УДК 517.928.2

Н. И. Шкиль, Т. А. Аликулов

Об асимптотическом понижении порядка систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка

1. Вопросам построения асимптотических решений систем линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной в смысле [1] посвящены многие работы. Библиографию по этим вопросам можно найти в работах [2, 3]. В работах [4, 5] исследуются системы дифференциальных уравнений второго порядка в более общем виде, чем в [2].

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{(m+1-h)/2}$ ($\varepsilon > 0$ — малый параметр, h, $m \geqslant 1$ — натуральные числа) привести систему дифференциальных уравнений второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах.

2. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной вида

$$\varepsilon^h \frac{d^2x}{dt^2} = A(t, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s A_s(t)$ — квадратная матрица порядка n, $x(t, \varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор, $t \in [0; L]$ ($L > 0$ — произвольное действительное число).

Предполагается, что на отрезке $[0; L]$ выполняются следующие условия:

1°) корни $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, уравнения $\det \| A_0(t) - \lambda(t) E \| = 0$ (E — единичная матрица) простые, т. е. $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$;

2°) матрицы $A_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемые до порядка $m + 1 - s$ включительно;

3°) вещественные части

$$\mathrm{Re}\, (\sqrt{\lambda_i(t)}) \geqslant 2\sigma > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Осуществим в системе (1) замену переменных

$$x = U_m(t, \mu)\, y, \tag{2}$$

где

$$\mu = \sqrt{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$U_m(t, \mu) = \sum_{s=0}^{m} \mu^s U_s(t) \tag{4}$$

— квадратная матрица порядка n, а $y(t, \varepsilon)$ — n-мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$dy/dt = \mu^{-h} (\Lambda_m(t, \mu) + \mu^{m+1} C_m(t, \mu))\, y, \tag{5}$$

в которой $\Lambda_m(t, \mu) = \sum_{s=0}^{m} \mu^s \Lambda_s(t)$ — диагональная матрица, а $C_m(t, \mu)$ — $(n \times n)$-матрица, обладающая в области $D = \{t \in [0; L],\ \mu \in]0; \mu_0]\}$ ограниченными элементами.

Подставляя (2) и ее вторую производную в систему (1) с учетом (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ^s, $s = 0, 1, \ldots, m$, получаем систему матричных уравнений

$$A_0(t)\, U_0(t) - U_0(t)\, \Lambda_0^2(t) = 0, \tag{6}$$

$$A_0(t)\, U_s(t) - U_s(t)\, \Lambda_0^2(t) = 2U_0(t)\, \Lambda_0(t)\, \Lambda_s(t) + \Pi_s(t), \quad s = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

где

$$\Pi_s(t) = U''_{s-2h}(t) + U_0(t) \sum_{k=1}^{s-1} \Lambda_k(t)\, \Lambda_{s-k}(t) + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=0}^{s-k} U_k(t)\, \Lambda_j(t)\, \Lambda_{s-j-k}(t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} A_j(t)\, U_{s-2j}(t) + \sum_{j=0}^{s-h} [2U'_j(t)\, \Lambda_{s-h-j}(t) + U_j(t)\, \Lambda'_{s-h-j}(t)]. \tag{8}$$

Тогда матрица $C_m(t, \mu)$ должна удовлетворять следующей нелинейной системе дифференциальных уравнений:

$$\mu^h U_m(t, \mu)\, C'_m(t, \mu) + 2\mu^h U'_m(t, \mu)\, C_m(t, \mu) + U_m(t, \mu)\, [\Lambda_m(t, \mu)\, C_m(t, \mu) +$$

$$+ C_m(t, \mu)\, \Lambda_m(t, \mu)] + \mu^{m+1} U_m(t, \mu)\, C_m^2(t, \mu) + N_m(t, \mu) = 0, \tag{9}$$

где

$$N_m(t, \mu) = \sum_{k=0}^{2h-1} \mu^k U''_{m+1-2h+k}(t) + \sum_{j=m-1}^{2m-1} \mu^j U_{j-m+1}(t)\, \Lambda_m(t)\, \Lambda_m(t) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{j=k}^{k+m}\mu^j U_{j-k}(t)\sum_{r=k+1}^{m}\Lambda_r(t)\Lambda_{m+k+1-r}(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\mu^j U_{j+m-k}(t)\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{k+1}\Lambda_r(t)\Lambda_{k+1-r}(t)+\sum_{k=0}^{h-1}\mu^k\sum_{j=0}^{m+k+1-h}[2U_j'(t)\Lambda_{m+k+1-h-j}(t)+$$

$$+U_j(t)\Lambda'_{m+k+1-h-j}(t)]+\mu^h\sum_{k=0}^{m-1}\mu^k\sum_{j=k+1}^{m}[2U_j'(t)\Lambda_{m+k-j}(t)+U_j(t)\Lambda'_{m+k-j}(t)]-$$

$$-\sum_{k=0}^{m-1}\mu^k\sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{\left[\frac{m+1+k}{2}\right]}A_j(t)U_{m+k+1-2j}(t)-\sum_{k=m}^{2m-1}\mu^k\sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{m}A_j(t)U_{m+k+1-2j}(t). \quad (10)$$

Здесь $\left[\frac{s}{2}\right]$, $\left[\frac{m+1+k}{2}\right]$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ — соответственно целые части чисел $\frac{s}{2}$, $\frac{m+1+k}{2}$, $\frac{k}{2}$. Кроме того, в формулах (8), (10) матрицы с отрицательными индексами отсутствуют, т. е. они равны нулю.

Сначала докажем разрешимость уравнений (6), (7). Для этого воспользуемся методом, предложенным в [3]. Согласно предположению 2° для матрицы $A_0(t)$ можно указать неособенную $m+1$ раз дифференцируемую матрицу $T(t)$ [3] такую, что

$$A_0(t)=T(t)\Lambda(t)T^{-1}(t), \quad (11)$$

где $\Lambda(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\}$.

Согласно (11) перепишем систему уравнений (6), (7) в виде

$$T(t)\Lambda(t)T^{-1}(t)U_0(t)-U_0(t)\Lambda_0^2(t)=0, \quad (12)$$

$$T(t)\Lambda(t)T^{-1}(t)U_s(t)-U_s(t)\Lambda_0^2(t)=2U_0(t)\Lambda_0(t)\Lambda_s(t)+\Pi_s(t),\quad s=1,\ldots,m. \quad (13)$$

Умножив уравнения (12), (13) слева на матрицу $T^{-1}(t)$ и введя обозначения $Q_s(t)=T^{-1}(t)U_s(t)$, $s=0,1,\ldots,m$; $H_s(t)=T^{-1}(t)\Pi_s(t)$, $s=1,\ldots,m$, представим их в виде

$$\Lambda(t)Q_0(t)-Q_0(t)\Lambda_0^2(t)=0, \quad (14)$$

$$\Lambda(t)Q_s(t)-Q_s(t)\Lambda_0^2(t)=2Q_0(t)\Lambda_0(t)\Lambda_s(t)+H_s(t),\quad s=1,\ldots,m. \quad (15)$$

Положим в уравнении (14) $Q_0(t)=\mathrm{E}$. Тогда

$$\Lambda_0^2(t)=\Lambda(t). \quad (16)$$

Уравнение (16) всегда разрешимо [8]. В качестве $\Lambda_0(t)$ можно взять матрицу $\Lambda_0(t)=\sqrt{\Lambda(t)}=\operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1(t)},\ldots,\sqrt{\lambda_n(t)}\}$. Из уравнения (15) находим $\Lambda_s(t)=-\frac{1}{2}\Lambda_0^{-1}(t)H_{s0}(t)$, $s=1,\ldots,m$, где $H_{s0}(t)$ — диагональная матрица, составленная из диагональных элементов матрицы $H_s(t)$.

Элементы матрицы $Q_s(t)$, не лежащие на главной диагонали, определяются формулами $\{q_s(t)\}_{ij}=\dfrac{\{h_s\}_{ij}}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)}$, $i\neq j$; $s=1,\ldots,m$; $i,j=1,\ldots,n$, а диагональные элементы матриц $Q_s(t)$ произвольны. Положим $\{q_s(t)\}_{ii}=0$, $s=1,\ldots,m$; $i=1,\ldots,n$. Построенные таким образом матрицы $Q_s(t)$, $\Lambda_s(t)$, $s=0,1,\ldots,m$, в области D непрерывно дифференцируемы до порядка $m+1-s$ включительно. Тогда и матрицы $U_s(t)=T(t)Q_s(t)$, $s=0,1,\ldots,m$, имеют эти же свойства [3].

Докажем, что уравнение (9) имеет в области D ограниченное решение.

При достаточно малых $\mu \in]0, \mu_0]$ матрица $U_m(t, \mu)$ неособенная, поэтому, умножив (9) на $U_m^{-1}(t, \mu)$ и обозначив

$$F_1(t, \mu) = -2U_m^{-1}(t, \mu)\, U_m'(t, \mu), \quad F_2(t, \mu) = -U_m^{-1}(t, \mu)\, N_m(t, \mu),$$

перепишем его в виде

$$C_m'(t, \mu) = [F_1(t, \mu) - \mu^{-h}\Lambda_m(t, \mu)]\, C_m(t, \mu) - \mu^{-h} C_m(t, \mu)\, \Lambda_m(t, \mu) - \\ - \mu^{m+1-h} C_m^2(t, \mu) + \mu^{-h} F_2(t, \mu). \qquad (17)$$

Нетрудно видеть, что (17) эквивалентно интегральному уравнению [6]

$$C_m(t, \mu) = W(t, \mu) \Big\{ K + \int_0^t W^{-1}(s, \mu)\, [\mu^{-h} F_2(s, \mu) - \mu^{m+1-h} C_m^2(s, \mu) \times \\ \times V^{-1}(s, \mu)\, ds \Big\} V(t, \mu), \qquad (18)$$

где $W(t, \mu)$, $V(t, \mu)$ — нормированные фундаментальные матрицы — решения соответственно уравнений

$$W'(t, \mu) = [F_1(t, \mu) - \mu^{-h}\Lambda_m(t, \mu)]\, W(t, \mu), \quad W(0, \mu) = E, \qquad (19)$$

$$V'(t, \mu) = -\mu^{-h}\Lambda_m(t, \mu)\, V(t, \mu), \quad V(0, \mu) = E, \qquad (20)$$

K — произвольная постоянная матрица.

Представим $\Lambda_m(t, \mu)$ в виде

$$\Lambda_m(t, \mu) = \Lambda_0(t) + \mu \sum_{s=1}^{m} \mu^{s-1} \Lambda_s(t) = \Lambda_0(t) + \mu \bar{\Lambda}_m(t, \mu).$$

Тогда (20) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$V(t, \mu) = \Phi(t, \mu)\, V(0, \mu) + \Phi(t, \mu) \int_0^t \Phi^{-1}(s, \mu)\, [-\mu^{-h+1} \bar{\Lambda}_m(s, \mu)]\, V(s, \mu)\, ds, \qquad (21)$$

где $\Phi(t, \mu)$ — фундаментальная матрица уравнения $\Phi' = -\mu^{-h}\Lambda_0(t)\,\Phi$.

При выполнении условия 3°, воспользовавшись леммой из [7], получим

$$\| \Phi(t, \mu) \| \leqslant c \exp\left(-\frac{\sigma t}{\mu^h}\right). \qquad (22)$$

Из уравнения (21) имеем

$$\| V(t, \mu) \| \leqslant \| \Phi(t, \mu) \| + \mu^{-h+1} \| \Phi(t, \mu) \| \int_0^t \| \Phi^{-1}(s, \mu) \| \, \| \bar{\Lambda}_m(s, \mu) \| \times \\ \times \| V(s, \mu) \| \, ds.$$

Представим с учетом (22) последнее неравенство в виде

$$\| V(t, \mu) \| \leqslant c \exp\left(-\frac{\sigma t}{\mu^h}\right) + \mu^{-h+1} c \exp\left(-\frac{\sigma t}{\mu^h}\right) \| \Lambda_m(t, \mu) \| \times \\ \times \int_0^t \exp \frac{\sigma s}{\mu^h} \| V(s, \mu) \| \, ds. \qquad (23)$$

Умножая обе части (23) на $\exp \dfrac{\sigma t}{\mu^h}$, получаем

$$\Psi(t, \mu) \leqslant c + \mu^{-h+1} B \int_0^t \Psi(s, \mu)\, ds, \qquad (24)$$

где

$$\Psi(t,\mu)=\exp\frac{\sigma t}{\mu^h}\|V(t,\mu)\|,\quad B=c\|\bar{\Lambda}_m(t,\mu)\|. \tag{25}$$

Применяя к неравенству (24) леммы из [3], находим $\Psi(t,\mu)\leqslant c_2\exp\left(\frac{Bt}{\mu^{h-1}}\right)$. Тогда согласно (25) имеем

$$\|V(t,\mu)\|\leqslant c_2\exp\left(-\frac{\sigma_1 t}{\mu^h}\right). \tag{26}$$

Здесь $\sigma_1=\sigma-\mu B$. Отметим, что при $\mu<\mu_1=\sigma/B$ $\sigma_1>0$, т. е. $\|V(t,\mu)\|\to 0$ при $\mu\to 0$, если $t>s$.

Для уравнения (19) аналогично можно получить оценку

$$\|W(t,\mu)\|\leqslant c_1\exp\left(-\frac{\sigma_1 t}{\mu^h}\right). \tag{27}$$

Уравнение (18) будем решать методом последовательных приближений, полагая

$$\begin{gathered}
C_{m0}(t,\mu)=W(t,\mu)KV(t,\mu)+\mu^{-h}\int_0^t W(t,s,\mu)F_2(s,\mu)V(t,s,\mu)\,ds,\\
C_{m1}(t,\mu)=-\mu^{-h+m+1}\int_0^t W(t,s,\mu)C_{m0}^2(s,\mu)V(t,s,\mu)\,ds,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (28)\\
C_{mk}(t,\mu)=-\mu^{-h+m+1}\int_0^t W(t,s,\mu)C_{m(k-1)}^2(s,\mu)V(t,s,\mu)\,ds,\quad k=1,2,\ldots.
\end{gathered}$$

Оценим с учетом (26) и (27) по норме элементы последовательности (28)

$$\|C_{m0}(t,\mu)\|\leqslant\|W(t,\mu)\|\|K\|\|V(t,\mu)\|+\int_0^t\|W(t,s,\mu)\||\mu^{-h}|\|F_2(s,\mu)\|\times$$

$$\times\|V(t,s,\mu)\|\,ds\leqslant\|K\|c+c\mu^{-h}\|F_2(t,\mu)\|\int_0^t\exp\left(-\frac{2\sigma_1(t-s)}{\mu^h}\right)\mathrm{ds}\leqslant$$

$$\leqslant\|K\|c+\|F_2(t,\mu)\|\frac{c}{2\sigma_1}=a,\quad c=c_1c_2,$$

$$\|C_{m1}(t,\mu)\|\leqslant\mu^{m+1-h}\int_0^t\|W(t,s,\mu)\|\|C_{m0}^2(s,\mu)\|\|V(t,s,\mu)\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\mu^{m+1-h}a^2c\int_0^t\exp\left(-\frac{2\sigma_1(t-s)}{\mu^h}\right)ds\leqslant\frac{a^2c}{2\sigma_1}\mu^{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|C_{mk}(t,\mu)\|\leqslant\mu^{m+1-h}\int_0^t\|W(t,s,\mu)\|\|C_{m(k-1)}^2(s,\mu)\|\|Y(t,s,\mu)\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\left(\mu^{m+1}\frac{c}{2\sigma_1}\right)^{2^k-1}a^{2^k},\quad k=0,1,\ldots.$$

Далее,

$$\|C_{m(k+1)}(t,\mu)-C_{mk}(t,\mu)\|\leqslant\|C_{m(k+1)}(t,\mu)\|+\|C_{mk}(t,\mu)\|\leqslant 2\|C_{mk}(t,\mu)\|.$$

Поскольку при $\mu \leqslant \mu_0 < \mu_2 < \sqrt[m+1]{\dfrac{2\sigma_1}{ac}}$, $\sigma_1 = \sigma - \mu B > 0$, числовой ряд

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu^{m+1} \frac{c}{2\sigma_1} \right)^{2^k - 1} a^{2^k}.$$ сходится, то функциональный ряд

$$C_m(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{m(k+1)}(t, \mu) - C_{mk}(t, \mu) \right)$$

сходится равномерно. Значит, существует предел частичных сумм $S_{mk}(t, \mu) = C_{mk}(t, \mu)$, $k = 0, 1, \ldots$, который при $k \to \infty$ является ограниченным решением интегрального уравнения (18), а значит, и дифференциального уравнения (9) при $\forall t \in [0; L]$.

Применяя метод последовательных приближений к системе (5), получаем асимптотическую формулу для вектора $y(t, \varepsilon)$ вида

$$y(t, \varepsilon) = \left\{ \exp\left(\mu^{-h} \int_0^t \Lambda_m(s, \mu)\, ds \right) + O(\mu^{m+1-h}) \right\} y(0, \varepsilon),$$

где $O(\mu^{m+1-h})$ — $(n \times n)$-матрица, элементы которой при достаточно малых μ и $t \in [0; L]$ есть величины порядка $O(\mu^{m+1-h})$, $y(0, \varepsilon)$ — начальное значение вектора $y(t, \varepsilon)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются условия* 1° — 3°, *то система линейных дифференциальных уравнений* (1) *имеет вектор-решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = U_m(t, \mu) \left\{ \exp\left(\mu^{-h} \int_0^t \Lambda_m(s, \mu)\, ds + O(\mu^{m+1-h}) \right\} U_m^{-1}(0, \mu)\, x(0, \varepsilon), \quad (29)$$

где $x(0, \varepsilon)$ — *начальное значение вектора* $x(t, \varepsilon)$.

3. Если в уравнении (16) положить

$$\Lambda_0(t) = -\sqrt{\Lambda(t)} = \operatorname{diag}\{-\sqrt{\lambda_1(t)}, \ldots, -\sqrt{\lambda_n(t)}\}, \quad (24')$$

то система (1) при выполнении условия 3° также приводится к виду (3).

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1) при достаточно малых ε имеет два линейно независимые вектор-решения вида (29), а значит, можно построить с точностью до величин более высокого порядка малости относительно ε общее решение системы (1).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Киев : Вища шк., 1985.— 248 с.
3. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 226 с.
4. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— Киев : Наук. думка, 1979.— С. 262—269.
5. *Конет И. М.* Асимптотические разложения фундаментальных матриц линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр.— Киев, 1982.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82-43).
6. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.

Киев. пед. ин-т

Получено 13.01.86,
после доработки —09.10.86