УДК 517.51+517.98

В. К. Маслюченко

Одно свойство частных производных

Известно, что если произведение двух аналитических в некоторой области функций есть тождественный нуль, то одна из этих функций нулевая. В данной статье устанавливается, что при определенных условиях подобное свойво имеют частные производные $D_1 f$ и $D_2 f$ отображений $f : X \times Y \to V$, исследуется существенность наложенных условий и выясняется, что происходит при увеличении числа переменных. (Относительно терминологии и обозначений см. [1].)

1. Теорема. *Пусть X и Y — действительные топологические векторные пространства, $Z = X \times Y$ — их произведение, а V — действительное отделимое локально-выпуклое пространство. Допустим, что отображение $f : Z \to V$ имеет непрерывные слабые производные $D_1 f : Z \to L(X, V)$ и $D_2 f : Z \to L(Y, V)$ соответственно по первой и второй переменной (пространства линейных непрерывных операторов $L(X, V)$ и $L(Y, V)$ наделяются топологией поточечной сходимости). Если для каждого $z \in Z$ имеем $D_1 f(z) = 0$ или $D_2 f(z) = 0$, то $D_1 f(z) = 0$ $\forall z \in Z$ или $D_2 f(z) = 0$ $\forall z \in Z$.*

Доказательство. Пусть сначала X и Y — конечномерные отделимые пространства. Тогда их топологии порождаются некоторыми нормами, которые обозначим символом $\|\cdot\|$. Топология на Z задается нормой $\|z\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, где $z = (x, y)$.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение: если $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$, то $D_2 f(x_0, y) = 0$ $\forall$ $y \in Y$.

Докажем это утверждение от противного. Пусть $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$ и $D_2 f(x_0, y_1) \neq 0$. Тогда $y_1 \neq y_0$, поскольку по условию $D_2 f(x_0, y_0) = 0$. Пространства $L(X, V)$ и $L(Y, V)$ с топологией простой сходимости отделимы, а производные $D_1 f$ и $D_2 f$ непрерывны. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что $D_1 f(x, y) \neq 0$ и $D_2 f(x, y_1) \neq 0$, как только $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$ и $\| y - y_0 \| \leqslant \delta$. Положим $U = \{x \in X : \| x - x_0 \| \leqslant \delta\}$, $\rho = \| y_1 - y_0 \|$ и $F_x = \{y \in Y : D_1 f(x, y) = 0$ и $\| y - y_0 \| \leqslant \rho\}$. Так как $D_2 f(x, y_1) \neq 0$ при $x \in U$, то $D_1 f(x, y_1) = 0$ для таких x, следовательно, для $x \in U$ имеем $y_1 \in F_x$, значит $F_x \neq \varnothing$. Кроме этого, очевидно, $\rho > \delta$. Множество F_x замкнуто и ограничено в Y, а значит компактно, ведь пространство Y конечномерно. При $x \in U$ непрерывная функция $d(y) = \| y - y_0 \|$ достигает на непустом компактном множестве F_x своего инфимума ε_x. Ясно, что $\varepsilon_x \geqslant \delta$ для произвольного $x \in U$, поэтому и $\varepsilon = \inf\limits_{x \in U} \varepsilon_x \geqslant \delta$. Покажем, что существует точка $a \in U$, для которой $\varepsilon = \varepsilon_a$. Для некоторой последовательности (a_n) точек из U имеем $\varepsilon = \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_{a_n}$. На основании изложенного для каждого n существует точка $b_n \in F_{a_n}$, для которой $\varepsilon_{a_n} = \| b_n - y_0 \|$. Выделим из последовательностей (a_n) и (b_n) сходящиеся подпоследовательности: $a_{n_k} \to a$, $b_{n_k} \to b$. Понятно, что $a \in U$ и $\| b - y_0 \| \leqslant \rho$. Далее, поскольку $D_1 f(a_{n_k}, b_{n_k}) = 0$ и $D_1 f(a, b) = \lim\limits_{k \to \infty} D_1 f(a_{n_k}, b_{n_k})$, то и $D_1 f(a, b) = 0$, следовательно, $b \in F_a$. Имеем $\| b - y_0 \| = \lim\limits_{k \to \infty} \| b_{n_k} - y_0 \| = \varepsilon$, поэтому $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon$. С другой стороны, в силу определения числа ε имеем $\varepsilon_a \geqslant \varepsilon$. Таким образом, $\varepsilon = \varepsilon_a$. При $\| y - y_0 \| < \varepsilon$ и $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$ по построению $D_1 f(x, y) \neq 0$. Поэтому $D_2 f(x, y) = 0$, как только $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$ и $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$. Из теоремы о среднем [1, с. 220] вытекает, что для каждого $x \in U$ функция $f(x, y)$ постоянна по y в шаре $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$. В таком случае, $f(x, y_0) = f(x, b)$ для каждого $x \in U$. Тогда, как легко видеть, и $D_1 f(x, y_0) = D_1 f(x, b)$ на U, в частности $D_1 f(a, y_0) = D_1 f(a, b)$. Но последнее равенство невозможно, ведь $D_1 f(a, y_0) \neq 0$, а $D_1 f(a, b) = 0$.

Теперь легко доказать утверждение теоремы. Пусть $D_1 f(x_1, y_1) \neq 0$. Тогда $D_1 f(x, y_1) \neq 0$ для всех x из некоторого шара U с центром в точке x_1, следовательно, на основании доказанного выше $D_2 f(x, y) = 0$ на $U \times Y$. Допустим, что в некоторой точке $(x_2, y_2) \in X \times Y$ имеем $D_2 f(x_2, y_2) \neq 0$. Тогда по доказанному $D_1 f(x, y_2) = 0$ на X, в частности $D_1 f(x_1, y_2) = 0$. Так как $f(x, y)$ не зависит от y на $U \times Y$, то $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ на U, откуда получаем $D_1 f(x_1, y_1) = D_1 f(x_1, y_2)$, что невозможно. Таким образом, $D_2 f(z) = 0$ для каждого z.

Общий случай сводится к рассмотренному. Предположим, что $D_1 f(z_1) \neq 0$ и $D_2 f(z_2) \neq 0$ для некоторых точек $z_i = (x_i, y_i) \in Z$, $i = 1, 2$. Тогда существуют такие направления $h_1 \in X$ и $k_1 \in Y$, что $D_1 f(z_1) h_1 \neq 0$ и $D_2 f(z_2) k_1 \neq 0$. Положим $h_2 = x_2 - x_1$ и $k_2 = y_2 - y_1$ и рассмотрим функцию четырех действительных переменных $g(t_1, t_2; s_1, s_2) = f(x_1 + t_1 h_1 + t_2 h_2, y_1 + s_1 k_1 + s_2 k_2)$, которую интерпретируем как отображение из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в V. Для сокращения записи положим $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $x(t) = x_1 + t_1 h_1 + t_2 h_2$ и $y(s) = y_1 + s_1 k_1 + s_2 k_2$. Поскольку замена линейна, то по теореме о дифференцировании сложной функции при $i = 1, 2$ имеем $\dfrac{\partial g}{\partial t_i}(t, s) = D_1 f(x(t), y(s)) h_i$, $\dfrac{\partial g}{\partial s_i}(t, s) = D_2 f(x(t), y(s)) k_i$. Частные производные $\partial g / \partial t_i$ и $\partial g / \partial s_i$, $i = 1, 2$, непрерывны и для каждой пары $(t, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ имеем $\partial g / \partial t_i (t, s) = 0$ при $i = 1, 2$ (если $D_1 f(x(t), y(s)) = 0$) или $\dfrac{\partial g}{\partial s_i}(t, s) = 0$ при $i = 1, 2$ (в случае, когда $D_2 f(x(t), y(s)) = 0$). Поэтому в силу доказанного на первом этапе $\partial g / \partial t_i = 0$, $i = 1, 2$, на $\mathbb{R}^4$ или $\partial g / \partial s_i = 0$, $i = 1, 2$, на $\mathbb{R}^4$. Но

$$\frac{\partial g}{\partial t_1}(0, 0, 0, 0) = D_1 f(x_1, y_1) h_1 \neq 0 \text{ и } \frac{\partial g}{\partial s_1}(0, 1, 0, 1) = D_2 f(x_2, y_2) k_1 \neq 0,$$

что приводит к противоречию.

2. Покажем, модифицируя пример 1.23 из [1], что условие локальной выпуклости пространства V существенно. Пусть V — пространство всех действительных измеримых функций на $\mathbb{R}$ с топологией локальной сходимости по мере, т. е. сходимости по мере на каждом множестве конечной меры. Эта топология линейна хаусдорфова (почти всюду равные функции отождествляются), но не локально-выпукла. Обозначим через $e_{[t,\,s]}$, где $t\ s \in \mathbb{R}$, $t < s$, характеристическую функцию отрезка $[t, s]$ и рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^2 \to V$, определяемое с помощью формулы

$$f(t, s) = \begin{cases} te_{[t,s]}, & t < s, \\ 0, & t = s, \\ se_{[s,t]}, & t > s. \end{cases}$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = \begin{cases} e_{[t,s]}, & t < s, \\ 0, & t \geqslant s. \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = \begin{cases} 0, & t \leqslant s. \\ e_{[s,t]}, & t > s. \end{cases}$$

Производные $\partial f/\partial t$ и $\partial f/\partial s$, как легко видеть, непрерывны; в каждой точке $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ хотя бы одна из них обращается в нуль, но ни одна из них не является тождественным нулем.

3. Отметим, наконец, что в случае функций трех (а значит, и большего числа) переменных аналог доказанной теоремы не имеет места. Действительно, рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ цилиндры $Z_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1\}$ и $Z_2 = \{(x, y, z) : (y - 3)^2 + z^2 < 1\}$ и положим

$$f(x, y, z) = \begin{cases} e^{(x^2+y^2-1)^{-1}}, & (x, y, z) \in Z_1, \\ e^{((y-3)^2+z^2-1)^{-1}}, & (x, y, z) \in Z_2, \\ 0, & (x, y, z) \notin Z_1 \cup Z_2. \end{cases}$$

Ясно, что $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$, но ни одна из частных производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ не является тождественным нулем.

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук.— 1967.— 22, вып. 6.— С. 201—260.

Черновиц. ун-т

Получено 14.05.85