УДК 517.91

В. А. Чуриков

Теорема о дифференциальном неравенстве для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = Ay, \quad y(a) = y^0, \tag{1}$$

где $A = (a_{ik}(x))$ — непрерывная $(n \times n)$-матрица, $y = \mathrm{col}(y_0, \ldots, y_{n-1})$.

Обозначим через $z = \mathrm{col}(z_0, \ldots, z_{n-1})$ непрерывно дифференцируемую вектор-функцию, удовлетворяющую условию $z(a) = y^0$, $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) = z' - Az$.

Теорема. *Пусть элементы матрицы A в $[a, b]$ удовлетворяют неравенствам $(-1)^{i+k} a_{ik} \geqslant 0$, $i \neq k$. Тогда для $i = \overline{0, n-1}$ из $(-1)^i \varphi_i \geqslant 0$ в $[a, b]$ следует $(-1)^i (z_i - y_i) \geqslant 0$ в этом промежутке.*

Доказательство. Функция $u = z - y$ является решением задачи

$$u' = Au + \varphi, \quad u(a) = 0. \tag{2}$$

Выполним преобразование переменных $u_i = v_i \exp \int\limits_a^x a_{ii}(t)\,dt$, $i = \overline{0, n-1}$, v_i — компоненты нового вектора v. Функция v является решением задачи

$$v' = Bv + \psi, \quad v(a) = 0, \tag{3}$$

где

$$\psi(x) = \mathrm{col}\left\{\varphi_i \exp\left(-\int\limits_a^x a_{ii}(t)\,dt\right)\right\}, \quad B = (b_{ij}(x)),$$

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ a_{ij} \exp \int\limits_a^x [a_{jj}(t) - a_{ii}(t)]\,dt, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Из (3) следует

$$v = \int\limits_a^x B(t)\,v(t)\,dt + \int\limits_a^x \psi(t)\,dt. \tag{4}$$

К уравнению (4) применим метод последовательных приближений. Примем за начальное приближение вектор $\Psi = \int\limits_a^x \psi(t)\,dt$. Если для $i = \overline{0, n-1}$ в $[a, b]$ выполняются неравенства $(-1)^i \varphi_i \geqslant 0$, то $(-1)^i \Psi_i \geqslant 0$ в $[a, b]$, где Ψ_i — компоненты вектора Ψ. Обозначим через $v_i^{(k)}$ k-е приближение v_i. Нетрудно убедиться, что из $(-1)^{i+j} b_{ij} \geqslant 0$ и $(-1)^i \Psi_i \geqslant 0$ в $[a, b]$ следует $(-1)^i v_i^{(k)} \geqslant 0$ в $[a, b]$. Следовательно, для $i = \overline{0, n-1}$ в $[a, b]$ выполняются неравенства $(-1)^i v_i \geqslant 0$.

Рассмотренная теорема является аналогом теоремы Т. Важевского о дифференциальном неравенстве для системы линейных дифференциальных уравнений (см., например, [1, с. 193] или [2, с. 89]).

1. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства.— М. : Мир, 1965.— 276 с.
2. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.— М. : Мир, 1968.— 183 с.

Херсон. индустр. ин-т

Получено 02.07.85,
после доработки — 05.12.85