta) \psi(r) r^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2} + \sigma} dr +$$

$$+ t^{-(n-1)/2} R^{\sigma - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}} \int_1^{\infty} O(r^{-\frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \sigma}) e^{irt} \psi(r) dr = F_{\sigma 1} + F_{\sigma 2}.$$

Так как $\sigma = n/2 - 1/2 - \varepsilon$, то

$$| F_{\sigma 1} | \le c t^{-(n-1)/2} R^{-\varepsilon} \int_1^{\infty} r^{-1-\varepsilon} dr < c t^{-(n-1)/2}, \tag{82}$$

ибо $R > 1$. Аналогично получаем такую же оценку и для $F_{\sigma 2}$. В итоге из оценок (74) – (82) следует, что при n — нечетном и $0 \le \sigma \le k - 1$ выполняется оценка

$$\| F_\sigma(\cdot, t) \|_{\mathrm{BMO}} \le c t^{-(n-1)/2}. \tag{83}$$

Пусть теперь n — четно. Полагая в (29) $k = n/2 - 1$, получаем

$$F(R, t) = F_0(R, t) + \sum_{s=1}^{n/2-1} F_s(R, t),$$

где

$$F_0(R, t) = t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{irt} J_0(Rr) \psi(r) r^{-1/2}\, dr; \tag{84}$$

$$F_s(R, t) = t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{irt} R^{-s} J_s(Rr) \sum_{j=0}^{s} \sum_{l+m=s-j} c_{l,m,s,j} \psi^{(l)}(r) r^{-1/2-m-j}\, dr. \tag{85}$$

Полагая, как и ранее, $\varphi(r) = 1 - \psi(r)$, представляем $F_0(R, t)$ в виде

$$F_0(R, t) = t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{irt} J_0(Rr) r^{-1/2} dr - t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^2 e^{irt} J_0(Rr) r^{-1/2} \varphi(r) dr = F_{01} + F_{02}.$$

Очевидно, $|F_{02}| \le ct^{-(n-1)/2}$, ибо $0 < t < 1$.

Оценка слагаемого F_{01} уже проведена в соотношениях (43)–(51). Поэтому обратимся к оценке остальных слагаемых F_s, каждое из которых при $1 \le s \le$ $\le n/2 - 1$ есть сумма слагаемых вида

$$\tilde{F}_s(R, t) = t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{irt} R^{-s} J_s(Rr) \psi^{(l)}(r) r^{-1/2-m-j} dr, \tag{86}$$

где $m + l = s - j$, $j = 0, 1, \ldots, s$. Если $l = 0$, то $m + j = s$, и в этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s(R, t) &= t^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{irt} R^{-s} J_s(Rr) \psi(r) r^{-1/2-s} dr = \\ &= t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} R^{-s} \int_0^\infty J_{-1/2}(rt) J_s(Rr) \psi(r) r^{-s} dr + \\ &+ it^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} R^{-s} \int_0^\infty J_{1/2}(rt) J_s(Rr) \psi(r) r^{-s}\, dr = \tilde{F}_{s1} + \tilde{F}_{s2}. \end{aligned} \tag{87}$$

Представим $\tilde{F}_{s1}$ и $\tilde{F}_{s2}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{s1} &= t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} R^{-s} \int_0^\infty J_{-1/2}(rt) J_s(Rr)\, r^{-s} dr - t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \int_0^2 J_{-1/2}(rt) J_s(Rr) (Rr)^{-s} \varphi(r)\, dr, \\ \tilde{F}_{s2} &= t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} R^{-s} \int_0^\infty J_{1/2}(rt) J_s(Rr)\, r^{-s}\, dr - t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \int_0^2 J_{1/2}(rt) J_s(Rr) (Rr)^{-s} \varphi(r)\, dr, \end{aligned} \tag{88}$$

так что $\tilde{F}_{s1} = \tilde{F}_{s11} + \tilde{F}_{s12}$, $\tilde{F}_{s2} = \tilde{F}_{s21} + \tilde{F}_{s22}$. В силу (59) имеем

$$|\tilde{F}_{s12}| \le c_s t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \int_0^2 r^{-1/2} dr \le c_s t^{-(n-1)/2}. \tag{89}$$

Аналогично оценивается и $|\tilde{F}_{s22}|$.

Оставшиеся интегралы вычисляются по формулам [15, с. 706]

$$\tilde F_{s11} = R^{-s} t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \begin{cases} \dfrac{t^{-1/2}\Gamma(\frac14)}{2^s R^{1/2-s}\Gamma(\frac34+s)\Gamma(\frac12)} F\left(\frac14,\ \frac14 - s,\ \frac12,\ \frac{t^2}{R^2}\right), & 0<t<R; \\ \dfrac{R^s}{2^s t\Gamma(s+1)} F\left(\frac14,\ \frac34,\ s+1,\ \frac{R^2}{t^2}\right), & 0<R<t, \end{cases} \tag{90}$$

$$\tilde F_{s21} = R^{-s} t^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \begin{cases} \dfrac{t^{1/2}\Gamma(\frac34)}{2^s R^{3/2-s}\Gamma(\frac14+s)\Gamma(\frac32)} F\left(\frac34,\ \frac34 - s,\ \frac32,\ \frac{t^2}{R^2}\right), & 0<t<R; \\ \dfrac{R^s}{2^s t\Gamma(s+1)} F\left(\frac34,\ \frac14,\ s+1,\ \frac{R^2}{t^2}\right), & 0<R<t. \end{cases} \tag{91}$$

Здесь $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция. Если $0<R<t$, то при $s \ge 1$ $F\left(\frac14, \frac34, s+1, z\right) = F\left(\frac34, \frac14, s+1, z\right)$ — регулярная функция, следовательно, при $0<R<t$

$$|\tilde F_{s11}(R,t)| \le ct^{-(n-1)/2}, \quad |\tilde F_{s21}(R,t)| \le ct^{-(n-1)/2}. \tag{92}$$

Если $0<t<R$, для оценки (90), (91) удобно воспользоваться леммой 1 из [4], где получена формула перехода от F с отрицательными параметрами β или γ к F с положительными параметрами, когда для F справедливо интегральное представление

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+k)} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha+l)\Gamma(\gamma-\alpha-l+k)}{\Gamma(k-l+1)\Gamma(l+1)}(1-z)^l \times$$
$$\times F(\alpha+l, \beta+k, \gamma+k, z), \tag{93}$$

где k — любое целое неотрицательное число. Из (93) получаем

$$F\left(\frac14,\ \frac14 - s,\ \frac12,\ \frac{t^2}{R^2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac12\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma^2\left(\frac14\right)\Gamma\left(s+\frac12\right)} \sum_{l=0}^{s} \frac{\Gamma\left(\frac14+l\right)\Gamma\left(\frac14+s-l\right)}{\Gamma(s-l+1)\Gamma(l+1)}\left(1-\frac{t^2}{R^2}\right)^l \times$$
$$\times F\left(\frac14+l,\ \frac14,\ \frac12+s,\ \frac{t^2}{R^2}\right), \tag{94}$$

$$F\left(\frac34,\ \frac34 - s,\ \frac32,\ \frac{t^2}{R^2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac32\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma^2\left(\frac34\right)\Gamma\left(s+\frac32\right)} \sum_{l=0}^{s} \frac{\Gamma\left(\frac34+l\right)\Gamma\left(\frac34+s-l\right)}{\Gamma(s-l+1)\Gamma(l+1)}\left(1-\frac{t^2}{R^2}\right)^l \times$$
$$\times F\left(\frac34+l,\ \frac34,\ \frac32+s,\ \frac{t^2}{R^2}\right).$$

Входящие в правые части формул (94) функции F регулярны, за исключением случая $l=s$, когда они имеют при $R=t$ логарифмическую особенность. Однако, благодаря множителю $(1-t^2/R^2)^l$ каждое слагаемое суммы (94) оказывается регулярным.

Поскольку $R^{-s}t^{-n/2+3/2}t^{-1/2}R^{s-1/2} = t^{-n/2+1/2}(t/R)^{1/2} < t^{-(n-1)/2}$ при $t<R$, отсюда получаем

$$|\tilde F_{s11}| \le ct^{-(n-1)/2}, \quad |\tilde F_{s21}| \le ct^{-(n-1)/2}. \tag{95}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда в (85) $l \ge 1$. Поскольку $\operatorname{supp}\psi^{(l)} \subset [1, 2]$, из неравенства (59) получаем

$$|\tilde F_s(R,t)| \le ct^{-n/2+1} < ct^{-(n-1)/2}. \tag{96}$$

Из оценок (86) – (96) следуют неравенства

$$\| F(\cdot, t) \|_{\mathrm{BMO}} \leq c t^{-(n-1)/2}, \quad 0 < t < 1, \quad n \text{ — четно.} \tag{97}$$

Подставляя полученные неравенства (83), (97) в (24), получаем, что для оператора свертки T с символом $\psi(r) r^{-l} e^{irt}$ выполняется неравенство

$$\| T \|_{p,q} \leq c\, t^{-\frac{l(n-1)}{n+1}},$$

если $(1/p, 1/q) = P_2$. При этом мы предполагали, что $l \leq (n+1)/2$. Если $l > (n+1)/2$, то легко видеть, что $\psi(r) r^{-l} e^{irt} \in L_2(R^n)$ и $D_\xi^\alpha [\psi(r) r^{-l} e^{irt}] \in L_2(R^n)$ при $|\alpha| \leq n/2$. По лемме С. Н. Бернштейна (см. [9]) ядро $F(R, t)$ соответствующего оператора свертки принадлежит $L_1(R^n)$, а тогда из неравенства Минковского следует T: $L_1 \to L_1$. С другой стороны, при $l > (n+1)/2$ рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2, показывают, что $F(R, t)$ — ограниченная функция, так что T: $L_1 \to L_\infty$. Поскольку, очевидно, T: $L_2 \to L_2$, из теоремы М. Риса об интерполяции следует, что $T: L_p \to L_q$ при всех $1 \leq p \leq q \leq \infty$, т. е. при $l > (n+1)/2$ треугольник Γ_l — треугольник с вершинами в точках $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$.

1. *Marshall B., Straus W., Wainger S.* $L_p - L_q$-estimates for the Klein – Gordon equation // J. Math. Pures et Appl. – 1980. – **59**, № 4. – P. 417 – 440.
2. *Марковский А. И.* Замечания об $L_p - L_q$-оценках решения уравнения Клейна – Гордона // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 233 – 245.
3. *Марковский А. И.* Об L_p-оценках решений некоторых гиперболических уравнений // Там же. – 1987. – **39**, № 4. – С. 457 – 463.
4. *Марковский А. И.* О L_p-оценках для уравнения Клейна — Гордона // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 11. – С. 1956 – 1963.
5. *Sjöstrand S.* On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation // Ann. sci. norm. super. Pisa. – 1970. – **24**, № 3. – P. 331 – 348.
6. *Miyachi A.* On some estimates for wave equation in L_p and H^p // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A. – 1980.– **27**, № 2.– P. 331 –354.
7. *Peral J. S.* L_p-estimates for the wave equation // J. Function. Anal. – 1980. – **36**. – P. 114 – 193.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.– М.: Мир, 1973.– 342 с.
9. *Берг Й., Лефстрем.* Интерполяционные пространства. Введение.– М.: Мир, 1980.– 264 с.
10. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
11. *Fefferman C., Stein E.* H^p-spaces of several variables // Acta math. – 1972. – **129**. – P. 137 – 193.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М: Мир, 1974. – 331 с.
13. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.– М.: Гостехтеориздат, 1953.– 380 с.
14. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1963. – Т. 2. – 516 с.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Получено 22.10.92