УДК 513.881

Е. А. Павлов

Характеристики для некоторых классов банаховых пространств и их приложения

Фейер (см., например, [1]) доказал, что среднее арифметическое первых n сумм Фурье функции $f(t)$ равномерно стремится к $f(t)$ при $n \to \infty$, если $f(t)$ — непрерывная функция с периодом 2π. Известно (см., например, [1]), что справедливо

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(t) = \int_0^{2\pi} f(t+u)\, \Phi_n(u)\, du, \tag{1}$$

где

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n} \sin^2 \frac{nu}{2} / \sin^2 \frac{u}{2}, \quad \int_0^{2\pi} \Phi_n(u)\, du = 1. \tag{2}$$

В [1] введен и изучен оператор более общего, чем (1), вида

$$K_\lambda f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) K[\lambda(x-u)]\, du, \quad \lambda > 0, \tag{3}$$

$$K(-x) = K(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1,$$

$K(x)$ ограничено на $[-1;\ 1]$; $x^2K(x)$ ограничено на всей оси. Доказано, что если $f(x)$ непрерывна в конечном интервале (α, β), то

$$\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda f(x) = f(x) \tag{4}$$

равномерно в любом замкнутом подынтервале интервала (α, β).

В данной работе доказывается, что соотношение (4) справедливо в смысле сходимости по норме некоторых классов банаховых пространств. Введены новые классы интегральных операторов, для которых верно соотношение, аналогичное (4).

При обобщении соотношения (4) возникла трудность — в каких терминах проводить доказательство, какие характеристики пространств при этом использовать. Оказалось удобным использовать обобщенный модуль непрерывности $\omega(f, t)_E$, который введен в [2].

Определение 1. *Пусть E — идеальная структура с нормой, инвариантной относительно сдвига. Введем характеристику* $\omega(f, t) = \sup\limits_{|\tau|\leqslant t} \| f(x+\tau) - f(x)\|_E$, $t > 0$, *которую будем называть модулем непрерывности функции f в пространстве E* (*см., например*, [3]).

Лемма 1. *Пусть E — сепарабельное симметричное пространство* [4]. *Тогда модуль непрерывности обладает свойствами*: 1) $\omega(f,\ 0)_E = 0$, 2) $\omega(f, t)_E$ *не убывает на* $[0, \infty)$, 3) $\omega(f, t)_E$ *полуаддитивна на* $[0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть E — сепарабельное симметричное пространство. Тогда справедливо соотношение*

$$\| K_\lambda f(x) - f(x)\|_E \to 0, \quad \lambda \to \infty, \tag{5}$$

где

$$K_\lambda f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) K(\lambda t)\, dt, \quad K(-x) = K(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1.$$

Доказательство. Учитывая симметричность ядра K, получаем

$$K_\lambda f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) K(\lambda t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} f(x-t) K(\lambda t)\, dt +$$

$$+ \lambda \int_{-\infty}^{0} f(x-t) K(\lambda t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} f(x-t) K(\lambda t)\, dt + \lambda \int_0^{\infty} f(x+t) K(\lambda t)\, dt. \tag{6}$$

Далее имеем

$$\| K_\lambda f(x) - f(x)\|_E \leqslant \left\| \lambda \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)] K(\lambda t)\, dt \right\|_E +$$

$$+ \left\| \lambda \int_0^{\infty} [f(x+t) - f(x)] K(\lambda t)\, dt \right\|_E \leqslant \left\| \int_0^{\infty} [f(x - s/\lambda) - f(x)]\, K(s)\, ds \right\|_E +$$

$$+ \left\| \int_0^{\infty} [f(x + s/\lambda) - f(x)] K(s)\, ds \right\|_E \leqslant 2 \int_0^{\infty} \omega(f;\ s/\lambda)_E K(s)\, ds. \tag{7}$$

Поскольку $\omega(f;\ s/\lambda) \leqslant 2\, \| f \|_E$ и почти при каждом фиксированном s, $\omega \downarrow$ $\downarrow 0$ при $\lambda \to \infty$, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе, получаем

$$2 \int_0^{\infty} \omega(f;\ s/\lambda)_E K(s)\, ds \to 0, \quad \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Теорема доказана.

Предложение 1. *Пусть E — идеальная структура, инвариантная относительно сдвига. Тогда, если $K(t) \in E$, $\varphi \in L_1$,* то $f(x) \in E$, *где* $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\varphi(x-t)\,dt$.

Доказательство вытекает из обобщенного неравенства Минковского [5] и вложения $E \subset L_1$ на $[0, 2\pi]$. Действительно, получаем

$$\|f(x)\|_E = \left\| \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\varphi(x-t)\,dt \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\|\varphi(x-t)\|_E dt = \frac{1}{\pi}\|K\|_{L_1}\|\varphi\|_E.$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\|f(x)\|_E \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_E\|\varphi\|_{L_1}.$$

Предложение 2. *Если $K \in E$, $\varphi \in E^1$, где E^1 — ассоциированное, по отношению к E, пространство* (см. [4, с. 65). *Тогда свертка $f(x)$ непрерывна на всей оси, где E сепарабельно и симметрично. Кроме того, выполняется неравенство*

$$\|f\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_E\|\varphi\|_{E^1}. \tag{9}$$

Доказательство неравенства (9) вытекает из обобщенного неравенства Гельдера (см. [4]). Далее на основании того же неравенства Гельдера получаем

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\|K(x+h-\cdot) - K(x-\cdot)\|_E\|\varphi\|_{E^1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\|K(\cdot+h) - K(\cdot)\|_E\|\varphi\|_{E^1} \leqslant \frac{1}{\pi}\omega(K;\ h)_E\|\varphi\|_{E^1} \to 0,$$

$h \to 0$, так как $\omega(K; h)_E \to 0$, если $h \to 0$ на основании леммы 1.

Предложение 3. *Если $f \in E$, где E — сепарабельное симметричное пространство, то справедливы соотношения* $\|f_h\|_E \leqslant \|f\|_E$, $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h - f\|_E = 0$, $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt$ — *функция Стеклова.*

Доказательство. В силу обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\|f_h\|_E = \left\| \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt \right\|_E \leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\|f\|_E\,dt = \|f\|_E.$$

Далее, снова применяя неравенство Минковского, имеем

$$\|f_h - f\|_E = \left\| \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}[f(x+t) - f(x)]\,dt \right\|_E \leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\omega(f, h)_E\,dt \to 0$$

при $h \to 0$.

Определение 2. *Пусть G_t — сильно непрерывная, равномерно ограниченная* (*с константой $C = 1$*) *полугруппа линейных операторов, непрерывно действующих в банаховом пространстве E. Обобщенным модулем непрерывности для функции $f \in E$ относительно полугруппы операторов G_t называется* (см. [2]) *числовая характеристика*

$$\omega_{G_t} f = \sup_{0<\tau\leqslant t}\|G_\tau f(x) - f(x)\|_E. \tag{10}$$

Приведем свойства указанной характеристики:

1) $\omega_{G_t} f$, как функция t, не убывает на $[0, +\infty)$;

2) $\omega_{G_t} f$ — полуаддитивная функция (функция $\omega_{G_t} f$ не определена в точке $t = 0$; доопределим ее, положив $\omega_{G_0} f = 0$);

3) с учетом предыдущего замечания $\omega_{G_t} f$ непрерывна в любой точке $t \in [0, +\infty)$.

Приложение введенной характеристики. Рассмотрим семейство интегральных операторов вида

$$T_{G_{t_\lambda}} f = 2\lambda \int_0^\infty G_\tau f(t) K(\tau\lambda)\, d\tau, \tag{11}$$

где ядро $K(\tau)$ таково, что $K(-\tau) = K(\tau)$; $\int_0^\infty K(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}$.

Теорема 2. *Пусть E — банахова идеальная структура* (см. [4]), *в которой действует сильно непрерывная и равномерно ограниченная полугруппа операторов G_t. Тогда справедливо соотношение $\| T_{G_{t\lambda}} f - f \|_E \to 0$, $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Имеем

$$T_{G_{t_\lambda}} f(t) - f(t) = 2\lambda \int_0^\infty G_\tau f(t) K(\tau\lambda)\, d\tau - f(t) =$$

$$= 2 \int_0^\infty [G_\tau f(t) - f(t)]\, \lambda K(\tau\lambda)\, d\tau.$$

Далее, обозначая $\lambda\tau = p$, получаем

$$\| T_{G_{t_\lambda}} f - f \|_E \leqslant 2 \int_0^\infty \| G_{p/\lambda} f - f \|_E K(p)\, dp. \tag{12}$$

Учитывая неравенство (12) и определение характеристики $\omega_{G_t} f$, находим

$$\| T_{G_{t_\lambda}} f - f \|_E \leqslant 2 \int_0^\infty \omega_{G_{p/\lambda}} f\, | K(p) |\, dp. \tag{13}$$

Из свойства 2 функции $\omega_{G_t} f$ следует, что почти при каждом фиксированном p $\omega_{G_{p/\lambda}} \downarrow 0$, $\lambda \to \infty$. Следовательно, почти при каждом фиксированном p

$$\omega_{G_{p/\lambda}} | K(p) | \downarrow 0, \quad \lambda \to \infty. \tag{14}$$

Имеем

$$2 \int_0^\infty \omega_{G_{p/\lambda}} f\, | K(p) |\, dp \to 0, \quad \lambda \to \infty. \tag{15}$$

Это означает, что $\| T_{G_{\tau_\lambda}} f - f \|_E \to 0$, $\lambda \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие. *Утверждение теоремы 2 справедливо, в частности, когда E — симметричное пространство, в котором непрерывно действуют операторы из G_t.*

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации — М. : Наука, 1965.— 480 с.
2. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук.— 1968.— **23**, вып. 4.— С. 117—178.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
5. *Павлов Е. А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн.— 1977.— **18**, № 1.— С. 112—117.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ — М. : Наука, 1977.— 742 с.
7. *Трибель X.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.— М. : Мир, 1980.— 664 с.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т

Получено 05.03.85,
после доработки — 30.07.85