УДК 517.944

*Г. И. Данилюк, И. В. Скрыпник*

# Регулярные точки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка

При установлении регулярности обобщенного решения $u(x, t) = (u^1(x, t), \ldots$ $\ldots, u^N(x, t))$ нелинейной параболической системы дивергентного вида

$$\partial u^k/\partial t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha a_\alpha^k (x, t, u, \ldots, D_x^m u) = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

на открытом подмножестве полной меры главным моментом является изучение регулярных точек вектор-функции $u(x, t)$ [1]. Этому вопросу посвящена данная работа.

В (1) и ниже используются обозначения, принятые в работе [2]. Там же дано определение обобщенного решения $u(x, t) \in V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$ системы (1) и приведены условия на функции $a_\alpha^k(x, t, \xi)$, при которых для произвольного обобщенного решения $u(x, t)$, имеющего принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по $t$, доказана конечность интегралов

$$I_1(\omega) = \int_0^T \int_\Omega \left(1 + \sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D_x^\alpha u^k(x, t)|\right)^{q_1} \omega(x, t)\, dxdt,$$

$$I_2(\omega) = \int_{R^1} \int_{R^1} \int_\Omega \sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t)\, \omega(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}}\, dxdtdh, \tag{2}$$

где $\lambda > 0$, $q_1 > q \geqslant 2$. Эти оценки используются при доказательстве основного утверждения данной работы.

Сформулируем вначале несколько вспомогательных утверждений, касающихся так называемых максимальных функций. Введение максимальной функции и доказательство ее свойств можно провести аналогично монографии [3]. Отличие заключается лишь в том, что усреднение берется в рассматриваемом случае по цилиндрам, а не по шарам, как в [3].

Лемма 1. *Пусть $Q$ — измеримое подмножество в $R^{n+1}$ и имеется покрытие этого подмножества объединением семейства цилиндров $\{Q_j\}$: $: Q_j = B_{\rho_j}(x) \times [t - \rho_j^{2m}, t + \rho_j^{2m}]$, где $\rho_j$ ограничено, $B_{\rho_j}(x)$ — шар радиуса $\rho_j$ с центром в точке $x$. Тогда можно из этого семейства выбрать подпоследовательность $Q_1, \ldots, Q_k, \ldots$ (конечную или бесконечную) попарно непересекающихся цилиндров так, чтобы $\sum_k \operatorname{mes}(Q_k) \geqslant c \operatorname{mes} Q$, где $c$ — положительная константа, зависящая лишь от $n$ и $m$ (можно взять, например, $c = 5^{-(n+2m)}$).*

Обозначим

$$(Mf)(x, t) = \sup_{\rho > 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_\rho} \int_{Q_\rho} |f(y, \tau)|\, dyd\tau.$$

Здесь $f$ — локально суммируемая функция, определенная на $R^{n+1}$, $Q_\rho = B_\rho(x) \times [t - \rho^{2m}, t + \rho^{2m}]$; $Mf$ называют максимальной функцией [3].

Лемма 2. *Предположим, что функция $f$ определена на $R^{n+1}$.*

1. *Если $f \in L_p(R^{n+1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то функция $Mf$ почти всюду конечна.*

2. *Если $f \in L_1(R^{n+1})$, то для любого $\gamma > 0$*

$$\operatorname{mes}\{(x, t) : (Mf)(x, t) > \gamma\} \leqslant \frac{A}{\gamma} \int_{R^{n+1}} |f| \, dy d\tau, \tag{3}$$

*где постоянная $A$ зависит только от $n$ и $m$ (можно взять, например, $A = 5^{n+2m}$).*

3. *Если $f \in L_p(R^{n+1})$, $1 < p \leqslant \infty$, то $Mf \in L_p(R^{n+1})$ и*

$$\| Mf \|_{p, R^{n+1}} \leqslant A_p \| f \|_{p, R^{n+1}}, \tag{4}$$

*где постоянная $A_p$ зависит только от $n$, $m$, $p$ $(A_\infty = 1)$.*

Следствие 1. *Если $f$ — локально суммируемая функция, то почти при всех $(x, t)$*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_\rho} \int_{Q_\rho} f(y, \tau) \, dy d\tau = f(x, t).$$

Следствие 2. *Если $f$ — локально суммируемая функция, то почти при всех $(x, t)$*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_\rho} \int_{Q_\rho} | f(y, \tau) - f(x, t) | \, dy d\tau = 0.$$

Замечание 1. Если $f(x, t)$ — суммируемая функция переменных $(x, t) \in R^{n+1}$, то почти при всех $(x, t)$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} B_\rho(x)} \int_{B_\rho(x)} | f(y, t) - f(x, t) | \, dy = 0.$$

Это утверждение следует из того, что почти при всех $t$ $f(x, t)$ — суммируемая функция по переменной $x \in R^n$ и при таких значениях $t$ дополнение к лебегову множеству $f(x, t)$, как функции $x$, имеет меру нуль.

Определим для произвольной вектор-функции $u(x, t) = (u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$, $u^k(x, t) \in V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, $k = 1, \ldots, N$, и произвольной внутренней точки $(x_0, t_0) \in Q_T$ при $0 < r < r(x_0, t_0) = \min\{t_0^{1/(2m)}, (T - t_0)^{1/(2m)}, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$

$$J_r[u(x, t), Q_r(x_0, t_0)] = \int_{t_0 - r^{2m}}^{t_0 + r^{2m}} \int_{B_r(x_0)} \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\beta| \leqslant m} | D_x^\beta u^l |\right)^{q-2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} r^{2(|\alpha| - m)} | D_x^\alpha u^k |^2 \, dx dt, \tag{5}$$

где $Q_r(x_0, t_0) = B_r(x_0) \times [t_0 - r^{2m}, t_0 + r^{2m}]$.

Определение. *Внутренняя точка $(x_0, t_0) \in Q_T$ называется регулярной точкой вектор-функции $u(x, t)$, если существуют векторы $p_{0,\alpha} = (p_{0,\alpha}^1, \ldots, p_{0,\alpha}^N)$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, зависящие от этой точки, такие, что*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x_0, t_0)} J_r\left[u(x, t) - \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_{0,\alpha} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}, \; Q_r(x_0, t_0)\right] = 0. \tag{6}$$

Справедливо следующее утверждение, представляющее основной результат работы.

Теорема. *Пусть $u(x, t) = (u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$ — обобщенное решение системы* (1), *имеющее принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по $t$.*

*Предположим, что для коэффициентов системы* (1) *выполняются условия* а), б) *из работы* [2]. *Тогда почти все точки цилиндра* $Q_T$ *являются регулярными точками вектор-функции* $u(x, t)$.

Прежде чем проводить доказательство этой теоремы, докажем следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы почти при всех* $(x, t) \in Q_T$

$$\lim_{r\to 0} Z_r(x, t) = 0, \tag{7}$$

*где*

$$Z_r(x, t) = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{|\alpha|-m} | D_y^\alpha u^k(y, \tau) -$$

$$- D_y^\alpha u^k(y, t)| \, dy d\tau.$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$\underline{\lim_{r\to 0}} Z_r(x, t) = 0 \tag{8}$$

почти при всех $(x, t) \in Q_T$. Достаточно проверить выполнение (7) и (8) для почти всех $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$, где $\delta$ — произвольное положительное число. Зафиксируем далее $\delta > 0$ и функцию $\omega_\delta(x, t) \in C_0^\infty(Q_T)$, равную единице в $Q_T^{(\delta/2)}$.

Из ограниченности интеграла $I_2(\omega_\delta)$ из (2) следует

$$\lim_{H\to 0} \int_{-H}^{H} \int_{R^1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{| \Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t) \omega_\delta(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m}} dxdtdh = 0. \tag{9}$$

Заметим при этом, что в интеграле по $t$ пределы интегрирования можно взять конечными.

Введем дополнительную функцию

$$F_H(x, t) = \int_{-H}^{H} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{| \Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t) \omega_\delta(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m}} dh.$$

При этом равенство (9) можно представить в виде

$$\lim_{H\to 0} \int_{R^1} \int_{\Omega} F_H(x, t) \, dxdt = 0, \tag{10}$$

откуда следует, что при фиксированном $H$ $F_H(x, t)$, как функция $x$, интегрируема по $\Omega$ при $t \in R^1 \setminus R_H$, где $R_H$ — множество линейной меры нуль. Определим максимальную функцию $(M'F_H)(x, t)$ нулем при $t \in R_H$ и равенством

$$(M'F_H)(x, t) = \sup_{r>0} \frac{1}{\operatorname{mes} B_r(x)} \int_{B_r(x)\cap\Omega} F_H(y, t) \, dy \tag{11}$$

при $x \in R^n$, $t \in R^1 \setminus R_H$.

Покажем, что $M'F_H$ при $(x, t) \in \Omega \times R^1$ сходится к нулю по мере при $H \to 0$. Для этого достаточно заметить, что при произвольном $\varepsilon > 0$ и $t \in R^1$ в силу (3) имеем

$$\operatorname{mes}\{x : (M'F_H)(x, t) > \varepsilon\} < \frac{5^n}{\varepsilon} \int_{\Omega} F_H(y, t) \, dy. \tag{12}$$

Отсюда и из (10) следует сходимость $M'F$ в $\Omega \times R^1$ по мере к нулю. Это обеспечивает сходимость к нулю по мере в $Q_T^{(\delta)}$ последовательности $Z_{H^{1/(2m)}}(x, t)$, так как при $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$, $t \notin R_H$, и $H < (\delta/2)^{2m}$ справедлива с некоторой абсолютной константой $c$ оценка

$$Z_{H^{1/(2m)}}(x, t) \leqslant \frac{1}{2H^{1/2} \operatorname{mes} B_{H^{1/(2m)}}(x)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{-H}^{H} \int_{B_{H^{1/(2m)}}(x)} \frac{|\Delta_t(h) D_y^\alpha u^k(y, t)|}{h^{1-|\alpha|/(2m)}} dy dh \leqslant c \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} B_{H^{1/(2m)}}(x)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{-H}^{H} \int_{B_{H^{1/(2m)}}(x)} \frac{|\Delta_t(h) D_y^\alpha [u^k(y, t)\, \omega_\delta(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m}} dy dh \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} B_{H^{1/(2m)}}(x)} \int_{B_{H^{1/(2m)}}(x)} F_H(y, t)\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant c \{(M' F_H)(x, t)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Из сходимости $Z_H(x, t)$ по мере к нулю в $Q_T^{(\delta)}$ следует, что некоторая подпоследовательность $Z_{H_i}(x, t)$ сходится к нулю в $Q_T^{(\delta)}$ при $H_i \to 0$ почти всюду.

Таким образом, доказано выполнение равенства (8) при почти всех $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$. Для завершения доказательства леммы достаточно установить, что почти при всех $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$

$$f(x, t) = \overline{\lim_{r \to 0}}\, Z_r(x, t) - \underline{\lim_{r \to 0}}\, Z_r(x, t) = 0. \quad (14)$$

При произвольных $\gamma > 0$, $k = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ и при $x \in \Omega$, $t \in R^1$ имеем

$$D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t)\, \omega_\delta(x, t)] = h_{\alpha,\gamma}^k(x, t) + g_{\alpha,\gamma}^k(x, t), \quad (15)$$

где $h_{\alpha,\gamma}^k(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем, а функция $g_{\alpha,\gamma}^k(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{R^1} \int_{R^1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_t(h) [g_{\alpha,\gamma}^k(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m}} dx dt dh < \gamma. \quad (16)$$

Используя представление (15), в силу дифференцируемости функций $h_{\alpha,\gamma}^k(x, t)$ для $f(x, t)$, определяемой равенством (14), при $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$ получаем оценку

$$f(x, t) \leqslant 2 \overline{\lim_{r \to 0}}\, G_{r,\gamma}(x, t), \quad (17)$$

где

$$G_{r,\gamma}(x, t) = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} r^{|\alpha|-m} |g_{\alpha,\gamma}^k(y, \tau) - g_{\alpha,\gamma}^k(y, t)| dy d\tau.$$

Далее, оценивая $G_{r,\gamma}(x, t)$ аналогично оценке $Z_r(x, t)$ в (13), при $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$ имеем

$$G_{r,\gamma}(x, t) \leqslant c \{(M' P_\gamma)(x, t)\}^{1/2}, \quad (18)$$

где

$$P_\gamma(x, t) = \int_{R^1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} h^{-(2-|\alpha|/m)} |\Delta_t(h) [g_{\alpha,\gamma}^k(x, t)]|^2 dh$$

и максимальная функция $(M' P_\gamma)(x, t)$ определяется равенством (11). Из (12) и (16) при произвольном $\varepsilon$ получаем

$$\operatorname{mes} \{(x, t) \in Q_T^{(\delta)} : (M' P_\gamma)(x, t) > \varepsilon\} < \frac{5^n}{\varepsilon} \gamma. \quad (19)$$

Оценки (17) — (19) показывают, что

$$\operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_T^{(\delta)} : f(x, t) > \varepsilon\} \leqslant \operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_T^{(\delta)} :$$
$$: (M' P_\gamma)(x, t) > (\varepsilon/(2c))^2\} < \frac{4c^2 5^n}{\varepsilon^2} \gamma.$$

В силу произвольности $\gamma$ и независимости $\omega(x, t)$ от $\gamma$ следует, что $f(x, t)$ почти всюду обращается в нуль. Тем самым проверено почти при всех $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$ равенство (14), а следовательно, в силу (8) и равенство (7).

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы почти при всех* $(x, t) \in Q_T$

$$\lim_{r \to 0} Y_r(x, t) = 0, \tag{20}$$

*где*

$$Y_r(x, t) = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{-r^{2m}}^{r^{2m}} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_\tau(h) D_y^\alpha [\tilde{u}^k(y, \tau) \omega(y, \tau)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}} \times$$
$$\times\, dy d\tau dh.$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$\varlimsup_{r \to 0} Y_r(x, t) = 0 \tag{21}$$

почти при всех $(x, t) \in Q_T$. Пусть $\delta$ и $\omega_\delta$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве леммы 3. В силу ограниченности $I_2(\omega_\delta)$ из (2) следует

$$\lim_{H \to 0} \int_{R^1} \int_{\Omega} P_H(x, t)\, dx dt = 0, \tag{22}$$

где

$$P_H(x, t) = \int_{-H}^{H} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t)\, \omega_\delta(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}}\, dh.$$

Определим при $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$

$$(MP_H)(x, t) = \sup_{r>0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int\int_{Q_r(x,t) \cap \{\Omega \times R^1\}} P_H(y, \tau)\, dy d\tau.$$

Из леммы 2 следует

$$\operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_T^{(\delta)} : (MP_H)(x, t) > \varepsilon\} < \frac{A}{\varepsilon} \int_{R^1} \int_{\Omega} P_H(y, \tau)\, dy d\tau. \tag{23}$$

Это обеспечивает сходимость $MP_H$ по мере к нулю в $Q_T^{(\delta)}$. Сходимость же $Y_r(x, t)$ по мере к нулю в $Q_T^{(\delta)}$ следует теперь из очевидного неравенства $Y_r(x, t) \leqslant (MP_{r^{2m}})(x, t)$. Тем самым установлено почти при всех $(x, t) \in Q_T$ равенство (21).

Для завершения доказательства леммы покажем, что функция $f_1(x, t) = \varlimsup_{r \to 0} Y_r(x, t) - \varliminf_{r \to 0} Y_r(x, t)$ почти всюду в $Q_T^{(\delta)}$ равна нулю. При $k = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ и произвольном $\gamma > 0$ имеем

$$D_x^\alpha [\tilde{u}^k(x, t)\, \omega_\delta(x, t)] = \bar{h}_{\alpha,\gamma}^k(x, t) + \bar{g}_{\alpha,\gamma}^k(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in R^1, \tag{24}$$

где $\bar{h}_{\alpha,\gamma}^k(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем, а функция $\bar{g}_{\alpha,\gamma}^k(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{R^1} \int_{R^1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} h^{-(2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m)} |\Delta_t(h) [\bar{g}_{\alpha,\gamma}^k(x, t)]|^2\, dx dt dh < \gamma. \tag{25}$$

Используя представление (24), при $(x, t) \in Q_T^{(\delta)}$ получаем

$$f_1(x, t) \leqslant 2 \varlimsup_{r \to 0} \overline{G}_{r,\gamma}(x, t), \tag{26}$$

где

$$\overline{G}_{r,\gamma}(x, t) = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{-r^{2m}}^{r^{2m}} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_\tau(h)[\overline{g}^k_{\alpha,\gamma}(y, \tau)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}} \times$$
$$\times dy d\tau dh.$$

Далее, $\overline{G}_{r,\gamma}(x, t)$ оценим следующим образом:

$$\overline{G}_{r,\gamma}(x, t) \leqslant (M\overline{P}_\gamma)(x, t), \tag{27}$$

где

$$\overline{P}_\gamma(x, t) = \int_{R^1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{|\Delta_t(h)[\overline{g}^k_{\alpha,\gamma}(x, t)]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}} dh.$$

Из оценок (23), (25) — (27) получаем неравенство $\operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_T^{(\delta)} : f_1(x, t) > \varepsilon\} < \frac{2A}{\varepsilon}\gamma$, из которого следует, что $f_1(x, t)$ равна нулю почти всюду в $Q_T^{(\delta)}$. Из этого, как и выше, следует доказательство равенства (20).

Лемма 5. *Существует постоянная $c$, зависящая лишь от $n$, $m$, $q_1 > 2$, такая, что для произвольной, определенной при $|x| < 1$, $-2 \leqslant t \leqslant 2$, функции $v(x, t)$ выполнено неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} \sum_{|\alpha|<m} |D_x^\alpha v(x, t)|^{q_1} dx dt \leqslant c \left\{ \int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} \sum_{|\gamma|=m} |D_x^\gamma v(x, t)|^{q_1} dx dt + \right.$$
$$\left. + \left[ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} \frac{|\Delta_t(h) v(x, t)|^2}{h^2} dx dt dh \right]^{q_1/2} + \left[ \int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} |v(x, t)| dx dt \right]^{q_1} \right\} \tag{28}$$

*при условии, что величина, стоящая в фигурных скобках в правой части неравенства* (28), *конечна.*

Доказательство достаточно проводить для бесконечно дифференцируемой функции $v(x, t)$. При этом нужно получить оценку (28) лишь при $|\alpha| = 0$, так как оценка при $0 < |\alpha| < m$ будет получаться затем непосредственным применением интерполяционных неравенств к $v(x, t)$ при фиксированных значениях $t$ и последующим интегрированием по $t$.

При каждом значении $t \in [-1, 1]$ известна оценка

$$\int_{B_1(0)} |v(x, t)|^{q_1} dx \leqslant c_1 \left\{ \sum_{|\gamma|=m} \int_{B_1(0)} |D_x^\gamma v(x, t)|^{q_1} dx + \left[ \int_{B_1(0)} |v(x, t)| dx \right]^{q_1} \right\} \tag{29}$$

с постоянной $c_1$, зависящей лишь от $n$, $m$, $q_1$. Интегрируя (29) по $t$, получаем

$$\int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} |v(x, t)|^{q_1} dx dt \leqslant c_1 \left\{ \int_{-1}^{1} \int_{B_1(0)} \sum_{|\gamma|=m} |D_x^\gamma v(x, t)|^{q_1} dx dt + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1} \left[ \int_{B_1(0)} |v(x, t)| dx \right]^{q_1} dt \right\}. \tag{30}$$

Далее, к функции одного переменного $w(t) = \int_{B_1(0)} |v(x, t)| dx$ применим оценку

$$\int_{-1}^{1} |w(t)|^{q_1} dt \leqslant c_1 \left\{ \left[ \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{|\Delta_t(h) w(t)|^2}{h^2} dt dh \right]^{q_1/2} + \left[ \int_{-1}^{1} |w(t)| dt \right]^{q_1} \right\}, \tag{31}$$

легко следующую из теорем вложения.

Оценивая теперь последнее слагаемое правой части (30) по неравенству (31), непосредственно получаем неравенство (28).

Доказательство теоремы. Обозначим через $L_u$ множество всех тех внутренних точек $(x, t) \in Q_T$, для которых

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D_y^\alpha u^k(y, \tau) - D_x^\alpha u^k(x, t)|\, dy d\tau = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} B_r(x)} \int_{B_r(x)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D_y^\alpha u^k(y, t) - D_x^\alpha u^k(x, t)|\, dy = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} Z_r(x, t) = 0, \quad \lim_{r\to 0} Y_r(x, t) = 0, \tag{32}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x, t)} \int_{t-r^{2m}}^{t+r^{2m}} \int_{B_r(x)} [V(y, \tau)]^{q_1}\, dy d\tau = [V(x, t)]^{q_1},$$

где $Z_r(x, t)$ и $Y_r(x, t)$ определены выше, а $V(x, t) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} |D_x^\alpha u^k(x, t)|$.

В силу следствия 2, замечания 1 и лемм 3, 4, имеем $\operatorname{mes}(Q_T \setminus L_u) = 0$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что каждая принадлежащая $L_u$ точка является регулярной. Далее, $(x_0, t_0)$ — произвольная точка $L_u$.

Отметим вначале, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x_0, t_0)} \int_{t_0-r^{2m}}^{t_0+r^{2m}} \int_{B_r(x_0)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{|\alpha|-m} |D_x^\alpha u^k(x, t) - D_x^\alpha u^k(x_0, t_0)|\, dx dt = 0. \tag{33}$$

В самом деле, равенство (33) следует из $\lim\limits_{r\to 0} Z_r(x_0, t_0) = 0$ и

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{|\alpha|-m} |D_x^\alpha u^k(x, t_0) - D_x^\alpha u^k(x_0, t_0)|\, dx = 0.$$

Последнее равенство можно доказать аналогично доказательству равенства (2.17) из работы [4].

Докажем выполнение равенства (6) для $u(x, t)$ и выбранной точки $(x_0, t_0)$, причем в качестве чисел $p_{0,\alpha}^k$ возьмем $D_x^\alpha u^k(x_0, t_0)$. Обозначим $w^k(x, t) = u^k(x, t) - \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} D_x^\alpha u^k(x_0, t_0) \dfrac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$. Тогда из (33) и (32) при $0 < r < \frac{1}{2} r(x_0, t_0)$ с некоторой постоянной $c$, зависящей от $(x_0, t_0)$, будем иметь

$$\begin{gathered}
\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x_0, t_0)} \int_{t_0-r^{2m}}^{t_0+r^{2m}} \int_{B_r(x_0)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{|\alpha|-m} |D_x^\alpha w^k(x, t)|\, dx dt = 0, \\
\lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x_0, t_0)} \int_{-r^{2m}}^{r^{2m}} \int_{t_0-r^{2m}}^{t_0+r^{2m}} \int_{B_r(x_0)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha w^k(x, t)|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}}\, dx dt dh = 0, \\
\frac{1}{\operatorname{mes} Q_r(x_0, t_0)} \int_{t_0-r^{2m}}^{t_0+r^{2m}} \int_{B_r(x_0)} \Big(1 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D_x^\alpha w^k(x, t)|\Big)^{q_1} dx dt \leqslant c.
\end{gathered} \tag{34}$$

Сделаем замену аргументов $h = r^{2m}\sigma$, $x = x_0 + ry$, $t = t_0 + r^{2m}\tau$ и положим $W_r^k(y, \tau) = r^{-m}\omega^k(x_0 + ry, t_0 + r^{2m}\tau)$. Из (34) получим

$$\lim_{r\to 0}\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_y^\alpha W_r^k(y, \tau)|\,dyd\tau = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{-2\lambda|\alpha|}\frac{|\Delta_\tau(\sigma) D_y^\alpha W_r^k(y, \tau)|^2}{\sigma^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}}\,dyd\tau d\sigma = 0, \tag{35}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}\Big(1 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{m-|\alpha|}|D_y^\alpha W_r^k(y, \tau)|\Big)^{q_1} dyd\tau \leqslant c_1.$$

Для доказательства равенства (6) достаточно проверить, что

$$\lim_{r\to 0}\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}\Big(1 + \sum_{l=1}^{N}\sum_{|\beta|\leqslant m} r^{m-|\beta|}|D_y^\beta W_r^l(y, \tau)|\Big)^{q-2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_y^\alpha W_r^k(y, \tau)|^2\,dyd\tau = 0. \tag{36}$$

Обозначим далее подынтегральное выражение в (36) через $\Phi_r(y, \tau)$. Для того чтобы установить (36), достаточно проверить:

а) последовательность $\Phi_r(y, \tau)$ сходится при $r \to 0$ к нулю по мере в $Q_1(0, 0)$;

б) $\lim\limits_{\text{mes}E\to 0}\iint\limits_E \Phi_r(y, \tau)\,dyd\tau = 0$ равномерно относительно $r$.

Первое утверждение непосредственно следует из первого равенства в (35). Второе утверждение будет проверено, если, например, докажем при достаточно малых $r$ оценку

$$\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}[\Phi_r(y, \tau)]^{q_1/q}\,dyd\tau \leqslant c_2 \tag{37}$$

с постоянной $c_2$, не зависящей от $r$. Из третьего неравенства в (35) следует, что для проверки (37) достаточно установить при $0 < r < \frac{1}{2}r(x_0, t_0)$ оценку

$$\int_{-1}^{1}\int_{B_1(0)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_y^\alpha W_r^k(y, \tau)|^{q_1}\,dyd\tau \leqslant c_3(x_0, t_0). \tag{38}$$

Неравенство (38), а следовательно, и теорема следуют из (34) и леммы 5.


1. *Данилюк Г. И., Скрыпник И. В.* О частичной регулярности обобщенных решений квазилинейных параболических систем // Докл. АН СССР.— 1980.— **250**, № 4.— С. 790—793.
2. *Данилюк Г. И., Скрыпник И. В.* Априорные оценки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 283—288.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
4. *Морри Ч.* О регулярности решений нелинейных эллиптических систем // Математика.— 1969.— **13**, № 3.— С. 50—71.



Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк



Получено 21.02.86