УДК 517.53

Н. В. Заболоцкий

О росте неванлинновских характеристик мероморфных функций нулевого рода

Будем пользоваться стандартными обозначениями неванлинновской теории распределения значений [1].

Пусть $\tau = \tau(Q)$, $\sigma = \sigma(Q)$ — неотрицательный и неположительный корни уравнения $Qe^u = u + 1$, $u \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant Q \leqslant 1$. В случае $Q = 0$ положим $\tau(0) = \infty$, при $Q = 1$ имеем $\tau(1) = \sigma(1) = 0$.

Рассмотрим при $0 < x < \infty$ функцию $(0 < \rho < 1)$

$$\psi(x; Q) = \frac{x^\rho}{\pi} \int\limits_{\exp(\sigma/\rho)}^{\exp(\tau/\rho)} (\rho \ln s + 1 - Qs^\rho) \frac{x ds}{s^2x^2 + 1}. \tag{1}$$

Легко видеть, что $\psi(x; 1) \equiv 0$. При фиксированном Q, $0 \leqslant Q < 1$, подынтегральное выражение в (1) неотрицательно, поэтому $\psi(x; Q) \geqslant 0$, $0 < x < +\infty$. Учитывая, что $\psi(0; Q) = 0$, $\psi(x; Q) \to 0$ при $x \to +\infty$, обозначим

$$\Psi(Q) = \max\{\psi(x; Q) : 0 < x \leqslant +\infty\}. \tag{2}$$

Пусть $M(\rho(r), K, L)$ — класс мероморфных функций f порядка ρ, $0 < \rho < 1$, с положительными нулями и отрицательными полюсами такими, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r, 0, \infty, f)/r^{\rho(r)} = K$, $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r, 0, \infty, f)/r^{\rho(r)} = L$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок функции f.

Известно ([1, с. 81], теорема 4.2), что $0 < K < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f \in M(\rho(r), K, L)$. Тогда*

$$\underline{\lim\limits_{r\to\infty}} T(r, f)/r^{\rho(r)} \geqslant 0{,}5L \sec(\pi\rho/2), \tag{3}$$

$$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} T(r, f)/r^{\rho(r)} \geqslant 0{,}5L \sec(\pi\rho/2) + K\Psi(L/K), \tag{4}$$

где Ψ определяется формулой (2), и существуют функции $f \in M(\rho(r), K, L)$, для которых в (3) и (4) имеют место знаки равенства.

Оценки сверху типа и нижнего типа для мероморфных функций f порядка ρ, $0 < \rho < 1$, через величины типа и нижнего типа функции $N_0(r, f) = \max\{N(r, 0, f), N(r, \infty, f)\}$ получены в [2]. В случае нулевого порядка мероморфной функции f имеем [3] $T(r, f) = N_0(r, f) + o(r^{\rho(r)})$, $r \to \infty$.

Пусть $\nu(r)$ – считающая функция некоторой последовательности (r_k), $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \to \infty$, $M(\nu(r))$ — подкласс функций f класса $M(\rho(r), K, L)$ таких, что $n(r, 0, \infty, f) = 2\nu(r)$.

При доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция $g \in M(\nu(r))$, $n(r, 0, g) = n(r, \infty, g) = \nu(r)$. Тогда*

$$(\forall r > 0)\,(\forall f \in M(\nu(r)))\,[T(r, g) \leqslant T(r, f)].$$

Заметим, что в [4] доказано следующее утверждение:

$$(\forall r > 0)\,(\forall f \in M(\nu(r)))\,[T(r, h) \geqslant T(r, f)],$$

где h — целая функция, $h \in M(\nu(r))$.

Доказательство леммы. Пусть $P(t, r, \varphi) = \pi^{-1} r \sin\varphi\,(t^2 + r^2 - 2tr\cos\varphi)^{-1}$. Учитывая формулу (4.16) из [1, с. 296], формулу для вычисления характеристики $T(r, f)$ из [5, с. 50–51] и равенство $|g(ir)| = 1$, имеем

$$T(r, g) = \int\limits_0^\infty N(t, 0, \infty, g) P(t, r, \pi/2)\, dt = \int\limits_0^\infty N(t, 0, f) P(t, r, \pi/2) +$$

$$+\int_0^\infty N(t,\infty,f)\,P(t,r,\pi-\pi/2)\,dt \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\left\{\int_0^\infty N(t,0,f)\,P(t,r,\varphi)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty N(t,\infty,f)\,P(t,r,\pi-\varphi)\,dt\right\}=T(r,f).$$

Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что $n(r,0,\infty,f)$ принимает только четные значения (в случае необходимости рассматриваем f^2). Докажем сначала неравенство (3). Пусть $f\in M(\rho(r),K,L)$, $L>0$ (если $L=0$, то неравенство (3) тривиально), функция $g\in M(\rho(r),K,L)$, $N(r,0,g)=N(r,\infty,g)$. Учитывая лемму, имеем $T(r,f)\geqslant T(r,g)$. Не уменьшая общности, будем считать, что для всех $r>0$ выполняется $N(r,0,\infty,g)\geqslant(L-\varepsilon)\,r^{\rho(r)}$, $0<\varepsilon<L$. Имеем

$$T(r,g)=\int_0^\infty N(t,0,\infty,g)\,P(t,r,\pi/2)\,dt\geqslant(L-\varepsilon)\times$$

$$\times\int_0^\infty r^{\rho(t)}P(t,r,\pi/2)\,dt=(1+o(1))\,(L-\varepsilon)\,r^{\rho(r)}\sin(\pi\rho/2)/\sin\pi\rho,\quad r\to\infty.$$

Таким образом,

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/r^{\rho(r)}\geqslant 0{,}5\,(L-\varepsilon)\sec(\pi\rho/2),$$

и, устремив ε к нулю, получим неравенство (3).

Докажем оценку (4). В случае $L=K$ неравенство (4) следует из (3). Пусть $L<K$, $0<\varepsilon<K-L$, $L_1=(L-\varepsilon)^+$, $K_1=K-\varepsilon$, $\rho(r)\equiv\rho$. Не уменьшая общности, будем считать, что $N(\exp t,0,\infty,f)\geqslant L_1\exp(\rho t)$ для $-\infty<t<\infty$ и существует последовательность (t_k), $t_k\to\infty$, $k\to\infty$, такая, что $N(e^{t_k},0,\infty,f)=K_1\exp(\rho t_k)$. Проведем из точки $(t_k,K_1\exp(\rho t_k))$ касательную к графику функции $y=K_1\exp(\rho t)$, $-\infty<t<\infty$. Получим уравнение касательной $y(t)=K_1\exp(\rho t_k)(\rho(t-t_k)+1)$. Абсциссы точек пересечения касательной с графиком функции $y=L_1\exp(\rho t)$ следующие: $t_k+\sigma_1/\rho$, $t_k+\tau_1/\rho$, где $\sigma_1=\sigma(L_1/K_1)$, $\tau_1=\tau(L_1/K_1)$ определены выше. Дальше вместо σ_1, τ_1 будем писать σ, τ.

Учитывая, что функция $N(e^t,0,\infty,f)$ выпуклая относительно t, получаем $(r_k=\exp(\rho t_k))$

$$N(r,0,\infty,f)\geqslant\begin{cases}L_1r^\rho, & 0\leqslant r\leqslant r_ke^{\sigma/\rho},\\ K_1r_k^\rho(\rho\ln r/r_k+1), & r_ke^{\sigma/\rho}\leqslant r\leqslant r_ke^{\tau/\rho},\\ L_1r^\rho, & r_ke^{\tau/\rho}\leqslant r<\infty.\end{cases}$$

Учитывая лемму, можем считать, что $N(r,0,f)=N(r,\infty,f)$. Тогда

$$T(r,f)=\int_0^\infty N(t,0,\infty,f)\,P(t,r,\pi/2)\,dt\geqslant\int_0^{+\infty}L_1t^\rho P\left(t,r,\frac{\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\,dt+\int_{r_k\exp(\sigma/\rho)}^{r_k\exp(\tau/\rho)}\{(K_1\rho\ln(t/r_k)+K_1)\,r_k^\rho-L_1t^\rho\}\,P(t,r,\pi/2)\,dt=$$

$$=0{,}5L_1\sec(\pi\rho/2)\,r^\rho+r_k^\rho\int_{\exp(\sigma/\rho)}^{\exp(\tau/\rho)}(K_1(\rho\ln s+1)-L_1s^\rho)\,P(sr_k,r,\pi/2)\,ds.$$

Пусть $r=r_k/x$, $0<x<\infty$. Тогда $T\left(\frac{r_k}{x},f\right)\geqslant\left(\frac{r_k}{x}\right)^\rho\left\{\frac{L_1}{2}\sec\frac{\pi\rho}{2}+K_1\psi(x;\right.$ $\left.L_1/K_1)\right\}$. Таким образом, имеем $\varlimsup_{r\to\infty}T(r,f)/r^\rho\geqslant 0{,}5L_1\sec(\pi\rho/2)+K_1\Psi\,(L_1/$

$/K_1)$, и, устремляя ε к нулю, получаем соотношение (4) в случае $\rho(r) \equiv \rho$. Переход к общему случаю аналогичен [6].

Построим примеры функций из класса $M(\rho(r), K, L)$, для которых в (3) и (4) имеет место знак равенства.

Пример 1. Пусть $\varphi_1(z)$ — каноническое произведение рода нуль с положительными нулями такими, что $N(r, 0, \varphi_1) = (1 + o(1)) r^{\rho_1(r)}$, где $\rho_1(r)$ — уточненный порядок, $\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho$, $0 < \rho < 1$, $\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{\rho_1(r)-\rho(r)} = 0{,}5K$, $\underline{\lim_{r\to\infty}} r^{\rho_1(r)-\rho(r)} = 0{,}5L$. Для мероморфной функции $\varphi(z) = \varphi_1(z)/\varphi_1(-z) \in M(\rho(r), K, L)$ имеем [1, с. 92—95] $(r\to\infty)$

$$T(r, \varphi) = r^{\rho_1(r)} (\rho_1(r)(\sin \pi\rho_1(r))^{-1} \int_0^{\pi} \max\{\cos\rho_1(r)\varphi, \cos\rho_1(r)(\pi-\varphi)\} d\varphi + o(1)) = (1 + o(1)) r^{\rho_1(r)} \sec(\pi\rho/2).$$

Таким образом, $\underline{\lim_{r\to\infty}} T(r, \varphi)/r^{\rho(r)} = 0{,}5L \sec(\pi\rho/2)$.

Пример 2. Пусть $0 < L < K < \infty$, $0 < \rho < 1$, последовательность (r_k) строго монотонно возрастающая и $r_{k+1}/r_k \to \infty$, $k\to\infty$. Пусть $\varphi_2(z)$ — каноническое произведение рода нуль с положительными нулями такими, что

$$n(r, 0, \varphi_2) = \begin{cases} [(L/2)\rho r^{\rho}], & r_{k-1}e^{\tau/\rho} \leqslant r < r_k e^{\sigma/\rho}, \\ [(K/2)\rho r_k^{\rho}], & r_k e^{\sigma/\rho} \leqslant r < r_k e^{\tau/\rho}. \end{cases}$$

Положим $g(z) = \varphi_2(z)/\varphi_2(-z)$. Имеем $n(r, 0, \infty, g) = 2n(r, 0, \varphi_2)$, откуда $(r\to\infty)$

$$N(r, 0, \infty, g) \sim \begin{cases} Lr^{\rho}, & r_{k-1}e^{\tau/\rho} \leqslant r \leqslant r_k e^{\sigma/\rho}, \\ Kr_k^{\rho}(\rho \ln r/r_k + 1), & r_k e^{\sigma/\rho} \leqslant r \leqslant r_k e^{\sigma/\rho}. \end{cases}$$

Таким образом, $\underline{\lim_{r\to\infty}} N(r, 0, \infty, g)\cdot r^{-\rho} = L$, $\overline{\lim_{r\to\infty}} N(r, 0, \infty, g)\cdot r^{-\rho} = K$, $g \in M(\rho, K, L)$.

Из доказательства теоремы 1 легко видеть, что для функции g в (4) имеет место знак равенства (см. также выкладки в [2]). Теорема 1 полностью доказана.

Пусть f — мероморфная функция нулевого рода с положительными нулями и отрицательными полюсами, $f(z) = \prod_m (1 - z/a_m)/\prod_n (1 + z/b_n)$; $F(z) = f(z) \prod_k (1 - z^2/b_{n_k})$, где $\{b_{n_k}\}$ — подмножество множества $\{b_n\}$. Развивая идею доказательства леммы, для класса функций $M(\nu(r))$ докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $E = \{r : |f(ir)| \geqslant 1\}$. *Тогда* $(\forall r \in E)$ $[T(r, f) \leqslant T(r, F)]$.

Доказательство. Очевидно, что $|f(re^{i\varphi})|$ — возрастающая функция от φ на $[0, \pi]$. Пусть $r \in E$ и $|f(r)| \geqslant 1$. Тогда $m(r, 1/f) = 0$ и $T(r, f) = N(r, 0, f) \leqslant N(r, 0, F) \leqslant T(r, F)$. Если $r \in E$, $|f(r)| < 1$ и $\beta = \beta(r)$ такое, что $|f(re^{i\beta})| = 1$, тогда $0 < \beta \leqslant \pi/2$. Учитывая соотношение $P(t, r, \beta) \geqslant P(t, r, \pi - \beta)$ для $0 < \beta \leqslant \pi/2$, $N(t, 0, f) \leqslant N(r, 0, F)$, $N(r, 0, \infty, f) = N(r, 0, \infty, F)$, формулу (4.16) из [1, с. 296], формулу для вычисления характеристики $T(r, f)$ из [5, с. 50—51], получаем

$$T(r, f) = \int_0^{+\infty} N(t, 0, \infty, f) P(t, r, \beta)\, dt + \int_0^{+\infty} N(t, 0, f) [P(t, r, \beta) - P(t, r, \pi-\beta)]\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} N(t, 0, \infty, F) P(t, r, \beta)\, dt + \int_0^{+\infty} N(t, 0, F) \times$$

$$\times [P(t,r,\beta) - P(t,r,\pi-\beta)]\,dt \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\left\{\int_0^{+\infty} N(t,0,F)\,P(t,r,\varphi)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} N(t,\infty,F)\,P(t,r,\pi-\varphi)\,dt\right\} = T(r,F).$$

Следствие. *Пусть* $n(r,0,f) \geqslant n(r,\infty,f)$ $\forall r>0$. *Тогда* $(\forall r>0)$ $[T(r,f)\leqslant T(r,F)]$.

Доказательство. Имеем $f(z)=\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$, где $f_j(z)=(1-z/a_j)/$ $/(1+z/b_j)$, или $f_j(z)=(1-z/a_j)$ для $j\geqslant n+1$, если число полюсов функции f равно $n<\infty$.

Из условия $n(r,0,f)\geqslant n(r,\infty,f)$ следует, что $(\forall j>0)$ $[a_j\leqslant b_j]$. Тогда при $r>0$ $|f_j(ir)|=|1-ir/a_j|/|1+ir/b_j|\geqslant 1$. Если число полюсов конечно, то при $r>0$ имеем $|f_j(ir)|=|1-ir/a_j|\geqslant 1$, $j\geqslant n+1$. Таким образом, $|f(ir)|\geqslant 1$ для всех $r>0$ и, учитывая теорему 2, получаем утверждение следствия.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфных функций нулевого рода // Укр. мат. журн.— 1980.— **33**, № 6.— С. 805—810.
3. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 227—236.
4. *Hellerstein S., Williamson J.* Entire functions with negative zeros and a problem of R. Nevanlinna // J. anal. math.— 1969.— **22**.— P. 233—267.
5. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик δ-субгармонических функций порядка <1 // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1983.— Вып. 39.— С. 49—56.
6. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Лит. мат. сб.— 1967.— **7**, № 1.— С. 79—117.

Львов. ун-т

Получено 14.06.85,
после доработки — 05.12.85

УДК 517.5

Н. В. Зорий

Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними

1. Пусть $\mathbb{R}^p$, $p\geqslant 3$, — евклидово пространство размерности p, а $\overline{\mathbb{R}^p}$ — его одноточечная компактификация ($\overline{\mathbb{R}^p}=\mathbb{R}^p\cup\{\infty\}$) с обычной топологией, определенной с помощью стереографической проекции. Для области $B\subset\overline{\mathbb{R}^p}$ и множества Q через $\mathrm{Cl}_B Q$, $\mathrm{Int}_B Q$, $\partial_B Q$ обозначим соответственно замыкание, внутренность и границу Q относительно B. Положим также $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^p} Q=\overline{Q}$, $\partial_{\mathbb{R}^p} Q=\partial Q$, $\mathrm{Cl}_{\overline{\mathbb{R}^p}} Q=\overline{\overline{Q}}$, $\partial_{\overline{\mathbb{R}^p}} Q=\overline{\partial Q}$.

Пусть Ω — либо $\mathbb{R}^p$, либо $\overline{\mathbb{R}^p}$, а $E^+, E^-\subset\Omega$ — непустые, замкнутые относительно Ω множества, удовлетворяющие условию $\overline{E^+}\cap\overline{E^-}=\varnothing$. Тройку $E=(E^+,E^-;\Omega)$ назовем конденсатором (в Ω), а множество $Z_E=\Omega\setminus(E^+\cup E^-)$ — его зазором. Для E рассмотрим семейство $\mathscr{L}(E)$ всех функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$, которые непрерывны в Ω, абсолютно непрерывны на линиях в $\mathbb{R}^p$ [1] и принимают значения 1 и 0 соответственно на E^+ и E^-.