УДК 512.552.12

Б. В. Забавский

О некоммутативных кольцах элементарных делителей

Кольца элементарных делителей изучались многими авторами [1, 2]. Однако строение этих колец в некоммутативном случае изучено мало. В данной работе получено описание одного класса некоммутативных областей элементарных деталей. Известно, что класс областей элементарных делителей содержится в классе областей Безу [1]. Поэтому, если не оговорено противное, под кольцом будем подразумевать область Безу с единицей, т. е. область, в которой любой конечнопорожденный односторонний идеал является главным односторонним идеалом. При этом ограничимся областями Безу, которые не являются областями главных идеалов, а также исключим области Безу, в которых не существует атомов. Все необходимые определения и факты содержатся в работах [1 — 4].

1. Максимально неглавные идеалы. Коэн [5] доказал, что любой идеал коммутативного кольца, максимальный в множестве неглавных идеалов, является простым идеалом. Точно так же, как и в работе [5], в некоммутативном случае доказывается такой результат.

Предложение 1. *Любой правый (левый) неглавный идеал кольца R содержится хотя бы в одном правом (левом) идеале, который является максимальным в множестве правых (левых) неглавных идеалов.*

Определение 1. *Правый (левый) идеал кольца R, являющийся максимальным во множестве правых (левых) неглавных идеалов, назовем максимально неглавным правым (левым) идеалом.*

Определение 2. *Двусторонний идеал кольца R, являющийся максимально неглавным как правым, так и левым идеалом, назовем максимально неглавным идеалом.*

Определение 3. *Двухсторонний идеал P кольца R назовем вполне простым, если фактор-кольцо R/P является областью целостности.*

Теорема 1. *Если максимально неглавный правый идеал кольца R является двусторонним, то он вполне прост.*

Доказательство. Пусть N — максимально неглавный правый идеал R, который является двусторонним. Если R/N не является областью целостности, то найдутся такие $a \in R \setminus N$, $b \in R \setminus N$, что $ab \in N$. Поэтому правый идеал $J = \{x/x \in R,\ ax \in N\}$ содержит идеал N и элемент b. Тем самым включение $N \subset J$ строгое и в силу предположения относительно N правый идеал J является главным. Пусть $J = cR$. Поскольку $a \notin N$, то аналогично $N + aR = dR$, где $d \in R \setminus N$. Теперь для некоторых $n \in N$ и $r \in R$ имеем равенство $d = n + ar$. Так как $N \subset dR$, то любой элемент $m \in N$ можно представить в виде $m = ds$, где $s \in R$. Учитывая это, получаем $m = ds = (n + ar)\,s = ns + ars$. Отсюда следует, что $a\,(r \cdot s) = m - ns \in N$, т. е. $rs \in J$. Таким образом, $rs = ct$ при некотором $t \in R$ и тем самым $m = ns + act$. Мы показали, что $N \subseteq nR + acR$. Но $n \in N$ и $ac \in N$, значит, $nR + acR \subseteq N$. Следовательно, $N = nR + acR$ — конечнопорожденный правый идеал. Так как кольцо R — область Безу, то N — главный правый идеал, что противоречит выбору идеала N. Теорема доказана.

Определение 4. *Элемент кольца называется атомом, если он необратим и не представим в виде произведения двух необратимых элементов. Элемент a кольца R, $a \neq 0$, называется факториальным, если он необратим и представляется в виде $a = b_1 b_2 \ldots b_n$, где b_i — атом. Если $a = c_1 c_2 \ldots c_m$, где элементы c_j — атомы, то $m = n$ и элементы b_i и c_j подобны при некотором, определенным образом установленном однозначном соответствии между ними.*

Теорема 2. *Пусть a — необратимый элемент кольца R, который не содержится ни в одном максимально неглавном правом и левом идеале. Тогда a — факториальный элемент R.*

Доказательство. Понятно, что правый модуль R/aR ненулевой и каждый его подмодуль циклический. Поэтому объединение любой возрастающей цепи собственных подмодулей в R/aR является циклическим модулем, а поэтому всякая такая цепь обрывается. Значит, модуль R/aR нетеров. Аналогично, R/Ra — также нетеровый модуль. Докажем, что модуль R/aR вместе с тем и артинов. Пусть $m_1R \supseteq m_2R \supseteq \ldots \supseteq \supseteq m_sR$ — произвольная убывающая цепь подмодулей модуля R/aR. По второй теореме Эми Нетер об изоморфизме, этой цепи соответствует цепь правых идеалов $R \supset a_1R \supset a_2R \supset \ldots \supset a_sR \supset \ldots$, где $a_iR \supset aR$ и $aR/a_{i+1}R = R/m_iR$ при любом $i = 1, 2, \ldots$. Учитывая последнее, видим, что $a = a_ib_i$, $i = 1, 2, \ldots$, для некоторой последовательности элементов $b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку $a_{i+1}b_{i+1} = a_ib_i$ и $a_{i+1} = a_ic_i$, где $c_i \in R$, то $a_i(c_ib_{i+1} - b_i) = 0$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Но $a_i \neq 0$ и тем самым $b_i = c_ib_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Мы получим возрастающую цепь левых идеалов $Rb_1 \subset Rb_2 \subset \ldots \subset Rb_s \subset \ldots$, каждый из которых содержит Ra. Благодаря этому, мы имеем возрастающую цепь подмодулей модуля R/Ra, $Rb_1/Ra \subset Rb_2/Ra \subset \ldots \subset Rb_s/Ra$ — она обрывается на некотором шаге, например p. Поэтому $Rb_p = Rb_{p+1}$. Поскольку $a = a_ib_i$, то $a_pR = a_{p+1}R = \ldots$. Тем самым, доказано, что $m_pR = m_{p+1}R = \ldots$. Это доказывает артиновость модуля R/aR. Мы доказали, что модуль R/aR обладает композиционным рядом. Следовательно, элемент a можно представить в виде произведения конечного числа атомов, причем однозначно. Теорема доказана.

Легко убедиться, что справедливо такое утверждение.

Предложение 2. *Элемент a кольца R является атомом тогда и только тогда, когда идеал aR (Ra) является максимальным правым (левым) идеалом.*

Из предложения 2 и теоремы 1 следуют такие теоремы.

Теорема 3. *Любой факториальный элемент кольца R не содержится ни в каком максимально неглавном идеале.*

Теорема 4. *Пусть R — кольцо, в котором каждый правый максимальный идеал является главным правым идеалом. Если для любого атома $m \in R$ выполняется условие $\bigcap_{k=1}^{\infty} m^kR = 0$, то в R не существует максимально неглавных идеалов.*

Доказательство. Пусть N — произвольный максимально неглавный идеал R. Тогда существует такой атом $p \in R$, что $N \subset pR$. Понятно, что $p \notin N$. Если теперь $ps_1 \in N$, то в силу теоремы 1 $s_1 \in N$. Таким образом, для любого ненулевого $a \in N$ имеем последовательность $a = ps_1$ $s_1 \in N$; $s_1 = ps_2$, $s_2 \in N$. Тем самым $a = ps_1 = p^2s_2 = p^3s_3 = \ldots$. Поэтому $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} p^kR$. Отсюда следует $a = 0$. Значит, $N = 0$ — главный идеал, что противоречит выбору идеала N.

Предложение 3. *Пусть R — кольцо с единственным максимально неглавным идеалом N и других односторонних максимально неглавных идеалов в R не существует. Тогда N совпадает с множеством всех нефакториальных необратимых элементов кольца. Фактор-кольцо R/N является областью главных односторонних идеалов.*

Доказательство предложения 3 очевидно в силу теорем 1, 3.

Предложение 4. *Пусть R — кольцо, удовлетворяющее условию предложения 3. Тогда все необратимые односторонние делители любого факториального элемента сами являются факториальными.*

Предложение 5. *Если кольцо R удовлетворяет условиям предложения 3, то для любых элементов a, $b \in R$ из того, что $a \in N$, $b \notin N$, следует, что $a + b$ — факториальный элемент R.*

Определение 5. *Назовем надграницей одностороннего идеала произвольного кольца двусторонний идеал, равный пересечению всех двусторонних идеалов, которые содержат его.*

В приведенных ниже очевидных утверждениях кольца не предполагается областью Безу.

Предложение 6. *Для любого элемента a кольца R надграницы левого и правого главных идеалов, порожденных элементом a, совпадают.*

Предложение 7. *Если $a = bcdR$, то надграница правого идеала aR содержится в надгранице правого идеала cR.*

Предложение 8. *Каждый собственный правый (левый) идеал имеет собственную надграницу тогда и только тогда, когда каждый максимальный правый (левый) идеал кольца является двусторонним.*

Для произвольного одностороннего идеала $\mathcal{J}$ обозначим через $\mathcal{J}_*$ его надграницу. Если для элемента a кольца R надграница является главным двусторонним идеалом, то тогда образующую $(aR)_*$ обозначим через a_*.

Определение 6. *Элемент $a \neq 0$ кольца R называется инвариантным, если $aR = Ra$. Множество всех инвариантов элементов R обозначим через $\mathcal{J}(R)$.*

Предложение 9. *Пусть R — кольцо, в котором всякий односторонний идеал, порожденный любым нефакториальным элементом, имеет главную собственную надграницу. Тогда любой ненулевой нефакториальный элемент $a \in R$ представляется в виде $a = bc$, где $b \in \mathcal{J}(R)$, c — факториальный или обратимый элемент кольца.*

Доказательство. Очевидно, что $a = a_* c$, где $a_* \in \mathcal{J}(R)$. В силу определения двустороннего идеала $a_* R$ правый идеал cR не имеет главной собственной надграницы. Тогда c — факториальный или обратимый элемент кольца.

2. Кольца элементарных делителей. Везде в этом пункте R — область Безу, удовлетворяющая условиям предложения 3, в которой всякий нефакториальный элемент имеет главную собственную надграницу, т. е. собственный главный двусторонний идеал. Напомним, что элемент a называется полным делителем элемента $b \neq 0$, если $RbR \subseteq Ra \cap aR$. Матрицы A и B над R называются эквивалентными, если существуют такие обратимые матрицы P и Q, что $A = PBQ$. Будем говорить, что матрица A обладает диагональной редукцией, если для A существует эквивалентная ей диагональная матрица, в которой всякий элемент является полным делителем последующего элемента. Кольцо R называется кольцом элементарных делителей, если любая матрица над R обладает диагональной редукцией.

Обозначим через A_* надграницу правого идеала, порожденного всеми элементами матрицы A.

Теорема 5. *Если A и B-эквивалентные матрицы над R, все элементы которых нефакториальны, то $A_* = B_*$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему для матриц $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & 0 \\ k & l \end{pmatrix} \in R_2$. Так как $B = PAQ$, то $d = u_1 a v_1 + r_1 b t_1 + s_1 c p_1$, $k = u_2 a v_2 + r_2 b t_2 + s_2 c p_2$, $l = u_3 a v_3 + r_3 b t_3 + s_3 c p_3$. На основании предложения 7 имеем $d_* R \subseteq a_* R + b_* R + c_* R$, $k_* R \subseteq a_* R + b_* R + c_* R$, $l_* R \subseteq a_* R + b_* R + c_* R$, а значит, $d_* R + k_* R + l_* R \subseteq a_* R + b_* R + c_* R$. Так как матрицы P и Q обратимые, то, аналогично, $a_* R + b_* R + c_* R \subseteq d_* R + k_* R + l_* R$. Отсюда $a_* R + b_* R + c_* R = k_* R + l_* R + d_* R$.

Теорема 6. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица над областью R. Если хотя бы один элемент матрицы A является факториальным, то существует матрица B, эквивалентная матрице A, причем* $B = \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, *где f — факториальный элемент, который является полным делителем всех элементов матрицы C.*

Доказательство. Перестановкой столбцов и строк перенесем на место (1,1) данный факториальный элемент. Заменяем элемент последовательно на наибольший общий левый делитель (н. о. л. д.) элементов a_{11} и a_{12}, затем на н. о. л. д. нового элемента a_{11} и элемента a_{13} и т. д. Учитывая предложение 4, эти новые элементы будут факториальными элементами, причем их длина (т. е. число атомных делителей) уменьшается. Аналогично делаем преобразования над первым столбцом полученной матрицы; при этом первая строка новой матрицы может снова стать ненулевой, но последнее обстоятельство возможно лишь тогда, когда длина элемента a_{11} уменьшается. Используя индукцию по длине элемента a_{11}, проводим A к виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Используя операции прибавления к столбцу (строке) правого (левого) кратного другого столбца (строки), снова заменой элемента a_{11} последовательно на н. о. л. д. (н. о. п. д.) элемента a_{11} и образованного элемента, будем уменьшать длину элемента a_{11}. Этот процесс будет продолжаться, очевидно, до тех пор, пока на место (1,1) не станет нужный нам элемент. Для завершения доказательства заметим, что все эти операции над матрицей A соответствуют умножению матрицы справа и слева на некоторые обратимые матрицы.

В дальнейшем нам понадобится такой результат.

Предложение 10. *Пусть a — любой инвариантный элемент области R и P — любая обратимая матрица. Тогда существует обратимая матрица Q такая, что $Q\,\mathrm{diag}\,(a, \dots, a) = \mathrm{diag}\,(a, \dots, a)\,P$.*

Теорема 7. *Пусть R — область Безу, в которой для любого конечного множества нефакториальных элементов a_i, $i = 1, 2, \dots,$ существует такой инвариантный элемент a, что $a_i = af_i$, где f_i — факториальный элемент. Тогда R является областью элементарных делителей.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$-матрица над R. Учитывая теорему 6, достаточно доказать теорему, когда все элементы A нефакториальны. В силу определения области R существует инвариантный элемент a такой, что $a_{ij} = af_{ij}$, где f_{ij} — факториальные элементы R. Учитывая это, мы можем матрицу A представить в виде $A = B \cdot C$, где $B = \mathrm{diag}\,(a, \dots, a)$, $C = (f_{ij})$. Применяя индукцию по числу $\max(m, n)$, убеждаемся, что матрица C, а значит, и матрица A обладают в силу теоремы 6 диагональной редукцией.

Пусть a — любой инвариантный элемент кольца R и S — множество всех двусторонних идеалов, которые содержатся строго в идеале aR. Очевидно, что S — индуктивное множество, относительно порядка включения идеалов. На основании леммы Цорна справедлив такой результат.

Предложение 11. *Любой элемент множества S содержится в некотором максимальном в S двустороннем идеале.*

Определение 7. *Назовем максимальный в S двусторонний идеал кольца R максимальной компонентой элемента a.*

Теорема 8. *Если для любого необратимого инвариантного элемента кольца R число максимальных компонент конечно, то R — кольцо элементарных делителей.*

Доказательство. Учитывая [5], достаточно доказать теорему для верхних треугольных матриц. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная верхняя треугольная $(m \times n)$-матрица, все элементы которой нефакториальны, и $A_* = aR$. Обозначим через $M\,(a_{11})$ множество максимальных компонент элемента a, которые содержат надграницу элемента a_{11}. Если $M\,(a_{11}) = \varnothing$, то $a_{ij} = aa'_{ij}$ для любых i, j, где на основании предложения 9 a'_{11} — факториальный элемент. Тогда матрицу A можно представить в виде $A = B \cdot C$, где $B = \mathrm{diag}\,(a, a, \dots, a)$, $C = (a'_{ij})$. На основании теорем 6, 7, используя индукцию по $\max(m, n)$, докажем, что матрица C, а значит, и матрица A обладают диагональной редукцией. Пусть $M\,(a_{11}) \neq \varnothing$ и M_1 — первый элемент множества $M\,(a_{11})$. Легко заметить, что в первом столбце матрицы A существует хотя бы один элемент a_{i1}, надграница которого не принадлежит M_1, так как надграницы всех элементов матрицы A не могут одновременно принадлежать M_1. Рассмотрим идеалы $Ra_{11} +$

$+ Ra_{i1} = Rd_{i1}$. Очевидно, что $d_{i1} \notin M_1$. Заменяя элемент a_{11} последовательно на н. о. п. д. элементов a_{11} и a_{21}, затем на н. о. п. д. нового элемента a_{11} и a_{31} и т. д., преобразуем матрицу A к новой матрице, для которой $d_{i1} = 0$, $i \neq 1$, $(d_{11})_* \notin M_1$. Продолжая этот процесс, через конечное количество шагов получаем эквивалентную A матрицу $B = (b_{ij})$, для которой $M(b_{11}) = 0$.

Легко убедиться, что матрица B, а значит, и матрица A обладают диагональной редукцией. Если в матрице A хотя бы один элемент является факториальным, то на основании теорем 6, 7, используя индукцию по $\max(m, n)$, легко доказать, что матрица A обладает диагональной редукцией.

3. Примеры областей Безу. Пусть K — область главных идеалов с единицей, а F — двустороннее тело отношений области K. Рассмотрим в кольце формальных степенных рядов с коммутирующей переменной x над телом F подкольцо R, которое содержит все ряды со свободным членом из K. Аналогично коммутативному случаю [4], можно убедиться, что R — область Безу с единственным максимально неглавным идеалом и других максимально неглавных односторонних идеалов в R не существует. Примером кольца, удовлетворяющего условиям теорем, может служить так построенное кольцо формальных степенных рядов, где K — подкольцо гамильтоновой алгебры кватернионов, состоящее из элементов вида $1 \cdot a_0 + i \cdot a_1 + j \cdot a_2 + k \cdot a_3$, где все коэфициенты a либо целые числа, либо половины нечетных целых чисел.

1. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— **66**.— P. 464—491.
2. *Larsen M.*, *Lewis W.*, *Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Ibid.— 1974.— **187**.— P. 231—248.
3. *Кон П.* Свободные кольца и их связи.— М. : Мир, 1975.— 422 с.
4. *Забавский Б. В.* О максимальных элементах множества неглавных идеалов коммутативной области Безу // XVII Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ.—Минск: Ин-т математики БССР.— 1983.— Ч. 2.— С. 75.
5. Cohen I. Rings with restricted minimum condition // Duke Math. J.— 1950.— **17**.— P. 27—42.
6. *Казімірський П. С.*, *Драгомижська М. М.* Зауваження по теорії скінченопороджених правих головних ідеалів // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 5.— С. 667—673.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 28.06.85