6. *Ito N.* On the factorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$// Acta scie. math.— 1953.— **15**.— P. 79—84.
7. *Walter J. H.* The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ann. Math.— 1969.— **89**, N 3.— P. 405—514.
8. *Goldschmidt D. M.* 2-Fusion in finite groups // Ibid. — 1974.— **99**, N 1.— P. 70—117.
9. *Алеев Р. Ж.* Конечные группы с циклическими коммутантами силовских 2-подгрупп // Мат. сб.— 1975.— **97**, № 3.— С. 323—340.
10. *Blaum M.* Factorizations of the simple groups $PSL(3, q)$ and $PSU(3, q^2)$ // Arch. Math.— 1983.— **40**, N 1.— P. 8—13.
11. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
12. *Schur J.* Untersuchungen uber du Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen // J. reine und angen. Math.— 1907.— **132**.— S.85—137.
13. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Киев. ин-т инженеров гражд. авиации Получено 28.06.85

УДК 517.1

А. М. Гомилко

Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в K_σ-пространствах

Пусть X — K_σ-пространство с классом положительных элементов X_+ (пользуемся терминологией и определениями из [1]). Для любого $x \in X_+$ обозначим через X_x подпространство тех $y \in X$, для которых $|y| \leqslant \alpha x$ при некоторой постоянной $\alpha > 0$, зависящей от y. Пусть A — положительный (o)-линейный оператор в X. Предположим, что для некоторых элементов $z \in X_+$, $w \in X_+$

$$z - Az = w. \tag{1}$$

Тогда согласно результатам Л. В. Канторовича (см. [1], гл. XII), для любого $v \in X_w$ в X_z существует единственное решение уравнения

$$x - Ax = v. \tag{2}$$

Это решение может быть получено по методу последовательных приближений (относительно (o)-сходимости в X) при начальном элементе $x_0 = 0$:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k v. \tag{3}$$

Всюду далее такие решения будем называть главными. При этом если $|v| \leqslant \alpha w$, то $|x| \leqslant \alpha z$, если $v \in X_+$, то $x \in X_+$.

Приведенные утверждения Л. В. Канторовича обобщают на функциональные уравнения в K_σ-пространствах результаты Б. М. Кояловича [2], относящиеся к разрешимости и методу последовательных приближений для бесконечных регулярных алгебраических систем линейных уравнений. В работе [2] при определенных условиях установлено существование предела у ограниченной последовательности неизвестных x_j алгебраической системы при $j \to \infty$. Этот результат Б. М. Кояловича, названный им законом асимптотических выражений, не нашел своего отражения в рамках теории функциональных уравнений в K_σ-пространствах. В настоящей работе на основании методики [2] устанавливается закон асимптотических выражений в абстрактной формулировке (теорема 1). Попутно исправлены неточности в формулировках и доказательствах из [2], отмеченные в [3]. Результаты [2] нашли важное применение и дальнейшее развитие в [4] при изучении граничных задач теории упругости.

1. Пусть $X_k \subset X_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность главных компонент пространства X. Обозначим через P_k оператор проектирования X на X_k, а через Q_k — оператор проектирования X на дизъюнктное дополнение X_k. Положим $P_{k,n}=P_n-P_k$, $n>k$, и подпространство $X_0=\{y\in X:\exists\, k,\ Q_k y=0\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) существуют такие постоянные $a, b>0$ и положительный функционал f, заданный на X_0, что* $af(P_kg)\,Q_kw\leqslant Q_kAP_kg\leqslant bf(P_kg)\,Q_kw\quad\forall\, g\in X_+\cap X_z,\quad k=1,2,\ldots,$ *причем $f(P_kz)\to\infty$, $k\to\infty$; 2) положительный элемент w является единицей в X.*

Тогда если z — главное решение уравнения (1), а x — главное решение уравнения (2), где $v\in X_w$, $|v|\leqslant\alpha w$, то существует такая постоянная c, $|c|\leqslant\alpha$, что для любого вещественного $\varepsilon>0$ найдется номер n, для которого

$$|Q_n(x-cz)|\leqslant\varepsilon Q_nz. \tag{4}$$

Отметим, что согласно условию 2 в пространстве X предполагается существование единицы.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для вещественного β и натурального n положим*

$$g_n(\beta)=Q_n(AP_n(\beta z-x)+\beta w-v). \tag{5}$$

Тогда если $g_n(\beta)\in X_+$, то $\beta Q_nz\geqslant Q_nx$, а если $-g_n(\beta)\in X_+$, то $\beta Q_nz\leqslant Q_nx$.

Доказательство. Из (1), (2) имеем $\beta z-x=A(\beta z-x)+\beta w-v$. Тогда, вводя в рассмотрение элемент $y_n=Q_n(\beta z-x)$, получаем

$$y_n=A_ny_n+g_n, \tag{6}$$

где $g_n=g_n(\beta)$ определен согласно (5), а $A_n=Q_nA$ — положительный (o)-линейный оператор в X, для которого оператор A является модулярной мажорантой: $|A_ny|=|Q_nAy|\leqslant Q_nA|y|\leqslant A|y|$, $y\in X$. Кроме того, в силу условия 1 теоремы 1 и

$$|v|\leqslant\alpha w,\quad |x|\leqslant\alpha z \tag{7}$$

получаем $|g_n|\leqslant|Q_nAP_n(\beta z-x)|+|Q_n(\beta w-v)|\leqslant(|\beta|+\alpha)\,Q_n(AP_nz+w)\leqslant(|\beta|+\alpha)(bf(P_nz)+1)\,w$ и $|y_n|=|Q_n(\beta z-x)|\leqslant(|\beta|+\alpha)\,z$. Тогда по теореме XII. 3.2 из [1] y_n является главным решением уравнения (6). Значит, если $g_n\in X_+$, то $y_n\in X_+$, т. е. $\beta Q_nz\geqslant Q_nx$; $-g_n\in X_+\Rightarrow -y_n\in X_+$.

Лемма 2. *Пусть β_n — наименьшая из постоянных, для которых $g_n(\beta)\in X_+$. Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta_0,\quad|\beta_0|\leqslant\alpha. \tag{8}$$

Доказательство. Отметим, что существование наименьшей постоянной β_n следует из принципа Архимеда, который выполнен во всяком K_σ-пространстве [1], условия 2 теоремы 1 и неравенств (7), из которых также следует, что $|\beta_n|\leqslant\alpha$, $n=1,2,\ldots$. При этом, так как $Q_nQ_k=Q_n$, $n\geqslant k$, то $\beta_kQ_n(w+AP_kz)\geqslant Q_n(v+AP_kx)$, $n\geqslant k$, и по лемме 1 с учетом $\beta_kP_{k,n}z\geqslant P_{k,n}x$ получаем при $n\geqslant k$: $\beta_kQ_n(w+AP_nz)=\beta_kQ_n(w+AP_kz)+\beta_kQ_nAP_{k,n}z\geqslant Q_n(v+AP_kx)+Q_nAP_{k,n}x=Q_n(v+AP_nx)$, т. е. $\beta_k\geqslant\beta_n$. Из невозрастания последовательности чисел β_n и $|\beta_n|\leqslant\alpha$ следует утверждение (8).

Лемма 3. *Если для некоторого элемента $y\in X_+\cap X_z$ выполнено $Q_n(AP_ny-w-AP_nz)\,\bar\in\, X_+$, то $(ba^{-1})^2\,Q_n(w+AP_nz)-Q_nAP_ny\in X_+$.*

Доказательство. Пусть $u=Q_n(AP_ny-w-AP_nz)$ и $u=u_+-u_-$ — разложение элемента u на его положительную и отрицательную части [1], а P — оператор проектирования на главную компоненту, порожденную элементом u_-. Тогда в силу условия леммы $PQ_nAP_ny<PQ_n(w+AP_nz)$; при этом $PQ_n=P$ и по условию 1 теоремы 1 $af(P_ny)\,Pw\leqslant PAP_ny<(1+bf(P_nz))\,Pw$. Так как w — единица в X, то $Pw>0$ и из предыдущего неравенства следует $f(P_ny)<a^{-1}(1+bf(P_nz))$. Тогда, снова используя условие 1, получаем $Q_nAP_ny\leqslant bf(P_ny)\,Q_nw<ba^{-1}(1+bf(P_nz))\,Q_nw\leqslant ba^{-1}Q_n(w+ba^{-1}AP_nz)\leqslant(ba^{-1})^2\,Q_n(w+AP_nz)$.

Лемма 4. *Для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n, *что* $g_n(\beta_0 + \varepsilon) \in X_+$, $-g_n(\beta_0 - \varepsilon) \in X_+$, *т. е.* $(\beta_0 - \varepsilon) \times Q_n(w + AP_n z) \leqslant Q_n(v + AP_n x) \leqslant (\beta_0 + \varepsilon) Q_n(w + AP_n z)$.

Доказательство. Выполнение $g_n(\beta_0 + \varepsilon) \in X_+$ при достаточно больших n следует из леммы 2 и определения чисел β_n. Докажем, что и $-g_n(\beta_0 - \varepsilon) \in X_+$ при достаточно больших номерах n. Пусть n фиксировано, тогда для любого вещественного $\gamma > 0$ по определению β_n имеем

$$(\beta_n - \gamma) Q_n(w + AP_n z) - Q_n(v + AP_n x) \bar{\in} X_+. \tag{9}$$

Так как для любого k, $k < n$, $Q_n(v + AP_n x) = Q_n(v + AP_k x) + \beta_k Q_n AP_{k,n} z + Q_n AP_{k,n}(x - \beta_k z) \leqslant \beta_k Q_n(w + AP_n z) + Q_n AP_{k,n}(x - \beta_k z)$, то из (9) следует $Q_n AP_{k,n}(\beta_k z - x) - (\beta_k - \beta_n + \gamma) Q_n(w + AP_n z) \bar{\in} X_+$. Тогда по лемме 3

$$(ba^{-1})^2 (\beta_k - \beta_n + \gamma) Q_n(w + AP_n z) \geqslant Q_n AP_{k,n}(\beta_k z - x). \tag{10}$$

Поскольку число $\gamma > 0$ любое, то в силу принципа Архимеда (10) справедливо и при $\gamma = 0$. Тогда из (10) при $\gamma = 0$ с учетом (7) и условия 1 имеем $\forall \delta > 0$:

$$Q_n(v + AP_n x) = Q_n(v + AP_k x) + \beta_k Q_n AP_{k,n} z + Q_n AP_{k,n}(x - \beta_k z) \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha Q_n(w + AP_k z) + \delta(af(P_n z) - bf(P_k z)) Q_n w + (\beta_k - \delta) Q_n AP_{k,n} z +$$
$$+ (ba^{-1})^2 (\beta_n - \beta_k) Q_n(w + AP_n z). \tag{11}$$

Теперь по данному $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/2$ и выберем номер N таким образом, чтобы $(ba^{-1})^2 |\beta_k - \beta_n| \leqslant \delta \ \forall n, k \geqslant N$ (лемма 2) и $bf(P_k z) \geqslant 1$ $\forall k \geqslant N$ (условие 1). Затем зафиксируем некоторое $k \geqslant N$ и выберем n: $n > k$ так, чтобы $\delta af(P_n z) \geqslant b(2\beta_0 + 2\alpha + \delta) f(P_k z)$, что возможно в силу условия 1. Тогда из (11) с учетом неравенства $\beta_k \geqslant \beta_0$ следует

$$Q_n(v + AP_n x) \geqslant -\alpha Q_n(w + AP_k z) - \delta Q_n(w + AP_n z) + 2bf(P_k z) \times$$
$$\times (\beta_0 + \alpha) Q_n w + (\beta_k - \delta) Q_n AP_{k,n} z \geqslant -\delta Q_n(w + AP_n z) + \beta_0 Q_n w +$$
$$+ \beta_0 Q_n AP_k z + (\beta_k - \delta) Q_n AP_{k,n} z \geqslant \beta_0 Q_n(w + AP_n z) - \delta Q_n(w + AP_n z +$$
$$+ AP_{k,n} z) \geqslant (\beta_0 - \varepsilon) Q_n(w + AP_n z).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы очевидным образом следует из лемм 1 и 4, причем постоянная c равна β_0 из утверждения леммы 2.

2. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с полной σ-конечной мерой μ: $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, $T_k \subset T_{k+1}$, $\mu(T_k) < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mu(T) = \infty$. В вещественном функциональном K-пространстве $L^\infty = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ [5] рассматривается интегральный оператор A:

$$(Az)(t) = \int_T A(t, s)\, d\mu(s),$$

где $A(t, s)$ — $\lambda = \mu \times \mu$-измеримая вещественная функция на $T \times T$, причем $A(t, s) \geqslant 0$ λ-почти всюду (п. в.) и $Az \in L^\infty \ \forall z \in L^\infty$

Теорема 2. *Пусть уравнение* $z_0 = Az_0$ *имеет в пространстве* L^∞ *лишь тривиальное решение и для некоторых функций* $z = z(t)$, $w = w(t)$ *из* L^∞ *таких, что* $z(t) \geqslant 0$, $w(t) \geqslant 0$ μ-*п. в., выполняется* (1). *Предположим, что выполнены условия:* 1) *существуют такие постоянные* a, $b > 0$, *что* $\forall k = 1, 2, \ldots : aw(t) \leqslant A(t, s) \leqslant bw(t)$, *для* λ-*п. в.* $(t, s) \in (T \setminus T_k) \times T_k$ *и* $\int_T z(t)\, d\mu(t) = \infty$; 2) $w(t) > 0$ μ-*п. в.*

Тогда если $x = x(t) \in L^\infty$ — решение уравнения (2), где $v = v(t) \in L^\infty$ и $|v(t)| \leqslant \alpha w(t)$ μ-п. в., то существует такая постоянная c, $|c| \leqslant \alpha$, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T \setminus T_k} |x(t)/z(t) - c| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Из условия единственности решения уравнения $z_0 = Az_0$, в силу упоминавшихся в начале работы результатов Л. В. Канторовича, следует, что z, x — главные решения уравнений (1), (2) соответственно. Для применения теоремы 1 в качестве компонент X_k K-пространства $X = L^\infty$ возьмем компоненты, порождаемые характеристическими функциями μ-измеримых множеств T_k. Тогда пространство $X_0 = \{y(t) \in L^\infty : \exists k,$ что $y(t) = 0$ для μ-п. в. $t \in T \setminus T_k\}$ и условие 1 теоремы 1 будет выполнено с функционалом $f(y) = \int\limits_T y(t)\, d\mu(t)$ в силу условия 1 теоремы 2. Условие 2 теоремы 2 обеспечивает выполнимость условия 2 из теоремы 1 [5].

Таким образом, по теореме 1 существует такая постоянная c, $|c| \leqslant \alpha$, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер n, для которого $|x(t) - cz(t)| \leqslant \varepsilon z(t)$ для μ-п. в. $t \in T \setminus T_n$, откуда, так как $z(t) > 0$ μ-п. в. вместе с $w(t) > 0$ μ-п. в., следует утверждение (12).

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М. : Физматгиз, 1961.— 408 с.
2. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та АН СССР.— 1930.— **3**.— С. 41—167.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Методы приближенного решения уравнений в частных производных.— Л.; М. : ОНТИ, 1936.— 528 с.
4. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.— Киев : Наук. думка, 1978.— 264 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев
Получено 24.07.85

УДК 517.94

Г. С. Жукова, Н. П. Черных

Асимптотические свойства формальных решений

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon)\, x^{(\nu)} = 0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $x^{(\nu)} \equiv d^\nu x(t, \varepsilon)/dt^\nu$, ε — вещественный параметр, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $a_n(t, \varepsilon) \neq 0$ и $a_0(t, \varepsilon) \not\equiv 0$. Те из коэффициентов $a_\nu(t, \varepsilon)$, $\nu = \overline{0, n}$, которые отличны от тождественного нуля, являются, во-первых, элементами пространства E непрерывных по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ функций $y(t, \varepsilon)$, для которых $y(t, 0) \not\equiv 0$, и, во-вторых, вещественнозначны, допускают при $\varepsilon \to +0$ равномерные на интервале $[0, T]$ асимптотические представления $a_\nu(t, \varepsilon) \sim \sim \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_{\nu s}(t)$, где $a_{\nu s}(t) \in \mathbb{C}^\infty [0, T]$. Показатели p_ν, $\nu = \overline{0, n}$, предполагаются неотрицательными целыми числами, причем $p_0 = 0$, $p_n > 0$ и для некоторого индекса ν_0, $0 \leqslant \nu_0 \leqslant n - 1$,

$$p_{\nu_0} = 0, \quad p_\nu > 0 \quad \forall \nu = \overline{\nu_0 + 1, n}. \tag{2}$$

В работе [1] для дифференциального уравнения (1) предложен критерий выбора формы разложения его решений по числам p_ν и коэффициен-