УДК 517.956.3

С. В. Жестков

О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболических систем в частных производных

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tx} = Au + B(x)u_t + C(t)u_x + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}),\ u \in R^m, \tag{1}$$

$$u(t+\tau, x) = u(t, x) = u(t, x+\omega), \tag{2}$$

где A — постоянная невырожденная $m \times m$-матрица; $B(x)$ — ω-периодическая, $C(t)$ — τ-периодическая непрерывные $m \times m$-матрицы; $f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})$— непрерывный, τ, ω-периодический по t, x m-вектор.

При $\tau = \omega$ аналогичные задачи исследовали Чезари [1], Хейл [2]. Наличие линейных членов в правой части (1) позволяет на основе подхода из [3] построить решение определяющих уравнений в замкнутой форме, а также избежать «потери производных» [4] в предлагаемом здесь итерационном методе решения задачи (1), (2).

Пусть вектор $f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})$ определен в области $G = \{t, x, u, p, q, r: -\infty < t, x < \infty,\ \|u\|, \|p\|, \|q\|, \|r\| \leqslant \rho\}$ и обладает достаточной гладкостью по переменным u, p, q, r. Под нормой вектора и матрицы понимаются следующие величины: $\|u\| = \sum\limits_{s=1}^{m} |u_s|$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant \sigma \leqslant m} \sum\limits_{s=1}^{m} |a_{s\sigma}|$. Выведем соответствующее интегральное уравнение. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1), (2). Тогда имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) = \varphi(t) + \psi(x) + \int_0^t \int_0^x \{Au(s, \sigma) + B(\sigma)u_t(s, \sigma) + C(s)u_x(s, \sigma) + \\ + f(s, \sigma, u, u_t, u_x, u_{tx})\}\, d\sigma ds \equiv \varphi(t) + \psi(x) + v(t, x), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — τ-периодический, а $\psi(x)$ — ω-периодический неизвестные векторы. Условия разрешимости задачи (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \{Au(t, x) + B(x)u_t(t, x) + C(t)u_x(t, x) + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\}\, dt = 0, \\ \int_0^\omega \{Au(t, x) + B(x)u_t(t, x) + C(t)u_x(t, x) + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\}\, dx = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), находим

$$\begin{aligned} A\int_0^\tau \varphi(t)\, dt + A\tau\psi(x) + \widetilde{C}(\tau)\psi'(x) + \int_0^\tau \{Av(t, x) + C(t)v_x(t, x) + \\ + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\}\, dt = 0, \\ A\omega\varphi(t) + A\int_0^\omega \psi(x)\, dx + \widetilde{B}(\omega)\dot{\varphi}(t) + \int_0^\omega \{Av(t, x) + B(x)v_t(t, x) + \\ + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\}\, dx = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\widetilde{C}(\tau) \equiv \int_0^\tau C(t)\, dt,\ \ \widetilde{B}(\omega) \equiv \int_0^\omega B(x)\, dx,\ \det \widetilde{C}(\tau) \neq 0,\ \det \widetilde{B}(\omega) \neq 0.$$

Так как векторы $\varphi(t)$, $\psi(x)$ определяются с точностью до одного и того же постоянного вектора, можно положить $\int_0^\tau \varphi(t)\, dt = 0$ или $\int_0^\omega \psi(x)\, dx = 0$. Решая систему (5) и подставляя найденные выражения в (3), получаем искомое интегральное уравнение

$$u(t, x) = (A\omega\tau)^{-1} \int_0^\tau \int_0^\omega \{Av(t, x) + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\} dxdt -$$

$$- (e^{D\tau} - E)^{-1} \int_t^{t+\tau} \left\{ e^{-D(t-s)} (\tilde{B}(\omega))^{-1} \int_0^\omega \{Av(s, x) + B(x) v_t(s, x) + \right.$$

$$\left. + f(s, x, u, u_t, u_x, u_{tx})\} dx \right\} ds - (e^{P\omega} - E)^{-1} \int_x^{x+\omega} \left\{ e^{-P(x-\sigma)} (\tilde{C}(\tau))^{-1} \int_0^\tau \{Av(t, \sigma) + \right.$$

$$\left. + C(t) v_x(t, \sigma) + f(t, \sigma, u, u_t, u_x, u_{tx})\} dt \right\} d\sigma + v(t, x), \qquad (6)$$

где $D \equiv (\tilde{B}(\omega))^{-1} A\omega$, $P \equiv (\tilde{C}(\tau))^{-1} A\tau$, $\det(e^{D\tau} - E) \neq 0$, $\det(e^{P\omega} - E) \neq 0$, E — единичная матрица. Для доказательства эквивалентности уравнения (6) задаче (1), (2) сузим класс рассматриваемых систем, предположив, что для уравнения (6) справедлив принцип сжатых отображений. Тогда τ, ω-периодическое решение уравнения (6) можно построить модифицированным методом последовательных приближений по следующим формулам:

$$u_{-1}(t, x) \equiv 0, \ u_0(t, x) = (A\omega\tau)^{-1} \int_0^\tau \int_0^\omega f(t, x, 0, 0, 0, 0)\, dxdt -$$

$$- (e^{D\tau} - E)^{-1} \int_t^{t+\tau} \left\{ e^{-D(t-s)} (\tilde{B}(\omega))^{-1} \int_0^\omega f(s, x, 0, 0, 0, 0)\, dx \right\} ds -$$

$$- (e^{P\omega} - E)^{-1} \int_x^{x+\omega} \left\{ e^{-P(x-\sigma)} (\tilde{C}(\tau))^{-1} \int_0^\tau f(t, \sigma, 0, 0, 0, 0)\, dt \right\} d\sigma,$$

$$u_{n+1}(t, x) = (A\omega\tau)^{-1} \int_0^\tau \int_0^\omega \{Av_n(t, x) + f(t, x, u_n, \dot{u}_n, u_n', \dot{u}_n')\} dxdt - \qquad (7)$$

$$- (e^{D\tau} - E)^{-1} \int_t^{t+\tau} \left\{ e^{-D(t-s)} (\tilde{B}(\omega))^{-1} \int_0^\omega \{Av_n(s, x) + B(x) \dot{v}_n(s, x) + \right.$$

$$\left. + f(s, x, u_n, \dot{u}_n, u_n', \dot{u}_n')\} dx \right\} ds - (e^{P\omega} - E)^{-1} \int_x^{x+\omega} \left\{ e^{-P(x-\sigma)} (\tilde{C}(\tau))^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\tau \{Av_n(t, \sigma) + C(t) v_n'(t,\sigma) + f(t, \sigma, u_n, \dot{u}_n, u_n', \dot{u}_n')\} dt \right\} d\sigma + v_n(t, x),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v_n(t, x) \equiv \int_0^t \int_0^x \{Au_n(s, \sigma) + B(\sigma) \dot{u}_n(s, \sigma) + C(s) u_n'(s, \sigma) +$$

$$+ f(s, \sigma, u_{n-1}, \dot{u}_{n-1}, u_{n-1}, \dot{u}_{n-1}')\} d\sigma ds.$$

При этом любое приближение является τ, ω-периодической вектор-функцией в силу их построения. Очевидно, что любое решение уравнения (6) является также и решением уравнения (1). Следовательно, при выполнении принципа сжатых отображений уравнение (6) эквивалентно задаче (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены условия* $f(t, x, u, p, q, r) \in C^{(0,0,1,1,1,1)}_{t,x,u,p,q,r}(G)$; *спектр положительной матрицы* $R_{4\times 4}$ *с элементами*

$$\begin{bmatrix} \alpha N_1 + \tilde{L}(N_1 + M_1) & \beta N_1 + \tilde{L}_1(N_1 + M_1) & cN_1 + \tilde{L}_2(N_1 + M_1) & \tilde{L}_3(N_1 + M_1) \\ \alpha N_2 + \tilde{L}(N_2 + M_2) & \beta N_2 + \tilde{L}_1(N_2 + M_2) & cN_2 + \tilde{L}_2(N_2 + M_2) & \tilde{L}_3(N_2 + M_2) \\ \alpha N_3 + \tilde{L}(N_3 + M_3) & \beta N_3 + \tilde{L}_1(N_3 + M_3) & cN_3 + \tilde{L}_2(N_3 + M_3) & \tilde{L}_3(N_3 + M_3) \\ (\alpha + \tilde{L}) & (\beta + \tilde{L}_1) & (c + \tilde{L}_2) & \tilde{L}_3 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \equiv \gamma + d_1\omega\beta_1 \frac{1}{d}(e^{d\tau}-1) + p_1\tau c_1 \frac{1}{p}(e^{p\omega}-1), \ M_2 \equiv d_1\omega\beta_1(e^{d\tau}-1)+\beta_1\omega,$$

$$M_3 \equiv p_1\tau c_1(e^{p\omega}-1)+c_1\tau, \ N_1 \equiv \gamma\alpha\frac{\tau}{2}\frac{\omega}{2} + d_1\alpha\frac{\omega^2}{2}\beta_1\mu_1 +$$

$$+ d_1\beta\frac{\omega^2}{2}\beta_1\frac{1}{d}(e^{d\tau}-1) + p_1\alpha\frac{\tau^2}{2}c_1\mu_2 + p_1c\frac{\tau^2}{2}c_1\frac{1}{p}(e^{p\omega}-1)+\tau\omega,$$

$$N_2 \equiv d_1\alpha\frac{\omega^2}{2}\beta_1 d\mu_1 + d_1\beta\frac{\omega^2}{2}\beta_1(e^{d\tau}-1)+\beta_1\alpha\tau\frac{\omega^2}{2}+\beta_1\beta\frac{\omega^2}{2}+\omega,$$

$$N_3 \equiv p_1\alpha\frac{\tau^2}{2}c_1 p\mu_2 + p_1 c\frac{\tau^2}{2}c_1(e^{p\omega}-1)+c_1\alpha\frac{\tau^2}{2}\omega + c_1 c\frac{\tau^2}{2}+\tau,$$

$$\alpha \equiv \|A\|, \ \beta \equiv \max_{0\leqslant x\leqslant\omega}\|B(x)\|, \ c \equiv \max_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|C(t)\|, \ \gamma \equiv \|A^{-1}\|,$$

$$d_1 \equiv \|(e^{D\tau}-E)^{-1}\|, \ p_1 \equiv \|(e^{P\omega}-E)^{-1})\|, \ \beta_1 \equiv \|(\tilde{B}(\omega))^{-1}\|,$$

$$c_1 \equiv \|(\tilde{C}(\tau))^{-1}\|, \ \mu_1 \equiv \frac{1}{d}\left[e^{d\tau}\left(2\tau-\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{d}-\tau\right)\right],$$

$$\mu_2 \equiv \frac{1}{p}\left[e^{p\omega}\left(2\omega-\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{1}{p}-\omega\right)\right], \ d \equiv \|D\|, \ p = \|P\|,$$

$$L \equiv \max_{i,j,G}\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|, \ L_1 \equiv \max_{i,j,G}\left|\frac{\partial f_i}{\partial p_j}\right|, \ L_2 \equiv \max_{i,j,G}\left|\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right|, \ L_3 \equiv \max_{i,j,G}\left|\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right|,$$

$$\tilde{L} \equiv Lm, \ \tilde{L}_1 \equiv L_1 m, \ \tilde{L}_2 \equiv L_2 m, \ \tilde{L}_3 \equiv L_3 m, \ i, j = \overline{1, m},$$

лежит внутри единичного круга; $\{h_{i1}(M_1+N_1)+h_{i2}(M_2+N_2)+h_{i3}(M_3+N_3)+ h_{i4}\}M_0 \leqslant \rho$, $i=\overline{1,4}$, *где* h_{ij}, $i, j = \overline{1,4}$, *— суть элементы матрицы* $(E_{4\times4}-R_{4\times4})^{-1}$; $f(t, x, 0, 0, 0, 0) \not\equiv 0$, $M_0 \equiv \max\limits_G \|f(t, x, 0, 0, 0, 0)\|$. *Тогда задача* (1), (2), *имеет в области G единственное классическое решение, которое можно построить по формулам* (7).

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение (ср. с [1]) $u_{tx} = \varepsilon u + \varepsilon u_t + \varepsilon u_x + \varepsilon\sin 2x - \varepsilon\cos 2x + \varepsilon\cos t - \varepsilon\sin t + \varepsilon^2\sin u_{tx}$, $u(t+2\pi, x) = u(t, x) = u(t, x+\pi)$. Пусть $\varepsilon N + 8\varepsilon^2 < 1$, $\varepsilon \geqslant 0$, где $N \equiv \frac{15}{2}\pi + \frac{9}{2}\pi^2 + \frac{\pi\mu_1}{e^{2\pi}-1} + \frac{2\pi\mu_2}{e^{\pi}-1}$, $\mu_1 \equiv \{e^{2\pi}(4\pi-1)+(1-2\pi)\}$, $\mu_2 \equiv \{e^{\pi}(2\pi-1)+(1-\pi)\}$. Тогда порождающее решение $u_0(t, x) = -\cos t + \frac{1}{5}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x$ является единственным решением этой задачи.

1. *Cesari L.* Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1965.— 20, N 3.— P. 170—190.
2. *Hale I. K.* Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Ibid.— 1967.— 23, N 5.— P. 380—398.
3. *Лаптинский В. Н.* К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.— 1983.— 19, № 8.— С. 1335—1343.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 245 с.

Могилев. отд-ние Ин-та физики
АН БССР

Получено 04.04.85,
после доработки — 03.04.86