3. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // Докл. АН АрмССР.— 1976.— **59**, № 1.— С. 17—21.
4. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теорем Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1984.— Вып. 40.— С. 79—90.
5. *Кацнельсон В. Э.* Методы $j$-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. 1.— Харьков, 1983.— 249 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 171-83.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка. 1965.— 798 с.
7. *Сахнович Л. А.* О подобии операторов // Докл. АН СССР.— 1971.— **200**, № 3.— С. 541—544.
8. *Иванченко Т. С., Сахнович Л. А.* Операторный подход к исследованию интерполяционных задач.— Одесса, 1985.— 63 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 701.

Одес. ин-т нар. хоз-ва Получено 30.07.85

УДК 517.944

*С. А. Кащенко*

# Асимптотика установившихся режимов параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами и переменной областью определения

Метод усреднения является одним из основных в теории нелинейных колебаний. Проблеме обоснования этого метода (и построения формализма нахождения решений) для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторых классов уравнений в частных производных посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Основными моментами отмеченных исследований являются переход к уравнениям в «стандартной» [1] форме и последующее применение замены переменных Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского. Для некоторых классов уравнений, однако, не всегда возможен переход от задачи с быстро осциллирующими коэффициентами к уравнению в «стандартной» форме. К таким классам уравнений принадлежат, например, уравнения с запаздыванием. Сведение к «стандартной» форме таких уравнений приводит к неограниченному растяжению промежутка запаздывания. Кроме этого, для уравнений с запаздыванием и для параболических уравнений техника замен Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского неприменима. В настоящей работе, базирующейся на результатах работ [1, 2], используется метод усреднения для изучения вопроса о существовании и асимптотике установившихся режимов нелинейных параболических уравнений с переменной областью определения и быстро осциллирующими коэффициентами. Изложение ведется таким образом, что все результаты оказываются применимы и для аналогичных уравнений с запаздыванием. Отметим, что исследования основаны на сочетании методов теории колебания [1—3] и методов теории сингулярно возмущенных уравнений [4, 5].

**1. Постановка задачи и основные результаты.** На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\dot{u} = \gamma(\omega t) D u'' + F(\omega t, x, u) \quad (\dot{u} = \partial u/\partial t,\ u' = \partial u/\partial x) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(u' + B_1(\omega t) u)|_{x=0} = (u' + B_2(\omega t) u)|_{x=1} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u \in R^m$, $D$ — положительно определенная $m \times m$-матрица, скалярная функция $\gamma(\tau)$, элементы матриц $B_j(\tau)$ и вектор-функции $F(\tau, x, u)$ являются тригонометрическими многочленами по $\tau$, причем $\gamma(\tau) \geqslant \alpha_0 > 0$, а $F(\tau, x, u)$ обладает достаточной гладкостью по $x$ и $u$ и ее базис частот не зависит от $x$, $u$. Основное предположение состоит в том, что параметр $\omega$ является достаточно большим. При этом условии рассмотрим вопрос о существовании, устойчивости и асимптотике установившихся режимов краевой задачи (1), (2). В качестве фазового пространства примем пространство $C_{(0,1)}$.

Введем в рассмотрение усредненную краевую задачу

$$\dot{v} = \gamma_0 D v'' + F_0(x, v), \quad (v' + B_1 v)|_{x=0} = (v' + B_2 v)|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где $\gamma_0 = M(\gamma(\tau))$, $F_0(x, v) = M(F(\tau, x, v))$, $B_j = \frac{1}{\gamma_0} M(\gamma(\tau) B_j(\tau))$, $j = 1, 2$; $M(\varphi(\tau)) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(\tau)\, d\tau$.

Предположим сначала, что краевая задача (3) имеет состояние равновесия $v_0(x)$. Через $L_0$ обозначим оператор $L_0 v \equiv \gamma_0 D v'' + F'_{0v}(x, v_0(x))\, v$, $(v' + B_1 v)|_{x=0} = (v' + B_2 v)|_{x=1} = 0$.

Теорема 1. *Пусть вещественная часть каждого собственного значения оператора $L_0$ не равна нулю. Тогда найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega \geqslant \omega_0$ краевая задача* (1), (2) *имеет почти периодическое решение $u_0(t, x, \omega)$, причем $\sup\limits_{t,x} \| u_0(t, x, \omega) - v_0(x) \|_{R^m} \leqslant c\omega^{-1}$, где $c > 0$ не зависит от $\omega$. Это решение экспоненциально устойчиво (в метрике пространства $C(0, 1)$), если все собственные значения $L_0$ имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво — в противном случае.*

Для параболических уравнений с постоянной областью определения, действующих в гильбертовом пространстве, и для абстрактных параболических уравнений близкие результаты приведены в [6—8].

Аналогично соответствующему результату из [1, с. 382] формулируется утверждение для случая, когда краевая задача (3) имеет $T$-периодическое решение.

Методика, основанная на использовании усредненного уравнения, позволяет исследовать окрестность состояния равновесия в случаях «близких» к критическим в задаче об устойчивости. Остановимся здесь на одном, наиболее часто встречающемся, критическом случае.

Рассмотрим с краевыми условиями (2) параболическое уравнение

$$\dot{u} = \gamma(\omega t) D u'' + A(\omega t, x) u + F(\omega t, x, u), \tag{4}$$

где элементы матрицы $A(\tau, x)$ и вектор-функции $F(\tau, x, u)$ являются тригонометрические по $\tau$ многочлены с частотами, независящими от $x$, $u$. Зависимость от всех аргументов достаточно гладкая, и $F(\tau, x, u)$ имеет относительно $u$ в нуле порядок малости выше первого. Положим $A_0(x) = M(A(\tau, x))$, $F_0(x, u) = M(F(\tau, x, u))$ и рассмотрим усредненную краевую задачу

$$\dot{v} = \gamma_0 D v'' + A_0(x) v + F_0(x, v), \ (v' + B_1 v)|_{x=0} = (v' + B_2 v)_{x=1} = 0. \tag{5}$$

Предположим, что линейный оператор $Lv \equiv \gamma_0 D v'' + A_0(x) v$, $(v' + B_1 v)|_{x=0} = (v' + B_2 v)|_{x=1} = 0$ имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma_0$ $(\sigma_0 > 0)$, а все остальные его собственные значения имеют отрицательные вещественные части. При этих условиях исследуем (при больших $\omega$) поведение решений краевой задачи (4), (2) из некоторой (независящей от $\omega$) окрестности нулевого решения.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\dot{u} = \gamma(\tau) D u'' + A(\tau, x) u, \ (u' + B_1(\tau) u)|_{x=0} = (u' + B_2(\tau))|_{x=1} = 0 \tag{6}$$

и положим

$$u = [v(\tau, x, \omega) + w_1(\tau, \xi_1, \omega) + w_2(\tau, \xi_2, \omega)] \exp(i\sigma_0 + \Delta(\omega))\, t,$$
$$\tau = \omega t, \ \xi_1 = \omega^{1/2} x, \ \xi_2 = \omega^{1/2}(1 - x), \tag{7}$$

где

$$v(\tau, x, \omega) = a_0(x) + \omega^{-1/2}v_1(x) + \omega^{-1}v_2(\tau, x) + \dots, \tag{8}$$

$$w_j(\tau, \xi_j, \omega) = \omega^{-1/2}w_{j1}(\tau, \xi_j) + \omega^{-1}w_{j2}(\tau, \xi_j) + \dots, j = 1, 2, \tag{9}$$

$$\Delta(\omega) = \omega^{-1/2}\Delta_1 + \omega^{-1}\Delta_2 + \dots . \tag{10}$$

Зависимость от $\tau$ здесь почти периодическая (и гладкая), вектор-функции $w_{jk}(\tau, \xi_j)$ экспоненциально убывают по $\xi_j$ при $\xi_j \to \infty$, $a_0(x)$ — собственная функция оператора $L$, отвечающая собственному значению $i\sigma_0$. Можно показать, что все величины формальных рядов (8) — (10) последовательно определяются. Положим $\Delta_n(\omega) = \omega^{-1/2}\Delta_1 + \omega^{-1}\Delta_2 + \dots + \omega^{-n/2}\Delta_n$.

Лемма 1. *Для каждого целого $n$ значение* $\operatorname{Re}\Delta_n(\omega)$ *отличается от наибольшего характеристического показателя краевой задачи* (6) *на величину* $o(\omega^{-n/2})$.

Для того чтобы сформулировать последнее ограничение, рассмотрим краевую задачу (5). Исследование в окрестности $v \equiv 0$ опирается на метод нормальных форм (см., например, [9]). В окрестности нуля (пространства $C_{(0,1)}$) эта краевая задача имеет двухмерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие $V_0$, на котором краевая задача (5) представима в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot\eta = i\sigma_0\eta + d_0\eta|\eta|^2 + o(|\eta|^3) \tag{11}$$

(второе уравнение комплексно сопряжено с (11)). Напомним, что значение $\operatorname{Re}d_0$ называют первой ляпуновской величиной.

Сформулируем основное утверждение для рассматриваемого здесь случая.

Теорема 2. *При всех достаточно больших $\omega$ краевая задача* (4), (2) *имеет (в некоторой окрестности $(t, 0)$) в фазовом пространстве $(t, u) \in R^1 \times C_{(0,1)}$ трехмерное инвариантное интегральное экспоненциально устойчивое многообразие $V(s, u, \omega)$, на котором задача* (4), (2) *эквивалентна системе обыкновенных уравнений (в комплексной форме)*

$$\dot s = 1,\ \dot\eta = (i\sigma_0 + \Delta_n(\omega) + o(\omega^{-n/2}))\eta + (d_0 + \\ + O(\omega^{-1/2}))\eta|\eta|^2 + o(|\eta|^3). \tag{12}$$

Отметим, что при каждом $t$ расстояние между многообразием $V_0$ и проекцией многообразия $V(t, u, \omega)$ на $C_{(0,1)}$ (в шаре этого пространства радиуса $r_0 > 0$ с центром в нуле) имеет порядок $O(\omega^{-1/2})$.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что существование и устойчивость установившихся режимов краевой задачи (4), (2) в окрестности $u \equiv 0$ определяются знаками чисел $\operatorname{Re}\Delta_n(\omega)$ и $\operatorname{Re}d_0$. В [10] показано, что для уравнений с запаздыванием характерна зависимость величины $\Delta_j$ при $j \geqslant 2$ от параметра $\omega$. При этом каждый из коэффициентов $\Delta_j$, $j \geqslant 2$, при $\omega \to \infty$ может иметь бесконечно много нулей. Тем самым возможна ситуация, когда при $\omega \to \infty$ происходит неограниченная смена устойчивости и неустойчивости нулевого состояния равновесия и «рождение» и «гибель» в его окрестности установившегося (ненулевого) режима краевой задачи (4), (2).

2. Обоснование результатов. На построении асимптотических разложений останавливаться здесь не будем. Отметим лишь, что реализация соответствующих вычислений основана на сочетании методов теории сингулярно возмущенных уравнений, развитых в работе [4], и методов теории колебаний из [1].

Для примера укажем, что асимптотика почти периодического решения $u_0(t, x, \omega)$, о существовании которого упоминается в теореме 1, имеет вид $u_0(t, x, \omega) = v_0(x) + w_1(\tau, \xi_1, \omega) + w_2(\tau, \xi_2, \omega) + v(\tau, x, \omega)$, где $\tau = \omega_t$, $\xi_1 = \omega^{1/2}x$, $\xi_2 = \omega^{1/2}(1 - x)$, $w_j(\tau, \xi_j, \omega) = \omega^{-1/2}w_{j1}(\tau, \xi_j) + \omega^{-1}w_{j2}(\tau, \xi_j) + \dots$, $j = 1, 2$, $v(\tau, x, \omega) = \omega^{-1/2}v_1(x) + \omega^{-1}(v_2(x) + v_2(\tau, x)) + \omega^{-3/2}(v_3(x) + v_3(\tau, x)) + \dots, M(v_k(\tau, x)) = 0$, $k = 2, 3, \dots$ . Зависимость от $\tau$ в этих формулах — почти периодическая, а по аргументу $\xi_j$ функции $w_{jk}(\tau, \xi_j)$ экспоненциально убывают (т. е. найдутся такие независящие от $\xi_j > 0$ значения $c_{jk} > 0$ и $\delta_{jk} > 0$, что $\sup_\tau \| w_{jk}(\tau, \xi_j) \|_{R^m} \leqslant c_{jk} \exp(-\delta_{jk}\xi_j)$).

Как и для случая обыкновенных дифференциальных уравнений [1], основным моментом доказательства теоремы 1 является исследование свойств линейной краевой задачи вида (6). Обозначим через $C$ банахово пространство непрерывных функций $f(t, x)$ двух переменных $t \in (-\infty, \infty)$ и $x \in [0, 1]$, для которых конечна величина $\| f(t, x) \|_C = \sup_{t,x} \| f(t, x) \|_{R^m}$. Напомним, что линейный оператор $\mathscr{L}$, порожденный краевой задачей (6), называют регулярным, если для каждой $f(t, x) \in C$ существует принадлежащее пространству $C$ решение $u_f(t, x)$ (в обобщенном смысле) уравнения $\dot{u} = \gamma(\tau) Du'' + A(\tau, x) u + f(t, x)$ с краевыми условиями (2).

Теорема 3. *Предположим, что оператор, порожденный усредненной краевой задачей* (5) (*при* $F_0(x, u) \equiv 0$) *регулярен. Тогда найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что при* $\omega \geqslant \omega_0$ *оператор* $\mathscr{L}$ *регулярен и* $\| u_f(t, x) \|_C \leqslant N \| f(t, x) \|_C$, *где* $N > 0$ *не зависит от* $\omega$ *и от* $f(t, x) \in C$.

Кратко остановимся на идее доказательства теоремы. Можно показать, что с помощью замены вида $u = (I + \omega^{-1/2}\Phi(\tau, x, \omega)) w$, где $\Phi(\tau, x, \omega) = \Phi_1(\tau, \xi_1) + \Phi_2(\tau, \xi_2) + \omega^{-1/2}(\Phi_3(\tau, \xi_1) + \Phi_4(\tau, \xi_2)) + \omega^{-1}\Phi_0(\tau, x, \omega)$ (зависимость от $\tau$ почти периодическая, по $\xi_j$ — экспоненциальное убывание при $\xi_j \to \infty$, элементы матрицы $\Phi_0(\tau, x, \omega)$ и $\omega^{-1}\Phi_0'(\tau, x, \omega)$ равномерно ограничены при $\omega \to \infty$), удается сделать автономными краевые условия (6), а само уравнение при этом примет вид

$$\dot{w} = [I + \omega^{-1/2}\Phi(\tau, x, \omega)]^{-1} \{\gamma(\tau) D [I + \omega^{-1/2}\Phi(\tau, x, \omega)] w'' + 2\omega^{-1/2}\gamma(\tau) D\Phi'(\tau, x, \omega) w' + [A(\tau, x) + O(\omega^{-1/2})] w + f(t, x)\}, \tag{13}$$

$$(w' + B_{10}(\omega) w)|_{x=0} = (w' + B_{20}(\omega) w)|_{x=1} = 0. \tag{14}$$

Матрицы $B_{j0}(\omega)$, $j = 1,$ , таковы, что $B_{j0}(\omega) = B_j + O(\omega^{-1/2})$.

На втором шаге, выделив главные при $\omega \to \infty$ порядки в (13), рассмотрим более простое уравнение с краевыми условиями (14):

$$\dot{w} = \gamma(\tau) Dw'' + 2\gamma(\tau) D(\Phi_1'(\tau, \xi_1) - \Phi_2'(\tau, \xi_2)) w' + A(\tau, x) w. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение полную систему всех собственных и присоединенных функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, оператора $L_1\varphi \equiv \gamma_0 D\varphi'' + A_0(x)\varphi$, $\varphi'(0) + B_{10}(\omega)\varphi(0) = \varphi'(1) + B_{20}(\omega)\varphi(1) = 0$ (нумерация идет в порядке убывания вещественных частей отвечающих $\varphi_j(x)$ собственных значений). Обозначим через $E_h$ линейную оболочку элементов $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, а через $C_n$ — замыкание (по норме $C_{(0,1)}$) линейной оболочки элементов $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x) + \ldots$. Каждое определенное при $t > 0$ решение краевой задачи (15), (14) представим в виде суммы $w(t, x) = w_{1n}(t, x) + w_{2n}(t, x)$, где $w_{1n}(t, x) \in E_n$, $w_{2n}(t, x) \in C_n$ $(t > 0)$. Соответственно краевая задача (15), (14) эквивалентна системе двух краевых задач (в $E_n$ и $C_n$) относительно $w_{1n}(t, x)$, $w_{2n}(t, x) \in C$. Используя результаты [11], из краевой задачи в $C_n$ (рассматривая ее относительно $w_{2n}(t, x)$ в пространстве $C$) получаем, что при условии $w_{1n}(t, x), w_{1n}'(t, x) \in C$ существует ограниченное при $t \in (-\infty, \infty)$ решение $w_{2n}(t, x)$, причем

$$\| w_{2n}(t, x) \|_C + \| w_{2n}'(t, x) \|_C \leqslant \frac{N}{n^2} (\| w_{1n}(t, x) \|_C + \| w_{1n}'(t, x) \|_C + \| f(t, x) \|_C),$$

где $N > 0$ не зависит от $n$ и от $w_{1n}(t, x)$ и $f(t, x)$. Подставим затем в оставшееся уравнение (в $E_n$) вместо функции $w_{2n}(t, x)$ ее выражение через $w_{1n}(t, x)$, $w_{1n}'(t, x)$ и $f(t, x)$. Для уравнения (конечномерного) в $E_n$ справедлив принцип усреднения. Применяя его, получаем, что при достаточно больших $n$ и $\omega$ регулярность, т. е. разрешимость относительно $w_{1n}(t, x)$ в классе ограниченных при $t \in (-\infty, \infty)$ функций, вытекает из регулярности оператора, порожденного краевой задачей (5) (при $F_0(x, u) \equiv 0$). Кроме этого, верна оценка $\| w_{1n}(t, x) \|_C + \| w'_{1n}(t, x) \|_C \leqslant N_1 \| f(t, x) \|_C$ с универсальной постоянной $N_1 > 0$. Из этой оценки и из общих утверждений работы [11] сразу следует регулярность при достаточно больших значениях $\omega$ оператора, порожденного краевой задачей (13), (14), а значит — и (6).

Отметим, что необходимым и достаточным условием регулярности оператора (5) (при $F_0(x, u) \equiv 0$) является условие неравенства нулю вещественных частей всех собственных значений оператора $L$. В случае, когда это условие не выполнено и $L$ имеет ровно $m_0$ собственных значений с положительными вещественными частями, фазовое пространство $C_{(0,1)}$ краевой задачи (5) (при $F_0(x, u) \equiv 0$) расщепляется в прямую сумму таких подпространств $H_1$ и $H_2$, что $\dim H_1 = m_0$, и решения с начальными условиями из $H_2$ экспоненциально затухают при $t \to \infty$, а решения с начальными условиями из $H_1$ определены при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и экспоненциально затухают при $t \to -\infty$. Из приведенных выше рассуждений и из известных результатов, связывающих понятие регулярности с экспоненциальной дихотомией [11] вытекает, что этот же вывод (о расщеплении фазового пространства $C_{(0,1)}$ в прямую сумму двух подпространств $H_1(t, \omega)$ и $H_2(t, \omega)$, «близких» при $\omega \to \infty$ к $H_1$ и $H_2$) справедлив и для краевой задачи (6).

В условии теоремы 2 фазовое пространство краевой задачи (6) имеет экспоненциально устойчивое двухмерное инвариантное подпространство $H_1(t, \omega)$. Исследование в рассматриваемой ситуации свойств устойчивости решений (6) сводится, таким образом, к изучению поведения решений из $H_1(t, \omega)$. Соответствующее исследование проведено в [12]. Применяя алгоритм из [12], получаем обоснование леммы 1. После этого для завершения доказательства теоремы 2 остается воспользоваться известными результатами о существовании инвариантных многообразий и техникой построения уравнений на таких многообразиях.


1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
5. *Бутузов В. Ф.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Вычисл. математика и кибернетика.— 1978.— № 2.— С. 49—56.
6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 205 с.
7. *Симоненко Н. Б.* Обоснование принципа усреднения для абстрактного параболического уравнения // Докл. АН СССР.— 1970.— **191**, № 1.— С. 71—74.
8. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения и бифуркация ограниченных решений абстрактных параболических уравнений // Сиб. мат. журн.— 1976.— **17**, № 5.— С. 1058—1068.
9. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1979.— 254 с.
10. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Алгоритм исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с последействием и быстро осциллирующими почти периодическими коэффициентами // Исследования по устойчивости и теории колебаний.— Ярославль : Изд-во Яросл. ун-та, 1977.— С. 70—82.
11. *Колесов Ю. С.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти периодическими коэффициентами // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1978.— **36**.— С. 3—27.
12. *Кащенко С. А.* Исследование устойчивости линейных сингулярно возмущенных уравнений параболического типа с почти периодическими коэффициентами.— Ярославль, 1985.— 75 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 8132-В85.


Яросл. ун-т

Получено 07.06.85