УДК 517.5

Хоанг Ван Лай

Применение сплайнов в приближенном нахождении классического решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

В данной статье рассматривается процесс приближенного нахождения классического решения (к. р.) задачи Коши

$$u_t(x, t) + a(u)\, u_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t = 0, \tag{2}$$

с помощью кубических сплайнов. Здесь $u(x, t)$ — искомая функция, $a(u)$, $u_0(x)$ — заданные функции.

Проблема существования к. р. задачи (1), (2) изучена во многих работах (см., например, [1, 2]). Было доказано, что если $a(u)$ и $u_0(x)$ являются гладкими функциями, то при малых t к. р. задачи (1), (2) определяется формулой [1]

$$u(x, t) = u_0(x - ta(u)), \tag{3}$$

т. е. с помощью неявных функций вида (3) можно построить к. р. для значений t, при которых такое решение существует.

С другой стороны, известно, что сплайны являются эффективным средством для приближенного представления функций (см., например, [3 — 9]). Следовательно, с помощью неявных функций и сплайнов можно приближенно построить к. р. задачи (1), (2).

1. Кубические сплайны для функций, заданных на всей оси. Будем применять метод сплайн-функции для приближенного нахождения к. р. $u(x, t)$ задачи (1), (2). Так как при фиксированном t функция $u(x, t) = u(x)$ определена для всех x, $-\infty < x < \infty$, то сплайн нужно строить на всей оси [3, с. 119]. Для дальнейшего применения нам удобно изучать такие сплайны в некоторых функциональных пространствах. Именно, обозначим через $\mathbb{C}^{(k)}_{(-\infty,\infty)} \equiv \mathbb{C}^{(k)}$ пространство ограниченных и непрерывных на всей оси функций $f(x)$, имеющих ограниченные и непрерывные производные до k-го порядка включительно.

Пусть теперь $f(x) \in \mathbb{C}^{(0)}$. Разобьем ось $(-\infty, \infty)$ на малые части равномерной сеткой Δ_h шага h:

$$\Delta_h = \{\ldots, x_{-j-1}, x_{-j}, x_{-j+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots\}, \tag{4}$$

где x_0 — некоторая точка на оси, $x_j = x_{j-1} + h$. Назовем кубическим сплайном, интерполирующим функцию $f(x)$ на сетке Δ_h, функцию $s(x) \equiv s(x, f, \Delta_h)$, обладающую следующими свойствами (см. [3, с. 119]:

1) $s(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
2) на каждом отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ $s(x)$ является многочленом третьей степени;
3) $s(x) \in \mathbb{C}^{(2)}$.

Сплайн $s(x, f, \Delta_h)$, интерполирующий функцию $f(x) \in \mathbb{C}^{(0)}$, обладает многими свойствами, которыми обладают кубические сплайны, интерполирующие периодические функции (см., например, [3, 8, 9]). В частности, справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Существует единственный сплайн $s(x, f, \Delta_h)$, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ_h.*

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}$. Тогда справедливы оценки*

$$|f^{(l)}(x) - s^{(l)}(x)| \leqslant c_l h^{1-l} \omega(f', h), \quad l = 0, 1, \tag{5}$$

где $c_0 \leqslant 21/4$, $c_1 \leqslant 21/2$, $\omega(f', h) \equiv \sup\limits_{x,\delta,|\delta| \leqslant h} |f'(x + \delta) - f'(x)|$.

Леммы 1 и 2 легко доказать с помощью следующего представления сплайна $s(x)$ при $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ (см. [6, с. 15]):

$$s(x) = m_{j-1} \frac{(x_j - x)^2 (x - x_{j-1})}{h^2} - m_j \frac{(x - x_{j-1})^2 (x_j - x)}{h^2} +$$

$$+ f(x_{j-1}) \frac{(x_j - x)^2 [2(x - x_{j-1}) + h]}{h^3} + f(x_j) \frac{(x - x_{j-1})^2 [2(x_j - x) + h]}{h^3}, \quad (6)$$

где $m_j \equiv s'(x_j)$. При этом справедлива оценка

$$\sup_{j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} |m_j| \leqslant \sup_{j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \left| 3 \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2h} \right|. \quad (7)$$

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем через c_i будем обозначать некоторые положительные константы. Нахождение точных значений этих констант затруднено (см. [4]). В данной статье для них будем получать только верхние (вообще говоря, неточные) оценки. Для c_0 и c_1 в [7] установлены оценки $c_0 \leqslant 9/8$, $c_1 \leqslant 4$.

2. Алгоритм приближенного нахождения классического решения задачи (1), (2) с помощью сплайнов. 2.1. Из результатов [1, 2] следует, что к. р. $u(x, t)$ задачи (1), (2) может быть определено следующим образом:

1) положим $u_{i-1}(x) \equiv u(x, T_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, T_0 = 0$, и определим числа K_{i-1} по формуле $K_{i-1} = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |u'_{i-1}(x)|$;

2) определим числа T_i следующим образом:

$$T_i = T_{i-1} + \frac{1}{\beta_i K_{i-1} K}, \quad (8)$$

где

$$K \equiv \max_{u_{\min} \leqslant \xi \leqslant u_{\max}} |a'(\xi)|, \quad u_{\min} \equiv \inf_{-\infty < x < \infty} u_0(x), \quad u_{\max} \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} u_0(x), \quad (9)$$

β_i — произвольное число, больше единицы;

3) при $T_{i-1} \leqslant t \leqslant T_i$ определим $u(x, t)$ по формуле

$$u(x, t) = u_{i-1}(x - (t - T_{i-1})\, a(u(x, t))). \quad (10)$$

С помощью формул дифференцирования неявных функций в [1] можно доказать, что определенная в (10) функция $u(x, t)$ действительно является к. р. задачи (1), (2) для всех t из отрезка $[0, T_i]$. Заметим, что T_i в (8) зависит от β_i. Следовательно, отрезок $[0, T_i]$, где определено к. р. $u(x, t)$, зависит от набора чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$. С помощью приема, изложенного в [2, с. 72], можно доказать, что если к. р. задачи (1), (2) существует, то оно является единственным. Поэтому если удастся выбрать такую последовательность $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$, чтобы $T_i \to \infty$ при $i \to \infty$, то получим к. р. для всех t. Такая возможность существует в случае, когда

$$u_0'(x) \geqslant 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad a'(\xi) > 0. \quad (11)$$

Действительно, в этом случае (см. [1]) справедливы неравенства $K_{i-1} \leqslant K_{i-2} \leqslant \ldots \leqslant K_0$. Следовательно, при $\beta_i = \beta > 1$ имеем $T_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

2.2. Опишем теперь алгоритм приближенного нахождения к. р. $u(x, t)$ задачи (1), (2) с помощью сплайнов. Для этого заметим сначала, что на отрезке $[T_{i-1}, T_i]$ к. р. $u(x, t)$ полностью определяется функцией $u_{i-1}(x)$. Далее допустим, что известны значения $u_{i-1}(x)$ в узлах сетки Δ_h. Тогда в (10) вместо функции $u_{i-1}(x)$ можно использовать ее сплайн $s_{i-1}(x)$ и алгоритм определения приближенного решения можно осуществить следующим образом.

1. Построим сплайн $\tilde{s}_{i-1}(x)$, интерполирующий значения $\tilde{v}_{i-1,j}$, $\tilde{v}_{0,j} = u_0(x_j)$. Знак $\sim$ здесь означает, что $\tilde{s}_{i-1}(x)$ является сплайном, интерполирующим приближенные значения функции $u_{i-1}(x)$ на сетке Δ_h.

2. Определим числа $\tilde{K}_{i-1}$, $\tilde{T}_i$ по формулам

$$\tilde{K}_{i-1} = \sup_{-\infty<x<\infty} |\tilde{s}'_{i-1}(x)| + \gamma_1, \quad \tilde{T}_i = \tilde{T}_{i-1} + \tau_i, \tag{12}$$

$$\tau_i = \frac{1}{\beta_i \tilde{K}_{i-1} \tilde{K}}, \quad \tilde{T}_0 = 0, \quad \tilde{K} = \max_{u_{\min}-\gamma_2 \leqslant \xi \leqslant u_{\max}+\gamma_2} |a'(\xi)|. \tag{13}$$

Здесь $u_{\min}$, $u_{\max}$ определены в (9), $\beta_i > 1$, γ_1 и γ_2 — некоторые положительные числа; выбираем их так, чтобы

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) \right| \leqslant \tilde{K}_{i-1}, \quad |a'(\tilde{s}_i(x))| \leqslant \tilde{K}, \tag{14}$$

для всех рассмотренных в дальнейшем i. Ниже будут даны оценки для γ_1 и γ_2. В случае, когда выполнены условия (11), можно взять $\tilde{K}_{i-1} = K_0$.

3. Определим $\tilde{v}_{i,j}$, приближенные значения для $u(x_j, \tilde{T}_i)$ из уравнений

$$\tilde{v}_{i,j} = \tilde{s}_{i-1}(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j})), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{15}$$

При условии (13) для каждого j уравнение (15) имеет одно единственное решение.

Из (15) видно, что предложенный здесь алгоритм является явным. В этом алгоритме h — постоянный пространственный шаг, а τ_i — переменный временной шаг.

2.3. Рассмотрим вопрос о точности полученного приближения $\tilde{s}_i(x)$. Так как алгоритм определения $\tilde{s}_i(x)$ в п. 2.2 является явным, то для сходимости алгоритма временной шаг τ_i должен быть достаточно малым по сравнению с пространственным шагом h. Именно, в (13) положим

$$\beta_i = \max\left\{M, \frac{ML}{h\tilde{K}_{i-1}\tilde{K}}\right\}, \quad L \equiv \max_{u_{\min}-\gamma_2 \leqslant \xi \leqslant u_{\max}+\gamma_2} |a(\xi)|, \tag{16}$$

где M — некоторое натуральное число, $M > 1$. Пусть, далее,

$$\gamma_1 \geqslant c_1 \left(1 + \frac{12e^{\gamma_3}}{\gamma_3 + 1}\right)\delta, \tag{17}$$

$$\gamma_2 \geqslant \left(c_0 + \frac{12c_1 e^{\gamma_3}}{\gamma_3 + 1}\right)\varepsilon, \tag{18}$$

где

$$\gamma_3 \equiv 133/3, \quad \delta \equiv \max_{i=1,2,\ldots,M} \delta_i, \quad \delta_i \equiv \omega\left(\frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_i), h\right), \quad \varepsilon \equiv \delta h. \tag{19}$$

Теперь оценим разность $u(x, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x)$ для $i = 0, 1, \ldots, M-1$. Оценим сначала эту разность в узлах сетки Δ_h.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия* (16)—(18). *Тогда при* $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, M-1$ *справедлива оценка*

$$|u(x_j, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x_j)| \leqslant \varepsilon \frac{c_1 e^{\gamma_3}}{\gamma_3 + 1}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{20}$$

где ε *определено в* (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g_{i,j} = u(x_j, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x_j) = u(x_j, \tilde{T}_i) - \tilde{v}_{i,j}$. Пусть для $g_{i,j}$ справедлива оценка $|g_{i,j}| \leqslant \varepsilon_i$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ При $i=0$ имеем $\varepsilon_0 = 0$. Установим теперь следующие соотношения:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) \right| \leqslant \tilde{K}_{i-1}, \tag{21}$$

$$\varepsilon_i \leqslant \varepsilon (q^i - 1) \frac{c_1}{\gamma_3 + 1}, \quad q \equiv \frac{M + \gamma_3}{M - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, M-1, \tag{22}$$

где $\tilde{K}_{i-1}$ определено в (12). Из (10), (12), (13) и (21) следует $u(x, \tilde{T}_i) = u(x - \tau_i a(u(x, \tilde{T}_i)), \tilde{T}_{i-1})$, τ_i определено в (13). Таким образом, имеем

$$|g_{i,j}| \leqslant R_{1,i} + R_{2,i} + R_{3,i}, \tag{23}$$

где

$$R_{1,i} \equiv |u(x_j - \tau_i a(u(x, \tilde{T}_i)), \ \tilde{T}_{i-1}) - u(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}), \tilde{T}_{i-1})|,$$

$$R_{2,i} \equiv |u(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}), \tilde{T}_{i-1}) - s_{i-1}(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}))|,$$

$$R_{3,i} \equiv |s_{i-1}(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j})) - \tilde{s}_{i-1}(x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}))|,$$

$s_{i-1}(x)$ — кубический сплайн, интерполирующий точные значения $u(x, \tilde{T}_{i-1})$ на сетке Δ_h.

Теперь индукцией по i докажем (21), (22).

При $i = 1$ из (5) следует

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |u_0'(x)| \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} |u_0'(x) - s_0'(x)| + \sup_{-\infty<x<\infty} |s_0'(x)| =$$

$$= \sup_{-\infty<x<\infty} |u_0'(x) - \tilde{s}_0(x)| + \sup_{-\infty<x<\infty} |\tilde{s}_0'(x)| \leqslant c_1\omega(u_0', h) + \sup_{-\infty<x<\infty} |\tilde{s}_0'(x)| \leqslant \tilde{K}_0.$$

Далее, имеем

$$R_{1,1} \leqslant |u_0'(\xi)\, a'(\eta)\| \tau_i \| u(x_j, \tilde{T}_1) - \tilde{v}_{1,j}| \leqslant \frac{1}{\beta_1} |u(x_j, \tilde{T}_1) - \tilde{v}_{1,j}| \leqslant \frac{1}{M}\varepsilon_1. \tag{24}$$

Оценим $R_{2,1}$. Так как $u_0(x_j) = s_0(x_j)$, то

$$R_{2,1} = \left| \int_{\tilde{x}_j}^{x_j} u_0'(\xi)\, d\xi - \int_{\tilde{x}_j}^{x_j} s_0'(\xi)\, d\xi \right|, \quad \tilde{x}_j \equiv x_j - \tau_1 a(\tilde{v}_{1,j}).$$

Следовательно, из (5) вытекает

$$R_{2,1} \leqslant c_1\delta_0 |\alpha_1| \leqslant \frac{c_1\varepsilon}{M}, \quad \delta_0 \equiv \omega(u_0', h), \quad \alpha_1 \equiv \tau_1 a(\tilde{v}_{1,j}). \tag{25}$$

При $i = 1$ имеем $R_{3,1} = 0$. Таким образом, получим $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \dfrac{c_1}{M-1} = \varepsilon(q - 1)\dfrac{c_1}{\gamma_3 + 1}$, $q \equiv \dfrac{M + \gamma_3}{M - 1}$.

Предположим, что соотношения (21), (22) справедливы при $k = 1, 2, \ldots, i - 1$. Докажем тогда эти соотношения при $k = i$. Для этого представим соотношения (22) при $k = i - 1$ в виде

$$|g_{i-1,j}| = |u(x_j, \tilde{T}_{i-1}) - \tilde{s}_{i-1}(x_j)| \leqslant \varepsilon_{i-1} \leqslant \varepsilon(q^{i-1} - 1)\frac{c_1}{\gamma_3 + 1}. \tag{26}$$

Далее, из представления (6), оценки (7) и оценки (26) вытекает, что при $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ справедливы оценки

$$|s_{i-1}(x) - \tilde{s}_{i-1}(x)| \leqslant c_2\varepsilon_{i-1}, \quad c_2 \leqslant 9/4, \tag{27}$$

$$|s_{i-1}'(x) - \tilde{s}_{i-1}'(x)| \leqslant c_3\varepsilon_{i-1}/h, \quad c_3 \leqslant 12, \tag{28}$$

$$|\tilde{s}_{i-1}''(x) - \tilde{s}_{i-1}''(x)| \leqslant c_4\varepsilon_{i-1}/h^2, \quad c_4 \leqslant 24, \tag{29}$$

$$|\tilde{s}_{i-1}'''(x) - \tilde{s}_{i-1}'''(x)| \leqslant c_5\varepsilon_{i-1}/h^3, \quad c_5 \leqslant 50. \tag{30}$$

Докажем неравенство (21) при $k = i$. Имеем $\frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) = \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) - s'_{i-1}(x) - \tilde{s}'_{i-1}(x) + \tilde{s}'_{i-1}(x) + \tilde{s}'_{i-1}(x)$. Следовательно,

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) \right| \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) - s'_{i-1}(x) \right| +$$

$$+ \sup_{-\infty<x<\infty} | s'_{i-1}(x) - \tilde{s}'_{i-1}(x) | + \sup_{-\infty<x<\infty} | \tilde{s}'_{i-1}(x) |.$$

Из (5), (26) и (28) следует

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) \right| \leqslant c_1\delta + \varepsilon \frac{c_1 c_3}{\gamma_3 + 1} q^{i-1} + \sup_{-\infty<x<\infty} \left| \tilde{s}'_{i-1}(x) \right|.$$

Так как $i - 1 \leqslant M - 1$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}) \right| \leqslant c_1 \left(1 + \frac{c_3 e^{\gamma_3}}{\gamma_3 + 1}\right) \delta + \sup_{-\infty<x<\infty} | \tilde{s}'_{i-1}(x) | \leqslant \tilde{K}_{i-1}.$$

Докажем теперь неравенство (22). Аналогично (24) и (25) для $i = 1$ имеем

$$R_{1,i} \leqslant \frac{1}{\beta_i} | u(x_j, \tilde{T}_i) - \tilde{v}_{i,j} | \leqslant \frac{1}{M} \varepsilon_i, \tag{31}$$

$$R_{2,i} \leqslant c_1 \delta_{i-1} | \alpha_i | \leqslant \frac{c_1 \varepsilon}{M}, \quad \delta_{i-1} \equiv \omega \left(\frac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_{i-1}), h \right), \quad \alpha_i \equiv \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}). \tag{32}$$

Оценим $R_{3,i}$. Для этого, разложив $s_{i-1}(x)$ и $\tilde{s}_{i-1}(x)$ в ряд Тейлора, получим

$$R_{3,i} \leqslant | s_{i-1}(x_j) - \tilde{s}_{i-1}(x_j) | + | s'_{i-1}(x_j) - \tilde{s}'_{i-1}(x_j) | | \alpha_i | + \frac{1}{2} | s''_{i-1}(x_j) -$$

$$- \tilde{s}''_{i-1}(x_j) | | \alpha_i |^2 + \frac{1}{6} | s'''_{i-1}(\xi) - \tilde{s}'''_{i-1}(\eta) | | \alpha_i |^3. \tag{33}$$

Из (16) следует $|\alpha_i| \leqslant |\tau_i| | a(v_{i,j}) | \leqslant h/M < h$. Следовательно,

$$s'''_{i-1}(\xi) = s'''_{i-1}(\tilde{x}_j), \quad \tilde{s}'''_{i-1}(4) = \tilde{s}'''_{i-1}(\tilde{x}_j), \quad \tilde{x}_j \equiv x_j - \tau_i a(\tilde{v}_{i,j}), \tag{34}$$

поскольку на каждом отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ $s_{i-1}(x)$ и $\tilde{s}_{i-1}(x)$ являются многочленами третьей степени. Далее, из (28) — (30) и (33) — (34) следует

$$R_{3,i} \leqslant \varepsilon_{i-1} (1 + c_3/M + c_4/M^2 + c_5/6M^3) \leqslant \varepsilon_{i-1} (1 + \gamma_3/M). \tag{35}$$

Из (23), (31), (32) и (35) вытекает неравенство $(1 - 1/M)\,\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{i-1}(1 + \gamma_3/M) + c_1\varepsilon/M$. Следовательно, из (26) следует

$$\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{i-1} \frac{M + \gamma_3}{M - 1} + \varepsilon \frac{c_1}{M - 1} = \varepsilon_{i-1} q + \varepsilon \frac{c_1}{M - 1} \leqslant \varepsilon q^i \frac{c_1}{\gamma_3 + 1} - \varepsilon q \frac{c_1}{\gamma_3 + 1} +$$

$$+ \varepsilon \frac{c_1}{M - 1} = \varepsilon q^i \frac{c_1}{\gamma_3 + 1} - \varepsilon \frac{c_1}{\gamma_3 + 1} = \varepsilon (q^i - 1) \frac{c_1}{\gamma_3 + 1}.$$

Таким образом, соотношения (21), (22) доказаны. Из (22) вытекает (20) для $i = 0, 1, \ldots, M - 1$.

Теперь докажем, что при условиях (17) и (18) выполняются неравенства в (14) для $i = 1, 2, \ldots, M - 1$. Действительно, первое неравенство в (14) совпадает с неравенством (21). Докажем второе неравенство в (14). Из (5), (20) и (27) следует

$$| u(x, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x) | \leqslant | u(x, \tilde{T}_i) - s_i(x) | + | s_i(x) - \tilde{s}_i(x) | \leqslant \varepsilon \left(c_0 + \frac{c_1 c_2 e^{\gamma_3}}{\gamma_3 + 1} \right). \tag{36}$$

Далее, имеем

$$|\tilde{s}_i(x)| \leqslant |u(x, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x)| + |u(x, \tilde{T}_i)|. \qquad (37)$$

Так как из (10) вытекают неравенства $u_{\min} \leqslant u(x, t) \leqslant u_{\max}$, то из (13), (18), (36) и (37) следует второе неравенство в (14). Теорема полностью доказана.

Замечание 2. Здесь оценка точности для приближенного решения $\tilde{s}_i(x)$ получена только для $i = 1, 2, \ldots, M - 1$. Из (13) и (16) следует, что эта оценка справедлива в достаточно малой временной полосе.

Замечание 3. Можно доказать, что неравенство (22) верно для всех i, и поэтому легко получить оценку вида (20) для $i \geqslant M$. Например, для $i = M, M + 1, \ldots, 2(M - 1)$ имеет место оценка $|u(x_j, \tilde{T}_i) - \tilde{s}_i(x_j)| \leqslant \leqslant \varepsilon_2 \dfrac{c_1 e^{2\gamma_3}}{\gamma_3 + 1}$, где $\varepsilon_2 \equiv h\delta_2$, $\delta_2 \equiv \max\limits_{i=M,\ldots,2(M-1)} \left\{\delta, \omega\left(\dfrac{d}{dx} u(x, \tilde{T}_i), h\right)\right\}$. При этом в (17) и (18) вместо e^{γ_3}, δ, ε нужно взять $e^{2\gamma_3}$, δ_2, ε_2 соответственно.

Замечание 4. Вместо кубических сплайнов можно использовать интерполяционные сплайны любых порядков и получить для них аналогичные (20) оценки. Можно использовать и локальные сплайны (см. [5]).

При этом в (25) и (32) нужно добавить член $|u(x_j, \tilde{T}_i) - s_i(x_j)|$, для которого известны оценки.

1. *Lax P. D.* The formation and decay of shock waves // Amer. Math. Mon.— 1972.— **79**, N 3. P. 227—241.
2. *Рождественский В. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.— М. : Наука, 1968.— 592 с.
3. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М. : Наука, 1976.— 248 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 252 с.
5. *Корнейчук Н. П.* О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 5.— С. 617—621.
6. *Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения.— М. : Мир, 1972.— 316 с.
7. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М. : Наука, 1980.— 352 с.
8. *Субботин Ю. Н.* Приближение сплайнами и гладкие базисы в $\mathbb{C}(0, 2\pi)$ // Мат. заметки.— 1972.— **12**, № 1.— С. 43—52.
9. *Субботин Ю. Н.* Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами // Там же.— 1974.— **16**, № 5.— С. 843—854.

Вьетнам

Получено 22.01.86,
после доработки — 30.09.86