УДК 517.944

В. М. Борок, Я. И. Житомирский

Задача Коши для уравнений с нагрузками на поверхностях

Нагруженные дифференциальные уравнения, т. е. уравнения, содержащие наряду со значениями искомой функции и ее производных в произвольной точке некоторой области также их значения на многообразиях меньшей размерности, возникают в различных математических и прикладных задачах (см. обзор и библиографию в [1]). Исследованию единственности решения задачи Коши для уравнений с нагрузками на гиперплоскостях $t = \mathrm{const}$, прямых $x = \mathrm{const}$, в фиксированных точках посвящены работы [2, 3]. В данной статье устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для линейных уравнений, нагруженных на конечном числе гладких гиперповерхностей, в классах конечное число раз дифференцируемых медленно растущих функций.

1. Обозначения. Формулировка теоремы. Пусть $P(z)$, $Q_k(z)$ ($k \in K$ — конечное множество) — произвольные полиномы от $z=(z', z'') \in \mathbb{R}^{n+m}$ с постоянными (комплексными) коэффициентами, $z' \in \mathbb{R}^n$, $z'' \in \mathbb{R}^m$, $R(z') \equiv P(z', 0) + \sum\limits_{k \in K} Q_k(z', 0)$; $p = \deg P(z)$, $q = \max\limits_k \deg Q_k(z)$, $r = \deg R(z')$; $C_s^l(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(x) \in C^l(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{s,l} \underset{\text{def}}{=} \sup\limits_x \max\limits_{\alpha:|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha \varphi| (1+|x|)^{-s} < \infty\}$. Здесь $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{R}$; $C_s^l(\mathbb{R}^n, T) = \{\varphi : [0, T] \to C_s^l(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{s,l}^T = \sup\limits_{[0,T]} \|\varphi\|_{s,l} < \infty\}$. Будем также использовать символы $C_s^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} C_s^k(\mathbb{R}^n)$, $C_{-\infty}^l(\mathbb{R}^n) = C^l(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных l раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|\varphi\|_{-\infty,l} = \|\varphi\|_{0,l}$. Очевидно,

$$C_{s'}^{l'}(\mathbb{R}^n) \subset C_s^l(\mathbb{R}^n) \text{ при } s' \leqslant s,\ l \leqslant l'; \quad \|\varphi\|_{s,l} \leqslant \|\varphi\|_{s'l'};$$

$$\partial/\partial x_i : C_s^l(\mathbb{R}^n) \to C_s^{l-1}(\mathbb{R}^n), \quad \|\partial\varphi/\partial x_i\|_{s,l-1} \leqslant \|\varphi\|_{s,l}.$$

Здесь $i \in \{1, \ldots, n\}$, $l \geqslant 1$.

Пусть $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_m(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $b_j(x) \in C_{s_1}^{l_1}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, m$, $s_1 \geqslant 0$, $\varphi(x, y) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$, $B\varphi \underset{\text{def}}{=} \varphi(x, y) \underset{y}{\circ} b(x) \equiv \varphi(x, b(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Тогда при $s \geqslant 0$ $B : C_s^l(\mathbb{R}^{n+m}) \to C_{s_2}^{l_2}(\mathbb{R}^n)$, где $l_2 = \min(l, l_1)$, $s_2 = s \max(s_1, 1) + s_1 l_2$, причем $\|B\varphi\|_{s_2,l_2} \leqslant C\|\varphi\|_{s,l}$, постоянная $C > 0$ не зависит от выбора $\varphi \in C_s^l(\mathbb{R}^{n+m})$.

Исследуем задачу Коши

$$\partial u(x, y, t)/\partial t = P(D_x, D_y)\, u(x, y, t) + \sum_{k \in K} Q_k(D_x, D_y)\, u(x, y, t) \underset{y}{\circ} b_k(x), \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \tag{2}$$

Здесь $u_0(x, y) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ — заданная функция, $b_k(x) = (b_{k1}(x), \ldots, b_{km}(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — заданные отображения, $k \in K$, $u(x, y, t) : \Pi = \mathbb{R}^{n+m} \times [0, T] \to \mathbb{C}$ — искомая функция.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{Re} P(i\sigma', i\sigma'') \leqslant C, \quad (\sigma', \sigma'') \in \mathbb{R}^{n+m}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} R(i\sigma') \leqslant C, \quad \sigma' \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$b_{kj}(x) \in C_{s_1}^{l_1}(\mathbb{R}^n), \ k \in K, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

причем, если $r > 1$, то $s_1 < 1/(r-1)$.

Тогда для любого $s \geqslant 0$ и любого достаточно большого $l \in \mathbb{N}$ можно указать $l_1^0 = l_1^0(l, s)$, $s^0 = s^0(l, s) \geqslant 0$ и $l^0 = l^0(l, s) \in \mathbb{N}$ такие, что если $l_1 \geqslant l_1^0$, то для любой функции $u_0(x, y) \in C_s^{l^0}(\mathbb{R}^{n+m})$ существует единственное решение $u(x, y, t) \in C_{s^0}^l(\mathbb{R}^{n+m}, T)$ задачи (1), (2), причем

$$\|u(x, y, t)\|_{s^0,l}^T \leqslant C\|u_0\|_{s,l^0} \tag{6}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от $u_0(x, y)$.

Замечание 1. При $r \leqslant 1$ величина s_1 может быть любой, при этом $l_1^0(l, s) \equiv l$.

Замечание 2. Если $s_1 = 0$, то результат усиливается: $s^0(l, s) \equiv s$, т. е. задача Коши (1), (2) корректно разрешима в классах функций степенного роста без увеличения порядка роста решения по сравнению с порядком роста начальной функции.

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим задачу Коши для уравнения без нагрузок:

$$\partial v(x, t)/\partial t = A(D_x) v(x, t) + \psi(x, t), \quad v(x, 0) = 0, \tag{7}$$

где $A(s)$ — полином, $\deg A(s) = a$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Лемма 1. *Пусть $a > 1$, $\operatorname{Re} A(i\sigma) \leqslant C$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, и $\psi(x, t) \in C^{\lambda}_{-\infty}(\mathbb{R}^n, T)$, причем $\psi(x, t) \equiv 0$, если $\max\limits_i |x_i| > 1$.*

Для любых $l \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{R}$ при условии $\lambda > \lambda_0 = l + (a-1)|s| + n$ задача (7) имеет решение $v(x, t) \in C^l_s(\mathbb{R}^n, T)$, причем

$$\| v(x, t)\|^T_{s,l} \leqslant C \| \psi \|^T_{-\infty,\lambda} \tag{8}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от ψ.

Доказательство. Если $\tilde{\psi}(\sigma, t)$ — образ Фурье $\psi(x, t)$, то легко видеть, что $\tilde{\psi}(\sigma, t) \in C^{\infty}_{-\lambda}(\mathbb{R}^n, T)$, причем при любом $k \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\| \tilde{\varphi} \|^T_{-\lambda,k} \leqslant C \| \psi \|^T_{-\infty,\lambda}. \tag{9}$$

Полагая

$$\tilde{v}(\sigma, t) = \int\limits_0^t \exp\{(t-\tau) A(i\sigma)\} \psi(\sigma, \tau) d\tau$$

и используя оценку $|D^{\alpha}_{\sigma} \exp(tA(i\sigma))| \leqslant C(\alpha)(1 + |\sigma|)^{(a-1)|\alpha|}$, получаем $\tilde{v}(\sigma, t) \in C^k_{-\lambda+(a-1)k}(\mathbb{R}^n, T)$. При этом, учитывая (9), при любом $k \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\| \tilde{v} \|^T_{-\lambda+(a-1)k,k} \leqslant C \| \psi \|^T_{-\infty,\lambda}. \tag{10}$$

Если выполнено неравенство $-\lambda + (a-1)|s| + l < -n$, то, как нетрудно убедиться, используя (10), функция $v(x, t) = \dfrac{1}{2\pi} \int \tilde{v}(\sigma, t) e^{i(\sigma,x)} d\sigma$ принадлежит пространству $C^l_s(\mathbb{R}^n, T)$ и выполняется (8). Функция $v(x, t)$ дает решение задачи (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} A(i\sigma) \leqslant C$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $a > 1$, $s \geqslant 0$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > l + (a-1)s + na$. *Тогда при любой $\psi(x, t) \in C^{\lambda}_s(\mathbb{R}^n, T)$ задача (7) имеет решение $v(x, t) \in C^l_s(\mathbb{R}^n, T)$, причем $\| v(x, t)\|^T_{s,l} \leqslant C \| \psi \|^T_{s,\lambda}$, C не зависит от ψ.*

Доказательство. Пусть $\alpha(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ — финитная функция, удовлетворяющая условиям $\alpha(\xi) \geqslant 0$, $\alpha(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| > 3/4$, $\alpha(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| < 1/4$, $\alpha(\xi) \equiv 1 - \alpha(\xi - 1)$ при $\xi \in (1/4, 3/4)$. Положим при $x \in \mathbb{R}^n$ $\alpha(x) = \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n)$. Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha(x - k) \equiv 1. \tag{11}$$

Обозначим теперь $\psi_k(x, t) \equiv \psi(x + k, t) \alpha(x)$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Из условия $\psi(x, t) \in C^{\lambda}_s(\mathbb{R}^n, T)$ заключаем, что $\psi_k(x, t) \in C^{\lambda}_{-\infty}(\mathbb{R}^n, T)$ и $\| \psi_k \|^T_{-\infty,\lambda} \leqslant C(1 + |k|)^s \times \| \psi \|^T_{s,\lambda}$ с постоянной $C > 0$, не зависящей от ψ и k.

Обозначим через $v_k(x, t)$ решение задачи Коши (7) с заменой $\psi(x, t)$ на $\psi_k(x, t)$. На основании (11) заключаем, что

$$v(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} v_k(x - k, t) \tag{12}$$

есть решение задачи (7), если этот ряд сходится и допускает почленное дифференцирование. Используя лемму 1, при любом $\gamma > 0$ можем утверждать, что $v_k(x, t) \in C^l_{-\gamma}(\mathbb{R}^n, T)$, если $\lambda > \lambda_0 = l + (a-1)\gamma + n$, причем

$$\| v_k \|^T_{-\gamma,l} \leqslant C \| \psi_k \|^T_{-\infty,\lambda} \leqslant C' \| \psi \|^T_{s,\lambda} (1 + |k|)^s, \tag{13}$$

где C' не зависит от ψ и k.

Это дает возможность оценить сумму ряда (12) и ряда из его производных: из (13) следует, что для любого мультииндекса α $|\alpha| \leqslant l$ и $\forall k \in \mathbb{Z}^n$ справедлива оценка

$$|D^\alpha v_k(x-k, t)| \leqslant C'(1+|x-k|)^{-\gamma}(1+|k|)^s \|\psi\|_{s,\lambda}^T \leqslant$$
$$\leqslant C''(1+|x|)^s(1+|k-x|)^{s-\gamma}\|\psi\|_{s,\lambda}^T. \tag{14}$$

Считая далее, что $\lambda > l + (a-1)s + an$, можно подчинить γ двум условиям: $\gamma > s + n$ и $\lambda > l + (a-1)\gamma + n$. Тогда остаются справедливыми неравенства (13) и (14), причем из (12) и (14) теперь следует $v(x, t) \in C_s^l(\mathbb{R}^n, T)$, $\|v\|_{s,l}^T \leqslant C\|\psi\|_{s,\lambda}^T$, что и требовалось.

Аналогично устанавливается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Re} A(i\sigma) \leqslant C$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. *Тогда при любых* $s \geqslant 0$ *и* $l \in \mathbb{N}_0$ *для любой функции* $w_0(x) \in C_s^\lambda(\mathbb{R}^n)$ *при* $\lambda > l + (a-1)s + an$ *задача Коши*

$$\partial w(x, t)/\partial t = A(D_x)w(x, t), \quad w(x, 0) \equiv w_0(x) \tag{15}$$

имеет решение $w(x, t) \in C_s^l(\mathbb{R}^n, T)$, *причем*

$$\|w(x, t)\|_{s,l}^T \leqslant C\|w_0\|_{s,\lambda}. \tag{16}$$

Замечание 3. При $a \leqslant 1$, $A(D_x) = \sum_{k=1}^n A_k\,\partial/\partial x_k + A_0$ результат в леммах 2 и 3 усиливается, а именно при $\psi(x, t) \in C_s^l(\mathbb{R}^n, T)$ и $w_0(x) \in C_s^l(\mathbb{R}^n)$ (любые $s \geqslant 0$, $l \in \mathbb{N}_0$) решение соответствующих задач имеет вид:

задачи (7) —

$$v(x, t) = \int_0^t e^{A_0(t-\tau)}\psi(x_1 + A_1(t-\tau), \ldots, x_n + A_n(t-\tau), \tau)\,d\tau,$$

задачи (15) —

$$w(x, t) = e^{A_0 t}w_0(x_1 + A_1 t, \ldots, x_n + A_n t),$$

поэтому $v(x, t)$, $w(x, t) \in C_s^l(\mathbb{R}^n, T)$ и верны оценки (12) и (16) с $\lambda = l$.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу Коши

$$\partial w(x, y, t)/\partial t = P(D_x, D_y)w(x, y, t), \quad w(x, y, 0) = u_0(x, y). \tag{17}$$

Фиксируя пока произвольно числа $s \geqslant 0$ и $\bar{l} \in \mathbb{N}_0$ и используя лемму 3, можно утверждать, что если $u_0(x, y) \in C_s^{l^0}(\mathbb{R}^{n+m})$ и

$$l^0 > \bar{l} + (p-1)s + p(n+m), \quad p > 1, \tag{18}$$

то $w(x, y, t) \in C_s^{\bar{l}}(\mathbb{R}^{n+m}, T)$ и

$$\|w\|_{s,\bar{l}}^T \leqslant C\|u_0\|_{s,l^0} \tag{19}$$

(согласно замечанию 3 $l^0 = \bar{l}$ при $p \leqslant 1$).

Обозначим $\psi(x, t) = Q[w] \equiv \sum_{k \in K} Q_k(D_x, D_y)w(x, y, t) \underset{y}{\circ} b_k(x)$. В силу вида оператора Q, используя свойства оператора B и (19), заключаем, что $\psi(x, t) \in C_{s_2}^{l_2}(\mathbb{R}^n, T)$, где

$$l_2 = \min(\bar{l} - q, l_1), \tag{20}$$

$$s_2 = s\max(s_1, 1) + s_1 l_2, \tag{21}$$

$\|\psi\|_{s_2,l_2}^T \leqslant C\|u_0\|_{s,l^0}$.

Теперь рассмотрим вторую вспомогательную задачу Коши

$$\partial v(x, t)/\partial t = R(D_x)v(x, t) + \psi(x, t), \quad v(x, 0) = 0. \tag{22}$$

Используя лемму 2, заключаем, что при заданных $s^0 \geqslant s_2$ и $l \in \mathbb{N}_0$, если

$$l_2 > l + (r-1)s^0 + nr, \quad r > 1, \tag{23}$$

то задача (22) имеет решение $v(x, t) \in C^l_{s^0}(\mathbb{R}^n, T)$ и

$$\| v \|^T_{s^0,l} \leqslant \| v(x, t) \|^T_{s_2,l} \leqslant C \| \psi \|^T_{s_2,l_2} \leqslant C_1 \| u_0 \|_{s,l^0}. \tag{24}$$

Отметим, что при $r \leqslant 1$ ограничение имеет вид $l_2 \geqslant l$ и снова $\| v \|^T_{s^0,l} \leqslant C \| u_0 \|_{s,l^0}$.

При $r > 1$ возникает вопрос о согласовании неравенств $s^0 \geqslant s_2$ и (23). Это согласование возможно, если исходный выбор $\overline{l}$ подчинить требованию $\overline{l} - q \geqslant l_1$. Тогда $l_2 = l_1$, $s_2 = s \max(s_1, 1) + s_1 l_1$, и мы приходим к неравенствам

$$s^0 \geqslant s \max(s_1, 1) + s_1 l_1, \tag{25}$$

$$l_1 > l + (r-1)s^0 + nr, \tag{26}$$

которые совместны, если $s^0 > s \max(s_1, 1) + s_1 l + (r-1) s_1 s^0 + nrs_1$, или

$$s^0 > \frac{s \max(s_1, 1) + s_1 l + nrs_1}{1 - (r-1)s_1} = s_0. \tag{27}$$

Итак, если $\overline{l} \geqslant l_1 + q$, $s \geqslant 0$, $l^0 > \overline{l} + (p-1)s + p(n+m)$, $u_0(x, y) \in C^{l^0}_s(\mathbb{R}^{n+m})$, то задача (17) имеет решение $w(x, y, t) \in C^{\overline{l}}_s(\mathbb{R}^{n+m}, T)$ и при $\psi = Q[w]$ задача (22) имеет решение $v(x, t) \in C^l_{s^0}(\mathbb{R}^n, T)$, если выполнено условие $s^0 > s_0$. (Заметим, что s_0 зависит от l.) Функция $u(x, y, t) \equiv w(x, y, t) + v(x, t)$, как нетрудно проверить, дает решение задачи (1), (2), причем $u(x, y, t) \in C^{\min(l,\overline{l})}_{s^0}(\mathbb{R}^{n+m}, T)$, и можно считать $\min(l, \overline{l}) = l$. Тогда

$$\sup_{\mathbb{R}^{n+m}} \max_{|\alpha| \leqslant l} | D^\alpha_{x,y} u(x, y, t) | \leqslant \| w \|^T_{s,l} (1 + |x| + |y|)^s + \| v \|^T_{s^0,l} (1 + |x|)^s,$$

откуда, учитывая (19) и (24), получаем

$$\| u \|^T_{s^0,l} \leqslant C \| u_0 \|_{s,l^0}. \tag{28}$$

При этом неравенства (25) — (27) дают оценки величины l_1 снизу: $l_1 > l + (r-1)s_0 + nr = l_0(l, s)$. Отметим, что при $r \leqslant 1$ для решения $v(x, t)$ задачи (22) справедлива оценка $\| v(x, t) \|^T_{s_2,l_2} \leqslant C \| \psi \|^T_{s_2,l_2} \leqslant C_1 \| u_0 \|^T_{s,l^0}$, где l^0, s_2, l_2 определяются формулами (18), (20) и (21) и если $l_1 = l$ и $\overline{l} = l + q$, то $l_2 = l$, $s_2 = s^0$; мы вновь приходим к (28) с $l_0(l, s) = l$ (ср. замечание 1).

Отметим также, что при $s_1 = 0$ из (21) получаем $s_2 = s$, а из (25) видно, что можно положить $s^0 = s$ (ср. замечание 2)

Остается доказать единственность полученного решения. Пусть $u_0(x, y) \equiv 0$ и $u(x, y, t)$ — решение задачи (1), (2), $u(x, y, t) \in C^l_s(\mathbb{R}^{n+m}, T)$ при каком-либо $s \geqslant 0$ и достаточно большом $l > 0$. Обозначим $\psi_u(x, t) = Q[u] \in C^{\min(l-q,l_1)}_{s_2}(\mathbb{R}^n, T)$ при некотором $s_2 \geqslant s$ и рассмотрим задачу $\partial v(x, t)/\partial t = P(D_x, 0) v(x, t) + \psi_u(x, t)$, $v(x, 0) = 0$.

Согласно лемме 2 при любом $\overline{l} > 0$, если l и l_1 достаточно велики (при $\deg P(s, 0) > 1$), эта задача имеет решение $v(x, t) \in C^{\overline{l}}_{s_2}(\mathbb{R}^n, T)$. Обозначим $w(x, y, t) \equiv u(x, y, t) - v(x, t)$. Тогда $\partial w/\partial t = P(D_x, D_y) w(x, y, t)$, $w(x, y, 0) \equiv 0$, и поскольку $w(x, y, t)$ имеет рост не выше степенного при $|x| + |y| \to \infty$, то согласно теореме единственности Гельфанда — Шилова [4] $w(x, y, t) \equiv 0$, т. е. $u(x, y, t) \equiv v(x, t)$. Подставляя это в (1), получаем $\partial v(x, t)/\partial t = R(D_x) v(x, t)$, $v(x, 0) \equiv 0$, и, снова используя теорему единственности [4], заключаем, что $v(x, t) \equiv u(x, y, t) \equiv 0$ Теорема доказана.

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Диф. уравнения.— 1983.— 19, № 1.— С. 86—94.
2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для нагруженных линейных дифферен-

циальных уравнений. I. Единственность // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 9.— С. 6—12.
3. *Борок В. М.* О единственности решения задачи Коши для систем линейных нагруженных уравнений // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 108—109.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи мат. наук.— 1953.— 8, № 6.— С. 3—54.

Харьк. ун-т,
Харьк. автомоб.-дор. ин-т

Получено 28.06.85