УДК 518.9

В. В. Остапенко

H-выпуклые множества и интегрирование многозначных отображений

В настоящей статье в терминах H-выпуклых множеств [1] получено достаточно эффективное описание интегралов от линейных многозначных отображений. Эти результаты находят применение в теории дифференциальных игр [2, 3]. Для решения задач, рассмотренных в дифференциальных играх, игроки должны в общем случае применять неконструктивные стратегии [4—6]. Эти стратегии для некоторых классов игр удается упростить [7, 8]. Пользуясь изложенным ниже методом H-выпуклых множеств, можно построить относительно простые стратегии для достаточно широких классов линейных дифференциальных игр.

Данная статья представляет собой развернутое изложение ряда результатов работы [3].

Обозначим через X сепарабельное банахово пространство; Ω — пространство с мерой μ ($\mu(\Omega) > 0$) и σ-алгеброй $\mathfrak{A}$; $C(\omega)$, $\omega \in \Omega$,— семейство линейных ограниченных операторов ($C(\omega) : X \to X$), μ-интегрируемое по Бохнеру.

Понятие H-выпуклого множества [1] перенесем на случай банахова пространства.

Определение. *Пусть $H \subset \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$. H-выпуклым полупространством назовем полупространство вида $\{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leqslant c\}$, где $x^* \in H$, c — число, $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала x^* на элементе x. Множество M называется H-выпуклым, если оно представимо в виде пересечения H-выпуклых полупространств.*

Обозначим через H множество единичных векторов $x^* \in X^*$, для которых выполняются условия:

а) $C^*(\omega)\, x^* = \lambda(\omega \mid x^*)\, x^*$ для любого $\omega \in \Omega$;

б) при каждом фиксированном x^* функция $\lambda(\cdot \mid x^*)$ не меняет знак при всех $\omega \in \Omega$.

Теорема 1. *Пусть M — H-выпуклое множество и для замкнутого выпуклого множества W выполняется включение*

$$\int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\, W \subset M. \tag{1}$$

Тогда

$$\int_\Omega C(\omega)\, W \mu(d\omega) \subset M. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что M — полупространство, $M = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leqslant c\}$, $x^* \in H$. Тогда в силу выпуклости и замкнутости M для любой интегрируемой функции $x(\omega)$ со значениями в W справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle x^*, \int_\Omega C(\omega)\, x(\omega)\, \mu(d\omega)\rangle = \int_\Omega \langle x^*, C(\omega)\, x(\omega)\rangle\, \mu(d\omega) = \int_\Omega \langle C^*(\omega)\, x^*, x(\omega)\rangle\, \mu(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega \langle \lambda(\omega \mid x^*)\, x^*, x(\omega)\rangle\, \mu(d\omega) = \langle x^*, \int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, x(\omega)\, \mu(d\omega)\rangle =$$

$$= \langle x^*, \int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega)\, x_1\rangle = \langle \int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega)\, x^*, x_1\rangle =$$

$$= \langle \Big(\int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\Big)^* x^*, x_1\rangle = \langle x^*, \int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\, x_1\rangle \leqslant c,$$

где x_1 — подходящая точка из W. Таким образом, выполняется включение (2). Пусть теперь $M = \bigcap_{i \in I} M_i$, где M_i — полупространство, I — произвольное множество индексов. Тогда для каждого $i \in I$ справедливо включение (1), если вместо M подставить M_i. Отсюда следует, что для любого $i \in I$ выполняется включение (2), если вместо M подставить M_i. Но это означает, что включение (2) справедливо для множества M.

Пусть $\Gamma \in \mathfrak{A}$; $C_\Gamma(\omega)$, $\omega \in \Gamma$, — семейство линейных ограниченных операторов $(C_\Gamma(\omega) : X \to X)$ μ-интегрируемое по Бохнеру и для любого $x^* \in H$ выполняется $C_\Gamma(\omega)\, x^* = \lambda_\Gamma(\omega \mid x^*)\, x^*$ $\forall \omega \in \Omega$. Предполагаем, что при каждом $x^* \in H$ функция $\lambda_\Gamma(\cdot \mid x^*)$ либо равна нулю, либо имеет тот же знак, что и ненулевые значения функции $\lambda(\cdot \mid x^*)$, и при этом

$$\left| \int_\Gamma \lambda_\Gamma(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega) \right| \leqslant \left| \int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega) \right|.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $0 \in M$. *Тогда из включения* (1) *следует включение*

$$\int_\Gamma C_\Gamma(\omega)\, W \mu(d\omega) \subset M.$$

Доказательство. Поскольку $0 \in M$, то во включении (1) можно заменить множество W множеством $\overline{\mathrm{co}}\,\{0, W\}$. При этом достаточно рассмотреть случай, когда M — полупространство. Для любой интегрируемой функции $x(\omega) \in W$, как и выше, получаем

$$\langle x^*, \int_\Gamma C_\Gamma(\omega)\, x(\omega)\, \mu(d\omega)\rangle = \langle x^*, \int_\Gamma \lambda_\Gamma(\omega \mid x^*)\, x(\omega)\, \mu(d\omega)\rangle =$$

$$= \langle x^*, \int_\Gamma \lambda_\Gamma(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega)\, x_1 + \left[\int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega) - \int_\Gamma \lambda_\Gamma(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega)\right] \cdot 0\rangle =$$

$$= \langle x^*, \int_\Omega \lambda(\omega \mid x^*)\, \mu(d\omega)\, x_2\rangle = \langle x^*, \int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\, x_2\rangle \leqslant c,$$

где $x_1 \in W$, $x_2 \in \overline{\mathrm{co}}\,\{0, W\}$ — подходящие точки.

Следствие 1. *Пусть* $x(s)$ — *интегрируемая функция,* M — H-*выпуклое множество и для каждого* $s \in \Omega$

$$\int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\, x(s) \in M. \tag{3}$$

Тогда

$$\int_\Omega C(\omega)\, x(\omega)\, \mu(d\omega) \in M.$$

Следствие 2. *Пусть выполняются условия следствия* 1 *и* $0 \in M$. *Тогда из включения* (3) *следует включение*

$$\int_\Gamma C_\Gamma(\omega)\, x(\omega)\, \mu(d\omega) \in M.$$

Для доказательства следствий в качестве множества W следует взять замкнутую выпуклую оболочку точек $x(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Обозначим $A = \int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)$.

Следствие 3. *Если* M — H-*выпуклое множество и оператор* A *имеет обратный, то*

$$\int_\Omega C(\omega)\, M \mu(d\omega) = \int_\Omega C(\omega)\, \mu(d\omega)\, M. \tag{4}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать H-выпуклость множества AM. Если $M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leqslant c(x^*)\}$, то

$$AM = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in X : \langle x^*, A^{-1}x\rangle \leqslant c(x^*)\} = \bigcap_{x^* \in H} \left\{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leqslant \frac{c(x^*)}{\lambda(x^*)}\right\},$$

где $\lambda(x^*)$ — собственные числа оператора A^*, соответствующие собственному вектору x^*. Таким образом, AM является H-выпуклым множеством.

Теорема 3. *Пусть X — конечномерное евклидовое пространство, M — H-выпуклое компактное множество. Тогда выполняется равенство* (4).

Доказательство. Положим $B_\varepsilon = \varepsilon A + \varepsilon^2 E$. Векторы $x^* \in H$ являются собственными векторами оператора A^*, а значит, и оператора B_ε^*. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ соответствующие собственные числа оператора B_ε^* имеют тот же знак, что и собственные числа оператора A^*, а следовательно, и операторов $C^*(\omega)$. (Считаем, что нуль имеет одинаковый знак с любым числом.)

Пусть $m \in M$. Поскольку $0 \in M - m$, то

$$\int_\Omega C(\omega) M \mu(d\omega) = \int_\Omega C(\omega)(M - m)\mu(d\omega) + Am \subset$$

$$\subset \int_\Omega C(\omega)(M - m)\mu(d\omega) + B_\varepsilon(M - m) + Am.$$

Положим $\Omega_1 = \Omega \cup \omega_0$, где $\omega_0 \bar{\in} \Omega$ — некоторый элемент; $\mathfrak{A}_1$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все множества из $\mathfrak{A}$ и множество $\{\omega_0\}$; μ_1 — расширение меры μ на множество $\mathfrak{A}_1$ такое, что $\mu_1(\{\omega_0\}) = 1$; $C(\omega_0) = B_\varepsilon$.

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор $A + B_\varepsilon$ имеет обратный, то для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$ — подходящая константа) выполняются равенства

$$\int_\Omega C(\omega)(M - m)\mu(d\omega) + B_\varepsilon(M - m) = \int_{\Omega_1} C(\omega)(M - m)\mu_1(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega_1} C(\omega)\mu_1(d\omega)(M - m) = \left[\int_\Omega C(\omega)\mu(d\omega) + B_\varepsilon\right](M - m).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ получаем

$$\int_\Omega C(\omega) M \mu(d\omega) \subset \int_\Omega C(\omega)\mu(d\omega)(M - m) + Am = \int_\Omega C(\omega)\mu(d\omega) M.$$

Обратное включение очевидно.

Рассмотрим конечномерную игру с фиксированным временем окончания t. Пусть Z, L — евклидовые пространства, $\dim L \leqslant \dim Z$; $\varphi: L \to Z$ — линейный оператор вложения, $\pi: Z \to L$ — линейное отображение. Динамика игры описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + \varphi B(u, v), \tag{5}$$

где $z \in Z$, $u \in U$, $v \in V$; U и V — компакты в евклидовых пространствах; A — постоянная матрица; $B: U \times V \to L$ — непрерывное отображение. Терминальное множество и множество фазовых ограничений задаются в виде $M_L = \{z \in Z : \pi z \in M\}$; $N_L = \{z \in Z : \pi z \in N\}$, где $M \subset N$ — заданные замкнутые множества в пространстве L.

Положим

$$P_{N,t}M = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{u \in U} \left\{z \in N_L : \pi e^{At} z + \int_0^t \pi e^{A(t-\tau)} \varphi d\tau B(u, v) \in M\right\}.$$

Обозначим через H_t множество единичных векторов $x^* \in L$ таких, что

а) $(\pi e^{A\tau}\varphi)^* x^* = \lambda(\tau \mid x^*) x^* \quad \forall \tau \in [0, t]$;

б) при каждом фиксированном x^* функция $\lambda(\cdot \mid x^*)$ не меняет знак на всем интервале $[0, t]$.

Теорема 4. *Пусть M — H_t-выпуклое множество. Тогда если $z \in P_{N,t} M$, то существует отображение $u_*: V \to U$ такое, что*

а) *$u_*(v(\tau))$ — допустимое управление игрока P, если $v(\tau)$ — допустимое управление игрока E;*

б) *для соответствующей управлениям* $u(v(\tau))$ *и* $v(\tau)$ *траектории* $z(\tau)$ *с началом в* z_0 *выполняется включение* $\pi z(t)\in M$;

в) *если, к тому же,* N — H_t*-выпуклое множество и* $Az_0\in\varphi L$, *то* $\pi z(\tau)\in N$ $\forall\tau\in[0,t]$.

Доказательство. Пусть $z_0\in P_{N,t}M$. Тогда для любого $v\in V$ существует $u_*(v)\in U$ такое, что

$$\pi e^{At}z_0+\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi d\tau B(u_*(v),v)\in M.$$

По лемме Филиппова отображение $u_*(v)$ можно выбрать так, что функция $u_*(v(\tau))$ будет измерима, если $v(\tau)$ — допустимое управление игрока E, т. е. $u_*(v(\tau))$ — допустимое управление игрока P. Предположим, что игрок E выбрал управление $v(\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда для любого $s\in[0,t]$

$$\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi d\tau B(u_*(v(s)),\quad v(s))\in M-\pi e^{At}z_0. \tag{6}$$

Отметим, что множество $M-\pi e^{At}z_0$ — H_t-выпукло. Положим $\Omega=[0,t]$, $\omega=\tau$, $C(\tau)=\pi e^{A(t-\tau)}\varphi$. Применяя следствие 1, из (6) получаем

$$\pi e^{At}z_0+\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi B(u_*(v(\tau)),\ v(\tau))\,d\tau\in M,$$

т. е. для траектории $z(\tau)$, соответствующей $u_*(v(\tau))$ и $v(\tau)$, с началом в z_0 выполняется включение $\pi z(t)\in M$.

Утверждение в) теоремы 4 доказывается аналогично с использованием следствия 2.

Теорема 5. *Пусть* $B(U,v)$ — H_t*-выпуклое множество для всех* $v\in V$. *Тогда если* $z_0\bar{\in}P_{N,t}M$, *то либо* $\pi z_0\bar{\in}N$, *либо существует такое* $v_*\in\in V$, *что для траектории* $z(\tau)$, *соответствующей произвольному допустимому управлению* $u(\tau)$ *игрока* P *и управлению* $v(\tau)\equiv v_*$ *игрока* E, *с началом в* z_0 *выполняется* $z(t)\bar{\in}M$.

Доказательство. Пусть $z_0\bar{\in}P_{N,t}M$ и $\pi z_0\in N$. Тогда существует такое $v_*\in V$, что для любого $u\in U$

$$\pi e^{At}z_0+\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi d\tau B(u,v_*)\bar{\in}M. \tag{7}$$

Поскольку $B(U,v)$ — H_t-выпуклое множество, то из теоремы 3 вытекает

$$\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi B(U,v_*)\,d\tau=\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi d\tau B(U,v_*),$$

и значит, для любого допустимого управления $u(\tau)$ существует такое u, что

$$\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi B(u(\tau),v_*)\,d\tau=\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi d\tau B(u,v_*).$$

Отсюда и из (7) следует, что для любого допустимого $u(\tau)$

$$\pi e^{At}z_0+\int\limits_0^t\pi e^{A(t-\tau)}\varphi B(u(\tau),\ v_*)\,d\tau\bar{\in}M.$$

Теорема 4 частично переносится на случай игр в банаховом пространстве.

Приведенные выше результаты нашли применение при решении прикладной задачи водораспределения в оросительной системе [9, 10].

1. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия и классы выпуклости // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, № 1.— С. 3—42.
2. *Остапенко В. В.* Линейные дифференциальные игры, в которых основные операторы допускают простое управление // Докл. АН СССР.— 1981.— **261**, № 4.— С. 808—810.
3. *Остапенко В. В.* Метод *Н*-выпуклых множеств в дифференциальных играх // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 62—64.
4. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб.— 1980.— **112**, № 3.— С. 307—330.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры.— М. : Наука, 1974.— 455 с.
6. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР.— 1969.— **184**, № 2.— С. 285—287.
7. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Там же.— 1981.— **256**, № 3.— С. 530—535.
8. *Никольский М. С.* Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования — убегания // Мат. заметки.— 1983.— **33**, № 6.— С. 885—891.
9. *Данильченко В. Е., Остапенко В. В., Яковлева А. П.* Линейная модель движения воды в каналах оросительной системы с учетом накопительных бассейнов // Теоретические и прикладные вопросы автоматизации управления мелиоративными системами.— Киев : УкрНИИ гидротехники и мелиорации, 1984.— С. 25—30.
10. *Данильченко В. Е., Остапенко В. В., Яковлева А. П.* Метод прогноза управления оросительной системой в условиях текущего планирования // Там же.— С. 31—40.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 03.07.85

УДК 519.1

В. А. Павленко

О числе орграфов периодических точек непрерывного отображения отрезка в себя

В последнее время появилось много работ (см., например, [1—3]), в которых в терминах орграфов доказывается известный результат А. Н. Шарковского [4].

Напомним определение n-периодического орграфа, приведенное в [3]. Пусть $f: R \to R$ — непрерывная функция и $a \in R$ — периодическая точка периода n функции f, т. е. числа a, $f(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ все различны и $f^n(a) = a$. Определим n-периодический орграф $G_f(a)$, задаваемый периодической точкой a функции f следующим образом. Числа a, $f(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ упорядочим по возрастанию. Пусть $a_0 = f^{i_0}(a) < a_1 = f^{i_1}(a) < \ldots < a_{n-1} = f^{i_{n-1}}(a)$; при этом полагаем $f_0(a) \equiv a$. Орграф $G_f(a)$ имеет $n-1$ вершин, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n-1$. Дуга (i, j) принадлежит орграфу $G_f(a)$ тогда и только тогда, когда отрезок $[a_{j-1}, a_j]$ лежит между числами $f(a_{i-1})$ и $f(a_i)$.

Орграф $G_f(a)$, построенный по n-периодической точке a функции f, интересен тем, что если в нем есть неповторный цикл длины m, то на отрезке $[a_0, a_{n-1}]$ функция f имеет периодическую точку периода m [1]. Под неповторным циклом понимается такой цикл, который не состоит из нескольких повторений цикла меньшей длины. На основании этого факта в работах [1—3] доказывается теорема Шарковского. В работе [3] ставится вопрос об описании n-периодических орграфов. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы найти число неизоморфных n-периодических орграфов.

С периодической точкой a функции f свяжем подстановку π_f, действующую на $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, следующим образом: $\pi_f(i) = j \Leftrightarrow f(a_i) = a_j$. Заметим, что подстановка π_f является циклической подстановкой длины k. Определим орграф G_{π_f}, порожденный подстановкой π_f, следующим образом. Орграф G_{π_f} имеет $k-1$ вершин, занумерованных числами $1, 2, \ldots, k-1$.