УДК 539.3

В. Н. Ложкин, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

The elastico-plastic state of a compressible isotropic plane with a circular hole is studied, by using the small parameter method. An unknown border separating the limiting equilibrium domain and the elastic domain has been found. Complex Kolosov — Muskhelishvili functions which describe the elastic state of the plane are constructed. A comparison with the solution of L. A. Galin's problem is made.

Методом малого параметра вивчено пружно-пластичний стан стисливої ізотропної площини з круговим вирізом. Визначена невідома межа поділу області граничної рівноваги та пружної області. Побудовані комплексні функції Колосова – Мусхелішвілі, які описують пружний стан площини. Наведено порівняння з розв'язком задачі Л. О. Галіна.

Неограниченная изотропная плоскость с круговым вырезом единичного радиуса, свободным от внешних воздействий, сжимается усилиями p и q, приложенными вдали от выреза. Интенсивность последних факторов такова, что возникающая возле выреза область предельного равновесия целиком охватывает его.

Задача о напряженном состоянии области предельного равновесия в полярных координатах запишется так [1]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}(\sigma_\vartheta - \sigma_r) = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\vartheta} = 0,$$

$$(\sigma_\vartheta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = [2k\cos\rho - (\sigma_\vartheta + \sigma_r)\sin\rho]^2, \quad r = 1, \ \sigma_r = \tau_{r\vartheta} = 0.$$

Здесь k и ρ — материальные постоянные исследуемой среды.

Упругое состояние плоскости вне предельного равновесия описывается аналитическими функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, для которых в рассматриваемом случае справедливы представления [2]

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4}(p + q) + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = \frac{1}{2}(p - q) + \Psi_0(z), \quad \Phi_0(\infty) = \Psi_0(\infty) = 0.$$

Граничные условия для их определения на неизвестной границе, разделяющей область предельного равновесия и упругую область, имеют вид [3]

$$2[\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)}] = p + q + \sigma_\vartheta + \sigma_r,$$

$$2[\bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] = -p + q + t^{-1}\bar{t}(\sigma_\vartheta - \sigma_r + 2i\tau_{r\vartheta}).$$

Решение задачи в области предельного равновесия таково:

$$\sigma_r = H(1 - r^{2\alpha}), \quad \sigma_\vartheta = H[1 - (2\alpha + 1)r^{2\alpha}], \ \tau_{r\vartheta} = 0,$$

$$H = k\operatorname{ctg}\rho, \quad \alpha = (1 - \sin\rho)^{-1}\sin\rho.$$

Предположим, что функция

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{m=1} c_m\zeta^{-2m+1}\right)$$

с неизвестными постоянными R и c_m конформно отображает внешность единичной окружности на внешность неизвестной границы. Тогда условия для определения функций $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ примут вид

$$\Phi_0(\sigma) + \overline{\Phi_0(\sigma)} = \tfrac{1}{2}(p + q) + H[1 - (\alpha + 1)\omega^\alpha(\sigma)\overline{\omega^\alpha(\sigma)}],$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\Phi_0'(\sigma) + \Psi_0(\sigma) = -\tfrac{1}{2}(p - q) - \alpha H\omega^{\alpha-1}(\sigma)\overline{\omega^{\alpha+1}(\sigma)}, \quad \sigma = e^{i\varphi}.$$

Допустим, что рассматриваемая задача является статически определимой [4]. Тогда можно ввести малый параметр ε:

$$\varepsilon = (1 - \sin\rho)[2k\cos\rho + (p+q)\sin\rho]^{-1}(p-q),$$

для которого в случае идеально-связной среды ($\rho = 0$) справедливо неравенство [4] $\varepsilon_0 = (2k)^{-1}(p-q) < 0{,}171$. Разлагая в ряд по ε искомые функции $\omega(\zeta)$, $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ и используя интеграл типа Коши, из последних условий на неизвестной границе находим

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{m=1} c_m \zeta^{-2m+1}\right),$$

$$(\alpha+1)[1 + \alpha^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\alpha^2(8\alpha^2 + 8\alpha + 1)\varepsilon^4]R^{2\alpha} = 1 + (2H)^{-1}(p+q),$$

$$c_1 = -\varepsilon[1 + \alpha(\alpha+1)\varepsilon^2], \quad c_2 = -\frac{1}{6}\alpha\varepsilon^2[3 + 2(3\alpha^2 + 5\alpha + 1)\varepsilon^2],$$

$$c_3 = -\frac{1}{6}\alpha(2\alpha+1)\varepsilon^3, \quad c_4 = -\frac{1}{24}\alpha(6\alpha^2 + 7\alpha + 2)\varepsilon^4;$$

$$\Phi_0(\zeta) = -\alpha(\alpha+1)HR^{2\alpha}\sum_{m=1} a_m \zeta^{-2m},$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon[2 + \alpha(2\alpha+1)\varepsilon^2], \quad a_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2[1 + \alpha(5\alpha+2)\varepsilon^2],$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}\alpha(\alpha+2)\varepsilon^3, \quad a_4 = -\frac{1}{24}\alpha(2\alpha+3)(\alpha+2)\varepsilon^4;$$

$$\Psi_0(\zeta) = -\alpha HR^{2\alpha}\sum_{m=1} b_m \zeta^{-2m},$$

$$b_1 = 1 + c_1^{(\alpha+1)}c_1^{(\alpha-1)} + c_2^{(\alpha+1)}c_2^{(\alpha-1)} + 2(\alpha+1)[a_1c_1 + (2a_2 + c_1d_1)c_2],$$

$$b_2 = c_1^{(\alpha-1)} + c_1^{(\alpha+1)}c_2^{(\alpha-1)} + 2(\alpha+1)[a_1 + (2a_2 + a_1d_1)c_1],$$

$$b_3 = c_2^{(\alpha-1)} + c_1^{(\alpha+1)}c_3^{(\alpha-1)} + 2(\alpha+1)[2a_2 + a_1d_1 + (3a_3 + 2a_2d_1 + a_1d_2)c_1],$$

$$b_4 = c_3^{(\alpha-1)} + 2(\alpha+1)(3a_3 + 2a_2d_1 + a_1d_2),$$

$$b_5 = c_4^{(\alpha-1)} + 2(\alpha+1)(4a_4 + 3a_3d_1 + 2a_2d_2 + a_1d_3);$$

$$c_1^{(\alpha)} = \alpha c_1, \quad c_2^{(\alpha)} = \alpha c_2 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)c_1^2,$$

$$c_3^{(\alpha)} = \alpha c_3 + \alpha(\alpha-1)c_1c_2 + \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)c_1^3,$$

$$c_4^{(\alpha)} = \alpha c_4 + \alpha(\alpha-1)c_1c_3 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)c_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)c_1^2c_3 + \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)c_1^4;$$

$$d_1 = c_1, \quad d_2 = 3c_2 + c_1^2, \quad d_3 = 5c_3 + 6c_1c_2 + c_1^3.$$

Здесь постоянные R, c_m, a_m определены с точностью до ε^4.

Если в последних сотношениях перейти к пределу при $\rho \to 0$ ($\alpha \to 0$), то получим решение задачи Л. А. Галина [3].

1. *Соколовский В. В.*. Статистика сыпучей среды. – М.: Гостехиздат, 1954. – 274 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. *Галин Л. А.* Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
4. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий.– Киев: Наук. думка, 1968.– 887 с.

Получено 22.10.92