УДК 517.98

Ю. С. Мішура, Ю. В. Томілов (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ АБСТРАКТНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

The method of successive approximations is applied to Volterra abstract equations of the form $x = f + a * Ax$, where A is a closed linear operator. The assumption is made that a kernel a is continuous but is not necessarily of bounded variation.

До абстрактних рівнянь Вольтерри вигляду $x = f + a * Ax$, де A — замкнений лінійний оператор, застосовується метод послідовних наближень. Припускається, що ядро a неперервне, але не обов'язково обмеженої варіації.

Розглянемо абстрактні рівняння Вольтерри вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Ax(s)\,ds, \quad x\colon R_+ \to X, \tag{1}$$

де X — банахів простір, A — замкнений лінійний оператор, $A\colon D(A) \subset X \to X$ з непорожньою резольвентною множиною (в цьому випадку $D(A)$ всюди щільна в X). Нехай $a \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$, $f \in C(R_+, X)$. Рівнянням типу (1) присвячено багато робіт (див., наприклад, [1–3] та бібліографію до них). Майже всі роботи, присвячені рівнянням типу (1), містять достатні умови існування їх розв'язків у припущенні, що існує $\dot{a} \in BV_{\text{loc}}$ Це припущення є незручним в багатьох випадках. Наприклад, деякі задачі гідродинаміки [4] приводять до необхідності розглядати випадкові ядра a вигляду

$$a(t) = a_0 + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dw(s),$$

де $w(t)$ — вінерівський процес. В цьому випадку $\dot{a}$, очевидно, не існує в класичному розумінні.

У даній роботі клас ядер a розширюється до $C(R_+)$, але звужується клас функцій f. Крім цього, спеціальна конструкція дозволяє застосувати до рівнянь (1) метод послідовних наближень (очевидно, його застосування ускладнюється через наявність оператора A).

Позначимо $C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Згідно з [5], $C^\infty(A)$ — простір Фреше з системою норм $\|x\|_n = \sum_{k=0}^n \|A^k x\|$, $x \in D(A^n)$, норми $\|x\|'_n = \|(A-\lambda_0 I)^n x\|$, $n \ge 1$, еквівалентні $\|x\|_n$ для кожного фіксованого $\lambda_0 \in \rho(A)$ і $C^\infty(A)$ всюди щільна в кожному $(D(A^n), \|\cdot\|_n)$, $n \ge 1$, та в X.

При фіксованому $T > 0$ розглянемо такий функціональний простір:

$$U(T,A) = \Big\{ x = x(s),\ s \in [0,T): x(s) \in C^\infty(A),\ A^k x \in C(R_+, X)$$
$$\text{для будь-якого} \quad k \ge 0,\ \sup_{k\ge 0} \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!} \sup_{t\le s} \|A^k x(t)\| ds < \infty \Big\}.$$

Лема 1. *$U(T,A)$ — банахів простір з нормою*

$$\|x\|_{U(T,A)} = \sup_{k\ge 0} \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!} \sup_{t\le s} \|A^k x(t)\| ds.$$

Доведення. Нехай

$$\| x_n - x_m \|_{U(T,\ A)} = \sup_{k\geq 0} \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!} \sup_{t\leq s} \left\| A^k x_n(t) - A^k x_m(t) \right\| ds \to 0, \quad m, n \to \infty. \tag{2}$$

Оскільки функція $\varphi_{m,n,k}(s) := \sup_{t\leq s} \left\| A^k x_n(t) - A^k x_m(t) \right\|$ невід'ємна, не спадає по s, то з (2) випливає

$$\varphi_{m,n,k}(s) \to 0 \text{ для будь-якого } s < T,\ k \geq 0. \tag{3}$$

Тому існує $\psi_k(s) = \lim_{n\to\infty} A^k x_n(s)$, $s \in [0, T)$, $k \geq 0$, і внаслідок замкненості A $\psi_k(s) = A^k \psi_0(s)$. Отже, $x(s) := \psi_0(s) \in C^\infty(A)$. Крім цього, з (3) $\sup_{t\leq s} \left\| A^k x_n(t) - A^k x(t) \right\| \to 0$, $n \to \infty$, звідки випливає сильна неперервність $A^k x(s)$ відносно s на $[0, T)$, $k \geq 0$. Очевидно, внаслідок (2), $\| x_n - x \|_{U(T,A)} \to 0$, $n \to \infty$, а тоді $x \in U(T, A)$.

Нехай функція $x^0 \in U(T, A)$ і $\lambda > 0$ фіксовані, ядро $a \in C(R_+)$. Розглянемо оператор B на $U(T, A)$ такого вигляду:

$$Bx = (B_\lambda x)(t) = \tilde{x}_t^0 + (\tilde{a} * A\tilde{x})(t), \quad t < T,$$

де $*$ означає згортку функцій, $\tilde{c}(t) = c(t) e^{-\lambda t}$, $C = x^0, a, x$.

Лема 2. *Оператор B переводить $U(T, A)$ в $U(T, A)$.*

Доведення. З неперервності функцій $\tilde{a}$, $\tilde{x}^0$ і $\tilde{x}$, замкненості оператора A і означення інтеграла Рімана як границі інтегральних сум випливає, що $Bx \in C^\infty(A)$, $t \in [0, T)$. Далі, оцінимо норму

$$\| Bx \|_{U(T,A)} \leq \| x^0 \|_{U(T,A)} + \sup_{k\geq 0} \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!} \sup_{t\leq s} \left(\int_0^t |\tilde{a}(t-u)| \left\| A^{k+1} x(u) \right\| du \right) ds \leq$$

$$\leq \| x^0 \|_{U(T,A)} + \sup_{t\leq T} |\tilde{a}(t)| \sup_{k\geq 0} \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!} \left(\int_0^s \left\| A^{k+1} x(u) \right\| du \right) ds =$$

$$= \| x^0 \|_{U(T,A)} + \sup_{t\leq T} |\tilde{a}(t)| \sup_{k\geq 0} \int_0^T \left\| A^{k+1} x(u) \right\| \left(\int_u^T \frac{(T-s)^k}{k!} ds \right) du \leq$$

$$\leq \| x^0 \|_{U(T,A)} + \sup_{t\leq T} |\tilde{a}(t)| \sup_{k\geq 0} \int_0^T \sup_{z\leq u} \left\| A^{k+1} x(z) \right\| \frac{(T-u)^{k+1}}{(k+1)!} du \leq$$

$$\leq \| x^0 \|_{U(T,A)} + \sup_{t\leq T} |\tilde{a}(t)| \| x \|_{U(T,A)} < \infty. \tag{4}$$

Залишається довести сильну неперервність $(A^k Bx)(t)$ відносно $t \in [0, T)$. Але $A^k x^0(t)$ має цю властивість, і для будь-яких $0 \leq t_1 < t_2 < T$

$$\left\| A^k \left(\int_0^{t_2} \tilde{a}(t_2 - s) Ax(s)\, ds \right) - \int_0^{t_1} \tilde{a}(t_1 - s) Ax(s)\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{a}(t_1 - s)| \left\| A^{k+1} x(s) \right\| ds + \int_0^{t_2} |\tilde{a}(t_2 - s) - \tilde{a}(t_1 - s)| \left\| A^{k+1} x(s) \right\| ds \leq$$

$$\leq \sup_{t\leq T}|\tilde{a}(t)|\int_{t_1}^{t_2}\left\|A^{k+1}x(s)\right\|ds + \sup_{s\leq T}|\tilde{a}(t_2-s)-\tilde{a}(t_1-s)|\int_0^{t_2}\left\|A^{k+1}x(s)\right\|ds. \qquad (5)$$

Якщо одну з точок, наприклад t_2, фіксовано, $t_1 \to t_2$, то права частина (5) прямує до нуля. Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $a \in C(R_+)$, $|a(0)| < 1$. Тоді існує таке $\lambda > 0$, що B_λ — стискуючий оператор.*

Доведення. Підберемо $\lambda_0 > 0$ так, щоб $q = \sup_{t\leq T}|\tilde{a}(t)| < 1$ (це можливо, коли $|a(0)| < 1$). Перевіримо, що оператор B_{λ_0} — стискуючий. Справді, цілком аналогічно до оцінок (4) одержуємо

$$\|B_{\lambda_0}x - B_{\lambda_0}y\|_{U(T,A)} \leq \sup_{t\leq T}|\tilde{a}(t)|\|x-y\|_{U(T,A)} = q\|x-y\|_{U(T,A)}.$$

Лему доведено.

Означення 1. *Функція $x \in C([0,T),X)$ називається розв'язком рівняння (1) на $[0,T)$, якщо вона перетворює (1) на тотожність на множині $[0,T)$.*

Теорема 1. *Якщо $a \in C(R_+)$, $|a(0)| < 1$, $f \in U(T,A)$, то рівняння (1) в класі $U(T,A)$ має єдиний розв'язок.*

Доведення. З урахуванням леми 3 і принципу стискуючих відображень рівняння

$$\tilde{x}(t) = \tilde{f}(t) + \int_0^t \tilde{a}(t-s)Ax(s)\,ds,$$

де $\tilde{c}(t) = c(t)e^{-\lambda_0 t}$, $c = x, f, a$, має єдиний розв'язок $\tilde{x} \in U(T,A)$, а тоді $e^{\lambda_0 t}\tilde{x}(t) \in U(T,A)$ — єдиний розв'язок рівняння (1) у вказаному класі.

У деяких випадках умову $|a(0)| < 1$ забезпечити неможливо. Якщо вона не виконується, клас „початкових" функцій f у рівнянні (1) треба звузити (в розумінні умов на зростання $A^n f$, $n \geq 0$).

Теорема 2. *Нехай $T > 0$ фіксоване, $a \in C(R_+)$,*

$$f \in V(T,A) = \Big\{ f = f(t) \in C^\infty(A) : A^n f \in C([0,T),X),\ n \geq 0,$$

$$\text{i} \quad \sup_{n\geq 0}\frac{T^n}{n!}\sup_{s\leq T}\left\|A^n f(s)\right\| < \infty \Big\}.$$

Тоді рівняння (1) має розв'язок на інтервалі $[0, T/(|a(0)|\vee 1))$. Цей розв'язок належить до класу $V_1(T,a,A) = \bigcap_{\varepsilon>0} V\left(T_\varepsilon^1, A\right)$ і два розв'язки з класу $V_1(T,a,A)$ співпадають на $[0,T_1)$, де

$$T_\varepsilon^1 = \frac{T}{1+|a(0)|(1+\varepsilon)}, \quad T_1 = \frac{T}{(1+|a(0)|)(|a(0)|\vee 1)} \quad (a \vee b = \max(a,b)).$$

Доведення. Розглянемо допоміжне рівняння

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \tilde{f}_\varepsilon(t) + \int_0^t \tilde{a}_\varepsilon(t-s)A\tilde{x}_\varepsilon(s)\,ds, \quad t \geq 0, \quad \tilde{c}_\varepsilon(t) = c(t)e^{-\lambda_\varepsilon t}. \qquad (6)$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\lambda_\varepsilon > 0$ таке, що $\sup_{t\leq T}|\tilde{a}_\varepsilon(t)| \leq$

$\leq |a(0)|(1+\varepsilon)$. Позначимо через a^{*k} k-кратну згортку функції a, $a^{*0} * b = b$. Доведемо збіжність в X ряду

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*n} * A^n \tilde{f}_\varepsilon\right)(t), \qquad t \in [0, T/((|a(0)| \vee 1)(1+\varepsilon))).$$

Справді,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*n} * A^n \tilde{f}_\varepsilon\right)(t) \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{s \leq t} |\tilde{a}_\varepsilon(s)| \right)^n \frac{t^n}{n!} \sup_{s \leq t} \left\| A^n \tilde{f}_\varepsilon(s) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)t)^n}{n!} \sup_{s \leq T} \left\| A^n f(s) \right\| < \infty,$$

якщо $t < T/((|a(0)| \vee 1)(1+\varepsilon))$. Але, внаслідок властивостей згортки

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = e^{-\lambda_\varepsilon t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{a}^{*n} * A^n f\right)(t),$$

отже, останній ряд збігається на інтервалі $[0, T/((|a(0)| \vee 1)(1+\varepsilon)))$. Позначимо

$$\tilde{x}_{\varepsilon,N}(t) = \sum_{n=0}^{N} \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*n} * A^n \tilde{f}_\varepsilon\right)(t) = e^{-\lambda_\varepsilon t} \sum_{n=0}^{N} \left(\tilde{a}^{*n} * A^n f\right)(t), \quad t < \frac{T}{(|a(0)| \vee 1)(1+\varepsilon)}.$$

Тоді

$$(\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) = \sum_{n=0}^{N} \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*(n+1)} * A^{n+1} \tilde{f}_\varepsilon\right)(t)$$

і

$$\tilde{x}_{\varepsilon,N}(t) - \tilde{f}_\varepsilon(t) - (\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) = -(\tilde{a}_\varepsilon^{*(N+1)} * A^{N+1} \tilde{f}_\varepsilon)(t).$$

Якщо $f \in V(T, A)$, то для будь-якого $t < T_\varepsilon^1$

$$\sup_{s \leq t} \left\| \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*(N+1)} * A^{N+1} \tilde{f}_\varepsilon\right)(s) \right\| \leq \frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)t)^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{s \leq t} \left\| A^{N+1} f(s) \right\| \to 0, \quad N \to \infty.$$

Більше того,

$$\sup_{s \leq t} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*(n)} * A^n \tilde{f}_\varepsilon\right)(s) \right\| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)t)^n}{n!} \sup_{s \leq t} \left\| A^n f(s) \right\| \to 0,$$

якщо $t < T_\varepsilon^1$. Отже, $\tilde{x}_{\varepsilon,N}(t) \rightrightarrows \tilde{x}_\varepsilon(t)$, звідки випливає, що $\tilde{x}_\varepsilon \in C([0, t], X)$, $t < T_\varepsilon^1$; крім цього, $\tilde{x}_{\varepsilon,N}(t) - \tilde{f}_\varepsilon(t) - (\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) \to 0$, тобто $(\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) \to \tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{f}_\varepsilon(t)$. Очевидно, $(\tilde{a}_\varepsilon * \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) \to (\tilde{a}_\varepsilon * \tilde{x}_\varepsilon)(t)$, і внаслідок замкненості оператора A $(\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_{\varepsilon,N})(t) \to (\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_\varepsilon)(t)$. Таким чином, $\tilde{x}_\varepsilon(t) = \tilde{f}_\varepsilon(t) + (\tilde{a}_\varepsilon * A \tilde{x}_\varepsilon)(t)$, і $\tilde{x}_\varepsilon$ — розв'язок рівняння (6) на $[0, T_\varepsilon^1)$. Звідси випливає, що $x(t) = \tilde{x}_\varepsilon(t) e^{\lambda_\varepsilon(t)}$ — розв'язок рівняння (1) на $[0, T_\varepsilon^1)$. Але $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{*n} * A^n f\right)(t)$, тобто не залежить від ε, $x \in C([0, T/(|a(0)| \vee 1)), X)$, тобто $x(t)$ — розв'язок (1) на $[0, T/(|a(0)| \vee 1))$. Далі, внаслідок замкненості оператора A $A^N \tilde{x}_\varepsilon(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{a}_\varepsilon^{*n} * A^{n+N} \tilde{f}_\varepsilon\right)(s)$ для всіх $s < [0, T/((|a(0)| \vee 1)(1+\varepsilon)))$, $N \geq 0$, і

$$\sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{N!}\sup_{s\le z}\left\|A^N\tilde{x}_\varepsilon(s)\right\| \le \sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\tilde{a}_\varepsilon^{*n} * A^{n+N}\tilde{f}_\varepsilon\right)(s)\right\| \le$$

$$\le \sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)z)^n}{n!}\sup_{s\le z}\left\|A^{n+N}f(s)\right\|.$$

Позначимо $q = |a(0)|(1+\varepsilon)z$. Тоді, якщо $z < T$ і $q < T$, то

$$\sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}\sup_{s\le z}\left\|A^{n+N}f(s)\right\| \le \sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{T^N}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{T}\right)^n C_{n+N}^n\frac{T^{n+N}}{(n+N)!}\sup_{s\le T}\left\|A^{n+N}f(s)\right\| \le$$

$$\le C_1\sup_{N\ge 1}\left(\frac{z}{T}\right)^N\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{T}\right)^n C_{n+N}^n = C_1\sup_{N\ge 1}\left(\frac{z}{T}\right)^N\frac{1}{(1-q/T)^N} < \infty,$$

якщо $z+q<T$ (тут $C_1>0$ — деяка стала). Отже, якщо $z < T_\varepsilon^1$, то

$$\sup_{N\ge 1}\frac{z^N}{N!}\sup_{s\le z}\left\|A^N x(s)\right\| < \infty,$$

значить, $x \in V(T_\varepsilon^1, A)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Таким чином,

$$x \in \bigcap_{\varepsilon>0}V\left(T_\varepsilon^1, A\right) = V_1(T, a, A).$$

Нехай y — розв'язок (1), що належить до класу $V_1(T, a, A)$. Позначимо $v_t = x_t - y_t$. Тоді $v_t = (a * Av)(t) = \ldots = (a^{*N} * A^N v)(t)$ для будь-якого $N \ge 1$. Але

$$\left\|\left(a^{*N} * A^N v\right)(t)\right\| \le e^{\lambda_\varepsilon t}\left\|\left(\tilde{a}_\varepsilon^{*N} * A^N\tilde{v}_\varepsilon\right)(t)\right\| \le \frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)t)^N}{N!}\sup_{s\le t}\left\|A^N v(s)\right\| \le$$

$$\le \frac{(|a(0)|(1+\varepsilon)t)^N}{N!}\sup_{s\le t}\left(\left\|A^n x(s)\right\| + \left\|A^n y(s)\right\|\right) \to 0,$$

якщо $(1 \vee |a(0)|)(1+\varepsilon)t < T_\varepsilon^1$, тобто $t < T[(1+|a(0)|(1+\varepsilon))(1 \vee |a(0)|)(1+\varepsilon)]^{-1}$. Отже, два розв'язки з класу $V_1(T, a, A)$ співпадають на T_1. Теорему доведено

***Зауваження* 1.** Розв'язок $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ рівняння (6), а значить, і $x(t)$, є границею послідовних наближень, хоча відповідні оператори

$$(B_\varepsilon x)(t) = \tilde{f}_\varepsilon(t) + (\tilde{a}_\varepsilon * Ax)(t) \text{ і } (Bx)(t) = f(t) + (a * Ax)(t)$$

не обов'язково є стискуючими.

Розглянемо тепер клас функцій $V(A) = \bigcap_{T>0}V(T, A)$. Очевидно,

$$V(A) = \left\{f = f(t) \in C^\infty(A)\colon A^n f \in C(R_+, X) \text{ і } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{n!}\sup_{s\le T}\left\|A^n f(s)\right\| < \infty, \ T > 0\right\}.$$

Наступний результат є безпосереднім наслідком теореми 2.

Теорема 3. *Нехай $a \in C(R_+)$, $f \in V(A)$. Тоді рівняння* (1) *має на R_+ в класі $V(A)$ єдиний розв'язок.*

***Зауваження* 2.** Нехай $f(t) = x \in X$, $t \ge 0$. Тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$x_t = x + \int_0^t a(t-s)Ax_s\,ds, \qquad t \geq 0. \tag{7}$$

З теорем 1 – 3 випливають наступні твердження.

1. Нехай $a \in C(R_+)$, $|a(0)| < 1$,

$$x \in \tilde{U}(T,A) = \left\{ x \in C^\infty(A) : \sup_{n\geq 0} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \| A^n x \| < \infty \right\}.$$

Тоді рівняння (7) має в класі $U(T, A)$ єдиний розв'язок.

2. Нехай $a \in C(R_+)$,

$$x \in \tilde{V}(T,A) = \left\{ x \in C^\infty(A) : \sup_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \| A^n x \| < \infty \right\}.$$

Тоді рівняння (7) має розв'язок на $[0, T/(|a(0)| \vee 1))$, він належить до $V_1(T, a, A)$ і два розв'язки з класу $V_1(T, a, A)$ співпадають на $[0, T_1)$ (відповідні позначення введено в теоремі 2).

3. Нехай

$$x \in \tilde{V}(A) = \bigcap_{T>0} \tilde{V}(T,A) = \left\{ x \in C^\infty(A) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \| A^n x \| < \infty, T > 0 \right\}.$$

Тоді рівняння (7) має в класі $V(A)$ єдиний розв'язок.

В останньому випадку цікавим є питання, коли множина $\tilde{V}(A)$ всюди щільна в X. Згідно із [6, 7], кожна з наступних умов забезпечує щільність $\tilde{V}(A)$ в X:

а) оператори $\pm A$ дисипативні, $A^{-1} \in L(X)$, $A^2 = B$ і оператор B генерує C_0-косинус-функцію;

б) оператор A генерує C_0-групу.

Нехай рівняння (7) має розв'язок при кожному $x \in X_1 \subset X$. Позначимо цей розв'язок через $x_t(x)$ і поставимо у відповідність $X_1 \ni x \to S_t x = x_t(x)$. Одержали сім'ю операторів $S_t : X_1 \to X$, сильно неперервну по $t \in R_+$. Припустимо, що $X_1 \subset D(A)$ і для кожного $x \in X_1$ $AS_t x = S_t Ax$, $t \in R_+$. Будемо говорити в цьому випадку, що S_t комутує з A на X_1.

Теорема 4. *Нехай $a \in C(R_+)$, рівняння (7) має розв'язок $S_t x$, $t \in R_+$, при $x \in D(A^n)$ для деякого $n \geq 0$, оператори S_t допускають оцінку $\| S_t x \| \leq \varphi(t) \| x \|_n$, $\varphi(t)$ — деяка функція, $\| x \|_n = \sum_{n=0}^{n} \| A^n x \|$, $x \in D(A^n)$, множина $\tilde{V}(A)$ всюди щільна в X і S_t комутує з A на $\tilde{V}(A)$. Тоді розв'язок рівняння (7) при $x \in D(A^n)$ єдиний і подається у вигляді ряду*

$$S_t x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{*n} * 1 \right)(t) A^n x, \quad \textit{якщо} \quad x \in \tilde{V}(A),$$

і у вигляді „продовження"

$$S_t x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{*n} * 1 \right)(t) A^n x_k, \quad \textit{якщо} \quad x \in D(A^n) \setminus \tilde{V}(A)$$

(тут $x_k \in \tilde{V}(A)$ і $\| x - x_k \|_n \to 0$, $k \to \infty$).

Доведення. Нехай $x \in \tilde{V}(A)$. Подамо розв'язок $S_t x$ у вигляді

$$S_t x = \sum_{n=0}^{m-1} \left(a^{*n} * 1\right)(t) A^n x + \left(a^{*m} * A^m S x\right)(t). \tag{8}$$

Але внаслідок того, що $S_t A^m x = A^m S_t x$, $x \in \tilde{V}(A)$, останній доданок у правій частині (8) допускає оцінку

$$\left\| \left(a^{*m} * A^m S x\right)(t) \right\| \le \frac{\left(a_t^* t\right)^m}{m!} \left\| A^m x \right\|_n, \qquad a_t^* = \sup_{s \le t} |a(s)|.$$

Оскільки $x \in \tilde{V}(A)$, то для будь-яких $N \ge 0$ і $T > 0$ існує стала $C_1 = C_1(T, x)$ така, що $\left(\left\| A^N x \right\| / N!\right) T^N \le C_1$. Тому, якщо покласти $T = 2 a_t^* t$, то для відповідної сталої C_1 одержимо

$$\frac{\left(a_t^* t\right)^m}{m!} \left\| A^m x \right\|_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2 a_t^* t\right)^{m+k}}{(m+k)!} \left\| A^{m+k} x \right\| \frac{1}{2^{m+k}} \frac{1}{\left(a_t^* t\right)^k} (m+1) \ldots (m+k) \le$$

$$\le \frac{C_1}{2^m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(m+1) \ldots (m+k)}{T^k} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Отже,

$$S_t x = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m-1} \left(a^{*n} * 1\right)(t) A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{*n} * 1\right)(t) A^n x, \qquad x \in \tilde{V}(A).$$

Нехай тепер $x \in D(A^n)$. Оскільки $\tilde{V}(A)$ всюди щільна в X, то вона всюди щільна в $D(A^n)$ в нормі $\|\cdot\|_n$. Тому для $x \in D(A^n)$ існує $x_k \in \tilde{V}(A)$, $\|x - x_k\|_n \to 0$, $k \to \infty$, а тоді

$$\left\| S_t x - S_t x_k \right\| \le \varphi(t) \|x - x_k\|_n \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** Функція $\varphi(t)$ в багатьох випадках [2] дорівнює $M e^{\omega t}$.

1. *Prüss J.* On regularity and positivity of hyperbolic Volterra equations in Banach spaces // Math. Ann. – 1987. – **279**. – P. 317 – 344.
2. *Prüss J.* Evolutionary integral equations in Banach spaces. – Basel: Birkhaüser, 1993. – 468 p.
3. *Ahmed N. U.* Generalized solutions for linear systems governed by operators beyond the Hille – Yosida type // Publ. Math. Debrecen. – 1996. – **48**, № 1. – P. 45 – 64.
4. *Pipkin A. C.* Lectures on viscoelasticity theory, 2nd edition // Appl. Math. Sci. 7. – Springer-Verlag, 1986. – 188p.
5. *Wrobel V.* Spectral properties of operators generating Frechet-Montel spaces // Math. Nachr. – 1986. – **129**. – P. 9 – 20.
6. *Cioranesku I., Neumann U.* Stieltjes vectors and cosine functions generators // Stud. math. – 1987. – **87**. – P. 1 – 7.
7. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1412 – 1422.

Одержано 08.07.97

УДК 519.41/47

М. М. Семко (Укр. фін.-екон. ін-т, Ірпінь)

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[ )-ГРУП

A notion of CDN[ )-group is introduced: G is a CDN[ )-group if, for any pair of its subgroups A and B such that A is a proper nonmaximal subgroup of B, there exists a normal subgroup N which belongs to G and satisfies $A \le N < B$. Fifteen types of nilpotent non-Dedekind groups and nine types of nonnilpotent locally graded groups of this sort are obtained.

Вводиться поняття УЩН[ )-групи — такої групи G, у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \le N < B$. Одержано 15 типів нільпотентних недедекіндових та 9 типів ненільпотентних локально ступінчастих груп такого роду.

У роботі [1] описано один підклас класу УЩН[ ]-груп, повний опис якого можна знайти в [2]. Інший природний підклас названого класу груп становлять УЩН[ )-групи. УЩН[ )-групою називається така група G, у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \le N < B$. В даній роботі одержано повний опис локально ступінчастих УЩН[ )-груп. Необхідні означення можна знайти в [2].

Теорема 1. *Нільпотентні недедекіндові УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів*:

1) $G = (\langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p *і* r — *прості числа*, $[u, v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z\rangle$, C — *локально циклічна 2-група*, $|C| > 2$, Q — *група кватерніонів порядку* 8, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

3) $G = ((C \times \langle u\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle) \times \langle z\rangle$, C — *локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку* 8, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v\rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p *і* r — *прості числа*, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \ne 32$; *при* $|z| = r$ $|u| \cdot |v| \ne p^2$;

4) $G = (\langle a\rangle\langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

5) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

6) $G = A \leftthreetimes \langle x\rangle$, $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 1$, $|x| = p$ — *просте число*, $p\beta > 4$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

7) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

8) $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)) \times \langle z\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

9) $G = U \leftthreetimes X$, U — *циклічна 2-група чи група кватерніонів порядку* 8, $|U| > 2$, X — *група кватерніонів порядку* 8, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$;