УДК 517.925

А.О. Игнатьев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

A non-autonomous system of ordinary differential equations is considered. It is proved that if this system admits a uniformly asymptotically stable integral set, then there is a function similar to Lyapunov function in a neighborhood of this set.

Розглянуто неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь. Доведено, що якщо ця система припускає рівномірно асимптотично стійку інтегральну множину, то в околі цієї множини існує функція, яка аналогічна функції Ляпунова.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

где $x,\ X \in R^n,\ t \in I = [0; \infty)$. Предположим, что при

$$(t, x) \in \Gamma_{H_1} = I \times B_{H_1}, \quad B_{H_1} = \{x \in R^n: \|x\| < H_1\} \tag{2}$$

выполнены условия существования и единственности решений системы (1). Здесь и далее $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, H_1 — некоторое положительное число. Введем ряд определений, аналогичных тем, которые использованы в работах [1–6].

Определение 1. *Множество M пространства (t, x) называется интегральным, если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ выполняется $(t, x(t)) \in M$, $t \geq t_0$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы* (1) *с начальными данными $x(t_0) = x_0$.*

Пусть $M \subset I \times R^n$. Обозначим через M_s пересечение этого множества с гиперплоскостью $t = s$, а через $\rho(x, M_s)$ расстояние от точки x до множества M_s. Множество M назовем периодическим с периодом ω, если при любом $s \in I$

$$M_s = M_{s+\omega}. \tag{3}$$

Интегральное множество M назовем *не зависящим от времени*, если соотношение (3) справедливо тождественно при любых s и ω.

Определение 2. *Интегральное множество M системы* (1) *называется равномерно устойчивым, если для любых $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_0, M_{t_0}) < \delta$ следует неравенство $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.*

Обозначим $S(M_t, r) = \{x \in R^n:\ \rho(x, M_t) < r\}$.

Определение 3. *Интегральное множество M называется равномерно притягивающим, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что справедливо неравенство $\rho(x(t, t_0, x_0), M_t) < \varepsilon$ для всех $t_0 \in I$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t \geq t_0 + \sigma$.*

Интегральное множество M называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим. Будем говорить, что область $\{(t, x) \in R^{n+1}:\ t \in I,\ x \in S(M_t, \eta)\}$ содержится в области притяжения интегрального множества M.

Будем рассматривать, следуя А. М. Ляпунову, вещественные функции $v(t, x)$ переменных t, x, определенные и непрерывно дифференцируемые в области

$U_H(M) = \{(t, x) \in R^{n+1}: t \in I, x \in S(M_t, H)\}$, причем $U_H(M) \in \Gamma_{H_1}$. Будем предполагать, если не оговорено противное, выполнение равенства

$$v(t, x) = 0 \text{ при } t \in I, x \in M_t. \tag{4}$$

Определение 4. *Функция $v(t, x)$ называется определенно-положительной относительно интегрального множества M системы* (1), *если выполняются условия* (4) *и* $v(t, x) \geq a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$, *где K — класс функций Хана* [5]. *Аналогично функция $v(t, x)$ называется определенно-отрицательной относительно множества M, если* $v(t, x) \leq -a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$.

Определение 5. *Функция $v(t, x)$ допускает в области $U_H(M)$ бесконечно малый высший предел относительно M, если существует функция $b \in K$ такая, что* $|v(t, x)| \leq b(\rho(x, M_t))$.

Рассмотрим задачу о существовании функции v, удовлетворяющей условиям теоремы, аналогичной теореме Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости положения равновесия. Для доказательства существования такой функции воспользуемся методом Н. Н. Красовского [7]. Пусть U_H — область, лежащая вместе со своим замыканием $\overline{U}_H$ в области Γ_{H_1}. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что M таково, что при любых положительных h, H $(h < H)$ справедливо включение $\overline{U}_h \subset U_H$. Кроме того, предполагаем, что в любой замкнутой области $\overline{U}_\lambda \subset \Gamma_{H_1}$ правые части уравнений (1) удовлетворяют условиям Липшица по переменным x, т. е.

$$|X_i(t, x_1) - X_i(t, x_2)| \leq \|x_1 - x_2\| \tag{5}$$

$(i = 1, \dots, n;\ L_\lambda = \text{const})$. Пусть T — некоторое положительное число, а траектория, определяемая решением $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) при $0 < t_0 < t < t_0 + \theta$, где $0 < \theta \leq T$, лежит целиком в $\overline{U}_h$. Сформулируем две леммы [7].

Лемма 1. *Пусть заданы произвольные числа $\gamma > 0$, $T > 0$, $0 < h < H$. Существует функция $V(t, x)$, непрерывная вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \dots, x_n$, t в области Γ_{H_1} и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$V(t, x) = 0 \text{ при } \|x - x(t, t_0, x_0)\| \geq \gamma,\ t \in R,$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t} > d \text{ при } \|x - x(t, t_0, x_0)\| < \alpha,\ t \in [t_0 - \tau; t_0 + \theta],$$

$$\frac{dV}{dt} \geq 0 \text{ при } t \in (-\infty; t_0 + \theta + \tau),\ \|x\| < \infty \text{ и при } \|x - x(t_0 + \theta, t_0, x_0)\| \geq \gamma,$$

$$t \in [t_0 + \theta + \tau; t_0 + \theta + 2\tau],$$

$$V > d \text{ при } \|x - x(t, t_0, x_0)\| < \alpha,\ t \in [t_0 - \tau; t_0 + \theta],$$

$$V = 0 \text{ при } t \in (-\infty; t_0 - 2\tau) \cup (t_0 + \theta + 2\tau; +\infty),$$

где τ, α, d — *положительные константы, оценка которых не зависит от выбора точки $x_0 \in S(M_{t_0}, h)$, но определяется выбором чисел γ, T, h, H.*

Рассмотрим теперь дугу траектории, задаваемой решением $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), лежащую в области M_h $(\overline{M}_h \subset M_H)$ при значениях времени $t \in [t_0 - \theta, t_0]$, где $0 < \theta \leq T$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть заданы произвольные числа* $\gamma > 0$, $T > 0$, $0 < h < H$. *Существует функция* $V(t, x)$, *непрерывная вместе со всеми своими частными производными по* $x_1, \ldots, x_n, t$ *в области* Γ_{H_1} *и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$V(t, x) = 0 \ \text{при} \ \|x - x(t, t_0, x_0)\| \geq \gamma, \ t \in R,$$

$$\frac{dV}{dt} > d \ \text{при} \ \|x - x(t, t_0, x_0)\| < \alpha, \ t \in [t_0 - \theta; t_0 + \tau],$$

$$\frac{dV}{dt} \geq 0 \ \text{при} \ t \in (t_0 - \theta - \tau; \infty), \ \|x\| < \infty$$

$$\text{и при} \ \|x - x(t, t_0, x_0)\| \geq \gamma; \ t \in [t_0 - \theta - 2\tau; t_0 - \theta - \tau],$$

$$V < -d \ \text{при} \ \|x - x(t, t_0, x_0)\| < \alpha, \ t \in [t_0 - \theta; t_0 + \tau],$$

$$V = 0 \ \text{при} \ t \in (-\infty; t_0 - \theta - 2\tau) \cup (t_0 + 2\tau; \infty),$$

где τ, α, d — *положительные константы, оценка которых не зависит от выбора точки* $x_0 \in S(M_{t_0}, h)$, *но определяется выбором чисел* γ, T, h, H.

Замечания. **1.** В леммах 1, 2 функции $V(t, x)$ имеют частные производные первого порядка $\partial V/\partial t$ и $\partial V/\partial x_i$, равномерно ограниченные некоторой постоянной N_0, т. е. $\left|\partial V/\partial t\right| < N_0$, $\left|\partial V/\partial x_i\right| < N_0$, причем оценка N_0 определяется лишь выбором чисел γ, T, h, H.

2. Предположим, что функции $X_i(t, x)$ равномерно непрерывны по времени t в каждой области U_δ. Тогда для любого натурального числа k можно указать постоянную $N_k > 0$ такую, что существует функция V, которая наряду с условиями леммы 1 (или леммы 2) удовлетворяет также неравенствам

$$\left| \frac{\partial^k V}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} \right| < N_k, \ \ k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $0 < h < H$, $\lambda_0 = H$, $\lambda_k = 2^{-k} H$, $k = 1, 2, \ldots$, $R(k) = U_h \backslash U_{\lambda_k}$. Введем следующее определение.

Определение 6. *Будем говорить, что в области* U_H *выполняется свойство* (А) *относительно интегрального множества* M, *если для любого* $h > 0$, $h < H$, *и для любого натурального числа* k *можно указать число* $T_k > 0$ *такое, что не существует отрезка траектории* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, *что* $(t, x(t)) \in U_h$ *при* $t \in [t_0 - T_k; t_0 + T_k]$, $t_0 \geq T_k$; $(t_0, x_0) \in R(k)$.

Свойство (А) относительно M является необходимым условием существования функции v, допускающей бесконечно малый высший предел относительно M, такой, что dv/dt является знакоопределенной относительно M. Покажем это.

Теорема 1. *Если в каждой области* U_h, *лежащей вместе со своим замыканием в области* U_H, *может быть построена функция* $v(t, x)$, *допускающая в области* U_h *бесконечно малый высший предел относительно* M *и имеющая в этой области знакоопределенную относительно* M *производную в силу уравнений* (1), *то в области* U_H *выполняется свойство* (А) *относительно* M.

Доказательство. Пусть $\overline{U}_h \subset U_H$, причем в области U_h построена функция $v(t, x)$ со свойствами, указанными в формулировке теоремы. Выберем s такое, что $\lambda_s < h$ $(\overline{U}_{\lambda_s} \subset U_h)$, $(t_0, x_0) \in R(s)$ и $v(t_0, x_0) \geq 0$. Покажем вначале, что за время $\Delta t = \theta_s$, где θ_s — некоторое фиксированное положительное число, все точки траектории $x(t)$ удовлетворяют условию

$$\rho(x(t), M_t) > \lambda_s \exp(-nL_H\theta_s) = \mu_s, \tag{6}$$

где L_H — постоянная Липшица. Пусть $y(t) = y(t, t_0, y_0) \in M_t$ — произвольная траектория системы (1), принадлежащая интегральному множеству. Далее имеем

$$\frac{d}{dt}(\|x(t) - y(t)\|)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(X_i(t, x) - X_i(t, y)) \le 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i||X_i(t, x) - X_i(t, y)| \le$$

$$\le 2L_H\|x - y\|\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \le 2nL_H\|x - y\|^2, \quad \frac{d}{dt}(\|x - y\|)^2 \ge -2L_H n\|x - y\|^2. \tag{7}$$

Интегрируя неравенства (7), получаем

$$\|x_0 - y_0\|\, e^{-2L_H n(t - t_0)} \le \|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\|\, e^{2nL_H(t - t_0)}, \tag{8}$$

откуда в силу условия $\|x_0 - y_0\| \ge \lambda_s$ следует неравенство (6).

Выберем произвольное положительное r, удовлетворяющее условиям $r < h$, $\overline{U}_r \subset U_h$. Предположим для определенности, что функция dv/dt определенно-положительна относительно M в U_h:

$$|v(t, x)| \le b(\rho(x, M_t)), \quad \frac{dv}{dt} \ge c(\rho(x, M_t)), \quad b, c \in K. \tag{9}$$

Учитывая условия (6), (9) и предполагая, что дуга траектории, определяемой решением $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) при $t \in [t_0; t_0 + \theta_s]$, расположена в U_r, получаем

$$v(t_0 + \theta_s, x(t_0 + \theta_s, t_0, x_0)) \ge \theta_s c(\mu_s). \tag{10}$$

Поскольку функция v имеет бесконечно малый высший предел относительно M, то существует такое натуральное число $N(s)$, что $b(\lambda_{N(s)}) < c(\mu_s)\theta_s$. В качестве $N(s)$ можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N(s) > \log_2 H - \log_2 b^{-1}(c(\mu_s)\theta_s)$.

Из условия (10) и определенной положительности dv/dt можно сделать вывод, что при всех $t > 0$

$$(t, x(t)) \in U_h \setminus U_{\lambda_{N(s)}},$$

откуда в силу второго из неравенств (9) имеем $dv(t, x(t))/dt \ge c(\lambda_{N(s)})$. Следовательно, $v(t, x(t)) \ge c(\mu_s)\theta_s + c(\lambda_{N(s)})(t - \theta_s)$ при $t > \theta_s$. Обозначим $M_1 = b(r)$. Из последнего неравенства следует, что во множестве U_r не может лежать целиком дуга рассматриваемой тректории $(t, x(t))$ при $t \in [t_0; t_0 + T_s]$, где

$$T_s = \frac{b(r) - c(\mu_s)\theta_s}{c(\lambda_{N(s)})} + \theta_s.$$

Если $v(t_0, x_0) < 0$, то можно аналогично предыдущему рассмотреть изменение функции $v(t_0, x(t, t_0, x_0))$ с уменьшением времени t. Повторяя с соответствующей заменой t на $-t$ все приведенные выше оценки, убеждаемся, что в области U_r не может лежать целиком дуга рассматриваемой траектории $(t, x(t, t_0, x_0))$ при $t \in [t_0 - T_s; t_0]$, где T_s имеет тот же смысл, что и ранее. Этим доказательство теоремы завершается, так как U_r — любая наперед заданная область из U_h.

Итак, показано, что свойство (A) относительно M является необходимым условием существования функции v, допускающей бесконечно малый высший предел относительно M и имеющей знакоопределенную относительно M производную dv/dt.

Покажем теперь, что это свойство является не только необходимым, но и достаточным условием существования функции v с указанными свойствами.

Теорема 2. *Если в области* U_H $(\overline{U}_H \subset \Gamma_H)$ *выполняется условие* (A) *относительно* M, *то для любого положительного числа* h, $h < H$:

1) *существует функция* $v\ (t, x)$, *имеющая в силу уравнений* (1) *знакоопределенную относительно* M *производную* dv/dt *в области* U_h *и допускающая в этой области бесконечно малый высший предел относительно* M; *функция* $v(t, x)$ *имеет непрерывные и равномерно ограниченные в области* U_h *частные производные* $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;

2) *если функции* X_i *равномерно непрерывны по времени в области* U_H *при* $t > 0$, *то функция* $v(t, x)$ *имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, причем производные любого порядка равномерно ограничены в области* U_h *(каждая производная ограничена своей постоянной)*;

3) *если* X_i — *периодические функции времени* t *одного и того же периода* ω *и* M — *периодическое интегральное множество периода* ω, *то при выполнении условия* (A) *относительно* M *в области* U_h *существует функция* $v(t, x)$, *периодическая по* t *с периодом* ω; *если функции* X_i *и множество* M *не зависят явно от времени, то при выполнении условия* (A) *относительно* M *существует функция* $v(x)$, *не зависящая явно от* t.

Доказательство. Обозначим через γ положительное число, удовлетворяющее неравенству $\gamma < \frac{1}{3}(H - h)$. Пусть k — первое натуральное число такое, что $\lambda_k < h$. По-прежнему, будем обозначать $R(s) = U_h \setminus U_{\lambda_s}$, $s \ge k$. Покажем сначала, что для любого номера $s \ge k$ можно указать номер $N(s)$ такой, что дуга траектории, определяемая решением $x(t, t_0, x_0)$ и лежащая в области U_H при $t \in [t_0; t^*]$, (или при $t \in [t^*; t_0]$), где $|t^* - t_0| \le T_s$, не имеет точек внутри области $U_{N(s)}$, если только $(t_0, x_0) \in R(s)$. Здесь и в дальнейшем термин "дуга траектории $x(t)$ лежит в области U_H" означает, что $(t, x(t)) \in U_H$. Из неравенств (8) следует

$$\|x(t) - y(t)\| \ge \|x_0 - y_0\| \exp(-nL_H T_s),$$

а из условия $(t_0, x_0) \in R(s)$ вытекает $\|x_0 - y_0\| \ge 2^{-s}H$, а так как $y(t)$ — произвольная траектория из M, то это и доказывает сформулированное предложение при условии, что в качестве $N(s)$ выбрано наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2^{-N(s)} < 2^{-s} \exp(-nL_H T_s)$.

Обозначим через γ_s число, удовлетворяющее неравенствам

$$\gamma_s \le 2^{-N(s)-2} H, \quad \gamma_s \le \gamma.$$

Перейдем теперь к построению функции $v(t, x)$. Рассмотрим точку $(t_0, x_0) \in$

$\in R(s)$ при $s \geq k$. Так как выполнено условие (А) относительно M, то можно указать число θ такое, что $(t_0+\theta, x(t_0+\theta, t_0, x_0)) \in U_{h+\gamma}$, причем $|\theta| \leq T_s$ (или $t_0 < T_s$). Пусть для определенности $\theta > 0$. Тогда согласно лемме 1 существует функция $V = v(t, x, t_0, x_0)$, определенная и непрерывная в области $R \times B_{H_1}$, которая имеет непрерывные и равномерно ограниченные производные $\partial v/\partial t$ и $\partial v/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, если в лемме 1 положить $\gamma = \gamma_s$, то согласно выбору числа γ_s будут выполняться также условия:

$$v(t, x, t_0, x_0) = 0 \text{ в областях } U_{\lambda_{N(s)+1}} \text{ и } \Gamma_{H_1} \setminus U_{h+2\gamma},$$

$$dv(t, x(t), t_0, x_0)/dt \geq 0 \text{ в области } U_h, \tag{11}$$

$$dv(t, x(t), t_0, x_0)/dt \geq d_s \text{ в области } \|x - x(t, t_0, x_0)\| < \alpha_s \text{ при } t \in (t_0 - \tau_s; t_0 + \tau_s),$$

где положительные числа α_s, d_s, τ_s зависят лишь от номера s, но не зависят от выбора точки $(t_0, x_0) \in R(s)$; символ $dv(t, x(t), t_0, x_0)/dt$ означает полную производную от функции $v(t, x(t), t_0, x_0)$; $x(t)$ — решение дифференциальных уравнений (1). Вследствие равномерной ограниченности производных dx_i/dt на множестве $U_{h+\gamma}$ можно согласно неравенству (11), уменьшая числа τ_s и α_s, добиться выполнения неравенства

$$dv(t, x(t), t_0, x_0)/dt > d_s \text{ при } \|x - x_0\| < \alpha_s, \ t \in (t_0 - \tau_s; t_0 + \tau_s). \tag{12}$$

В дальнейшем предполагаем, что условие (12) выполняется. Если для точки $(t_0, x_0) \in R(s)$ условие (А) относительно M выполняется при $t < t_0$, то необходимо аналогичным образом рассмотреть функцию $v(t, x, t_0, x_0) = V$ из леммы 2 (в случае $t_0 < T_s$ следует также воспользоваться леммой 2, полагая $\theta = -t_0$).

При любом $t_0 \in I$ пересечение множества $R(s)$ с гиперплоскостью $t = t_0$ компактно, поэтому на нем можно выбрать конечное множество точек $x_0^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, N_s$, таких, что система окрестностей $\|x - x_0^{(l)}\| < \alpha_s$, $l = 1, 2, \ldots, N_s$, покрывает это пересечение. Обозначим $t_0^{(k)} = \frac{1}{2}k\tau_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Для каждой пары $(t_0^{(k)}, x_0^{(l)})$ построим функцию $v(t, x, t_0^{(k)}, x_0^{(l)})$ по описанному выше правилу.

Рассмотрим функцию

$$v_s(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_s} v(t, x, t_0^{(k)}, x_0^{(l)}). \tag{13}$$

Эта функция имеет следующие свойства: $v_s(t, x) = 0$ в области $U_{N(s)+1}$; функция $v_s(t, x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам в области Γ_{H_1}. Действительно, в окрестности любой точки $(t, x) \in \Gamma_{H_1}$ при любом $t > 0$ отлично от нуля лишь конечное число слагаемых в правой части равенства (13), причем это число ограничено постоянной, не зависящей от выбора точки. В области $R(s)$ функция $v_s(t, x)$ имеет определенно-положительную относительно M производную dv_s/dt, так как любая точка $(t, x) \in R(s)$ содержится по крайней мере в одной из окрестностей вида $\|x - x_0^{(l)}\| < \alpha_s$, $t \in [t_0^{(k)}; t_0^{(k+1)}]$, где для соответствующего слагаемого (13) выполняется неравенство (12).

Пусть теперь выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial v_s}{\partial x_i}\right| < P_s, \quad \left|\frac{\partial v_s}{\partial t}\right| < P_s, \quad |v_s| < P_s. \tag{14}$$

Функция

$$v(t, x) = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{2^s P_s} v_s(t, x) \tag{15}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, ряд в правой части равенства (15) и ряды

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{2^s P_s} \frac{\partial v_s}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{2^s P_s} \frac{\partial v_s}{\partial t}$$

сходятся в области Γ_{H_1} в силу неравенств (14) абсолютно и равномерно, что и доказывает существование и непрерывную дифференцируемость функции v. Существование бесконечно малого высшего предела относительно M функции $v(t, x)$ и определенная положительность относительно M функции dv/dt следуют теперь непосредственно из доказанных выше свойств функций v_s. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем справедливость второго утверждения теоремы. Если функции $X_i(t, x)$ равномерно непрерывны по t в области Γ_{H_1}, то согласно замечанию 2 к леммам 1, 2 функции $V = v(t, x, t_0, x_0)$ будут иметь частные производные любого порядка по всем аргументам, которые будут равномерно ограничены. Но в таком случае и функции v_s также будут иметь непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, причем будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{\partial^k v_s}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}}\right| < P_s^{(k)}. \tag{16}$$

Рассмотрим снова функцию (15), где числа P_s определены иначе, а именно:

$$P_s = \max P_\mu^{(k)} \quad \text{при } \mu = 1, 2, \ldots, s; \ k = 1, 2, \ldots, s. \tag{17}$$

Функция v, заданная равенством (15), определена в области Γ_{H_1} и имеет непрерывные ограниченные частные производные любого порядка по всем аргументам. Действительно, в силу неравенств (16) и выбора чисел P_s из (17) ряд в правой части (15) и все ряды, составленные из частных производных любого порядка, сходятся равномерно и абсолютно в области Γ_{H_1}. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Докажем справедливость третьего утверждения теоремы. Пусть M — периодическое интегральное множество периода ω и $X_i(t, x)$ — периодические функции периода ω. В этом случае в выражении (13) для v_s можно суммировать по k в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, причем число τ_s в (12) можно считать делителем числа ω. Тогда функции $v_s(t, x)$ наряду с другими свойствами будут также периодическими функциями времени t периода ω, т. е. и функция $v(t, x)$, задаваемая выражением (15), будет периодической функцией времени периода ω.

Пусть правые части уравнений (1) не зависят явно от времени. В этом случае при построении функции v_s выберем сначала числа $\tau_s > 0$ делителем некоторого числа $\omega > 0$. Обозначим построенные таким образом функции v_s через

$v_s^{(1)}(t,x)$. Рассмотрим последовательность функций $l^{-1}v_s^{(l)}(t,x)$, $l=1,2,\ldots$, в которой при построении v_s сделана замена τ_s на $\tau_s l^{-1}$. Очевидно, $v_s^{(l)}(t,x)$ — периодические функции времени периода ωl^{-1}. Кроме того, функции $v_s^{(l)}/l$ равномерно по l ограничены в области Γ_{H_1}. Равномерно по l ограничены и функции

$$\frac{1}{l}\frac{\partial^k v_s^{(l)}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}}$$

(каждая функция ограничена своей постоянной). Действительно, если в окрестности каждой точки $(t,x)\in\Gamma_{H_1}$ в формуле для $v_s^{(1)}$ число слагаемых $v(t,x,t_0,x_0)$, отличных от нуля, может быть ограничено некоторой постоянной N, то число слагаемых, отличных от нуля в окрестности той же точки в формуле для $v_s^{(l)}(t,x)$, может быть ограничено постоянной Nl. Так как при этом в $v_s^{(l)}/l$ имеется множитель $1/l$, то утверждение о равномерной ограниченности $v_s^{(l)}/l$ и всех частных производных от $v_s^{(l)}/l$ можно считать доказанным. Каждая функция $v_s^{(l)}/l$ имеет в Γ_{H_1} определенно-положительную относительно M производную $\frac{1}{l}\frac{dv_s^{(l)}}{dt}$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{1}{l}\frac{dv_s^{(l)}}{dt} > d_s > 0,\quad d_s=\mathrm{const}, \tag{18}$$

равномерно по l. Действительно, в любой точке $(t,x)\in R(t)$ число слагаемых $v(t,x,t_0,x_0)$ из равенства (13), в которых выполняется неравенство (12) в формуле для $v_s^{(l)}$, может быть оценено снизу числом l, что и доказывает справедливость неравенства (18). Функции $v_s^{(l)}/l$ так же, как и все функции вида

$$\frac{1}{l}\frac{\partial^k v_s^{(l)}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}},$$

образуют семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Поэтому можно построить подпоследовательность $v^{(l_\nu)}(t,x)$ такую, что в Γ_{H_1} будут сходиться равномерно

$$v_s^{(l_\nu)},\quad \frac{\partial^k v_s^{(l_\nu)}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}}$$

к некоторым функциям

$$v_s,\quad \frac{\partial^k v_s}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}}.$$

Предельная функция v_s, очевидно, не зависит явно от времени t, и кроме того, для этой функции v_s справедливо также неравенство $dv_s/dt\ge d_s$ при $(t,x)\in R(s)$. Функция (15), где P_s выбраны согласно (17), будет, очевидно, стационарной функцией, удовлетворяющей всем условиям теоремы. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если интегральное множество M системы дифференциальных уравнений* (1) *равномерно асимптотически устойчиво относительно M и область U_h лежит в области притяжения, то в области U_h существует функция $v(t,x)$, имеющая в силу уравнений* (1) *определенно-отрицательную от-*

носительно M производную dv/dt. Функция v является определенно-положительной относительно M, допускает бесконечно малый высший предел относительно M и имеет в этой области непрерывные и равномерно ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам.

Если функции $X_i(t, x)$ непрерывны в области U_{h_1}, $h_1 > h$, равномерно по времени $t \in I$, то функция $v(t, x)$ имеет частные производные любого порядка по всем переменным, причем эти производные равномерно ограничены в области U_h (каждая производная ограничена своей постоянной).

Если M и $X_i(t, x)$ — периодические периода ω или не зависят от времени, то функция v может быть построена также соответственно периодической периода ω или не зависящей от времени.

Доказательство. Покажем вначале, что существует положительное число $\lambda > h$ такое, что M равномерно асимптотически устойчиво и U_λ содержится в области притяжения. Пусть $0 < \eta_0 < \frac{1}{2}h$, $t_0 \in I$. По определению 3 существует такое число $H > 0$, что $\overline{U}_H \subset \Gamma_{H_1}$ и $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, H)$ при $t \geq t_0$, если только $x_0 \in S(M_{t_0}, h)$. Обозначим через γ положительное число, удовлетворяющее соотношению $2\gamma < \rho(\partial\Gamma_{H_1}, \partial U_H)$. Согласно определению 3 имеем $x(t_0 + T(\eta_0), t_0, x_0) \in S(M_{t_0+T(\eta_0)}, \eta_0)$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, h)$. По выбору числа γ имеем $\overline{U}_{H+\gamma} \subset \Gamma_{H_1}$. Обозначим $\lambda = h + \gamma$, $2\delta = \min(\gamma, \eta_0) \times \exp(-nL_\lambda T(\eta_0))$, где L_λ — константа Липшица из условий (5) в области $U_{h+\gamma}$. Если $(t_0, x_0') \in U_{h+\delta}$, $(t_0, x_0'') \in U_{h+\delta}$, то вдоль траекторий $x(t, t_0, x_0')$, $x(t, t_0, x_0'')$ при тех значениях t, при которых дуги этих траекторий еще остаются целиком в области $U_{H+\gamma}$, будут выполняться неравенства

$$\| x(t, t_0, x_0') - x(t, t_0, x_0'') \| < \| x_0' - x_0'' \| \exp(nL_\gamma |t - t_0|). \tag{19}$$

Рассмотрим траектории, определяемые решениями $x(t, t_0, x_0')$ и $x(t, t_0, x_0'')$ при $t \in [t_0; t_0 + T(\eta_0)]$, причем x_0'' выбираем произвольно: $x_0'' \in S(M_{t_0}, h + \delta)$, а x_0' лежит на отрезке, соединяющем точки x_0'' и y_0, где y_0 — ближайшая к x_0'' точка, принадлежащая M_{t_0}. Кроме того, x_0' удовлетворяет условиям $x_0' \in S(M_{t_0}, h)$, $\| x_0'' - x_0' \| < 2\delta$. Далее принимаем во внимание, что $(t, x(t, t_0, x_0')) \in U_H$, так как $x_0' \in S(M_{t_0}, h)$. Используя неравенство (19), получаем

$$\| x(t, t_0, x_0') - x(t, t_0, x_0'') \| < 2\delta \exp(nL_\gamma |t - t_0|) \leq \gamma, \tag{20}$$

откуда заключаем, что $x(t, t_0, x_0'') \in S(M_t, H + \gamma)$. Кроме того, из соотношения (20) вытекает, что $x(t_0 + T(\eta_0), t_0, x_0) \in S(M_{t_0+T(\eta_0)}, 2\eta_0)$, т. е. $x(t_0 + T(\eta_0), t_0, x_0) \in S(M_{t_0+T(\eta_0)}, h)$ в силу выбора числа η_0. Но поскольку при $t = t_0 + T(\eta_0)$ траектория, определяемая решением $x(t, t_0, x_0'')$, попадает в U_h, то по определению 3 имеем

$$x(t_0 + T(\eta_0) + t, t_0, x_0) \in S(M_{t_0+T(\eta_0)+t}, \eta)$$

$$\text{при всех } t > T(\eta), \; x_0 \in S(M_{t_0}, \lambda), \; \lambda = h + \delta.$$

Таким образом, область U_λ удовлетворяет всем условиям определения 3 свойства равномерной асимптотической устойчивости M, если постоянные $T_\lambda(\eta)$ для начальных условий $(t_0, x_0) \in U_\lambda$ определить соотношением $T_\lambda(\eta) =$

$= T(\eta_0) + T(\eta)$, где T — постоянные из определения 3 для начальных условий (t_0, x_0) из области U_h.

Покажем, что в области U_λ выполняется свойство (A) относительно M. Действительно, пусть

$$t_0 \geq T_\lambda(\eta),\ x_0 \in S(M_{t_0}, \lambda)\backslash S(M_{t_0}, \eta). \tag{21}$$

Тогда точка $x(t_0 - T_\lambda(\eta), t_0, x_0)$ не может лежать в $S(M_{t_0 - T_\lambda(\eta)}, \lambda)$, так как иначе $x(t_0, t_0 - T_\lambda(\eta), x(t_0 - T_\lambda(\eta), t_0, x_0)) = x_0$, что противоречит предположению (21).

Таким образом, в области U_λ выполняется условие (A) относительно M для дуг отрицательных полутраекторий. Теперь на основании теоремы 2 заключаем о существовании в области U_h функции $v(t, x)$, допускающей бесконечно малый высший предел относительно M и имеющей в этой области непрерывные и ограниченные частные производные $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и определенно-отрицательную относительно M производную dv/dt. При этом в качестве v выбираем функцию из теоремы 2 с обратным знаком. В случае, когда правые части уравнений (1) и интегральное множество M периодичны с периодом ω (не зависят явно от времени), функция v также периодична с периодом ω (не зависит явно от времени). Определенная положительность функции v относительно M в области U_h устанавливается сразу, если заметить, что при построении функций $v(t, x, t_0^{(k)}, x_0^{(l)})$ из леммы 2 все слагаемые в формулах (13), (15) неотрицательны и в каждой точке $(t, x) \in R(s)$, по крайней мере, одно слагаемое $v(t, x, t_0^{(k)}, x_0^{(l)})$ в формуле (13) в силу условия (12) и по выбору $t_0^{(k)}$ удовлетворяет неравенству

$$v(t, x, t_0^{(k)}, x_0^{(l)}) < -\Delta_s < 0,\ \ \Delta_s = \text{const}.$$

В случае непрерывности функций $X_i(t, x)$ в области U_{h_1}, $h_1 > h$, равномерной по $t \in I$, из теоремы 2 следует, что построенная функция $v(t, x)$ имеет частные производные любого порядка по всем переменным, причем эти производные равномерно ограничены в области U_h (каждая производная ограничена своей постоянной). Теорема доказана.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x, f \in R^n, \tag{22}$$

причем функция f удовлетворяет условию Липшица. В этом случае справедливо следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если система* (22) *допускает ограниченное инвариантное асимптотически устойчивое множество* G, *то в окрестности* G *существует определенно-положительная относительно* G *функция* $v(x)$, *имеющая определенно-отрицательную относительно* G *производную* dv/dx *в силу* (22).

1. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.
2. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
5. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
6. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
7. *Красовский Н. А.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.

Получено 22.10.92