УДК 517.95

С. П. Лавренюк, М. Б. Пташник (Львів. ун-т)

ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

We consider nonlinear pseudoparabolic variational inequality in a tube domain semibounded in variable t. Under certain conditions imposed on coefficients of the inequality, we prove existence theorem and a theorem on the uniqueness of solution without restrictions on its behavior as $t \to -\infty$.

Розглянуто нелінійну псевдопараболічну варіаційну нерівність в напівобмеженій за змінною t циліндричній області. За певних умов на коефіцієнти нерівності доведено теореми існування та єдиності розв'язку без обмеження на його поведінку при $t \to -\infty$.

Відомо, що фільтрація рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передача тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в грунті [3] моделюються крайовими задачами для псевдопараболічних рівнянь. Загальна теорія таких рівнянь, а також крайові задачі для них були предметом досліджень багатьох авторів [3 – 15]. Наприклад, у [14, 15] досліджено задачі без початкових умов для деяких псевдопараболічних систем.

Псевдопараболічні варіаційні нерівності дають можливість отримати умови коректної розв'язності деяких інших крайових задач для псевдопараболічних рівнянь.

У даній роботі доведено коректність однієї нелінійної псевдопараболічної варіаційної нерівності без початкових умов у класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$.

Зазначимо, що деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов досліджено у роботах [16 – 18]. Крім цього, у роботі [19] отримано деякі умови однозначної розв'язності псевдопараболічної нерівності, породженої лінійним псевдопараболічним оператором. При цьому на поведінку розв'язку накладено умову зростання при $t \to -\infty$ не швидше, ніж $e^{-\lambda t}$, де λ визначається коефіцієнтами нерівності. Результати, викладені у [19], не можуть бути отримані з цієї роботи.

Нехай Ω — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^1$; $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $\Omega_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2 < T$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$; V — замкнений підпростір, неперервно і компактно вкладений в $L^2(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$; K — опукла замкнена підмножина в V, яка містить нульовий елемент.

За норму простору V виберемо норму простору $H^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Розглянемо таку варіаційну нерівність:

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[v_t(v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\, v_{x_i,t}(v_{x_j} - u_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}(v_{x_j} - u_{x_j}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij,t}(x,t)(v_{x_i} - u_{x_i})(v_{x_j} - u_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)\, u_{x_i}(v-u) + c_0(x,t)\, u(v-u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i})+g(x)|u|^{p-2}u(v-u)-f_0(x,t)(v-u)-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)(v_{x_i}-u_{x_i})\right]dx\,dt\ \geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_2}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t_2)(v_{x_i}-u_{x_i})(v_{x_j}-u_{x_j})+(v-u)^2\right]dx\ -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t_1)(v_{x_i}-u_{x_i})(v_{x_j}-u_{x_j})+(v-u)^2\right]dx\,. \qquad (1)$$

Означення. *Під розв'язком нерівності* (1) *розумітимемо таку функцію* $u(x,t)$, *що* $u\in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];H^1(\Omega))$; $u\in L^p_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];W^{1,p}(\Omega))$ *і* $u_t\in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];H^1(\Omega))$; $u\in K$ *майже для всіх* $t\in(-\infty,T]$; $u(x,t)$ *задовольняє* (1) *для всіх* $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$, *та для всіх функцій* $v(x,t)$ *таких, що* $v\in H^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];H^1(\Omega))\cap L^p_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];W^{1,p}(\Omega))$ *і* $v\in K$ *майже для всіх* $t\in(-\infty,T]$.

Нехай коефіцієнти нерівності (1) задовольняють відповідно умови A_1, A_2, B, C, G:

умова A_1:

$$a_{ij}\in L^\infty(Q_T),\quad i,j=1,\ldots,n;\qquad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ \geq\ a_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad a_0>0,$$

для майже всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t)\in Q_T$;

умова A_2:

$$\alpha_i\in L^\infty(\Omega),\quad \alpha_i(x)\geq\alpha_0>0,\quad i=1,\ldots,n;$$

умова B:

$$b_{ij}(x,t)=b_{ji}(x,t),\qquad b_{ij},\ b_{ij\,t}\in L^\infty(Q_T),\quad i,j=1,\ldots,n;$$

$$b_k\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\ \leq\ \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^k b_{ij}(x,t)}{\partial t^k}\xi_i\xi_j\ \leq\ b^k\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2;$$

$$b_0>0;\quad k=0,1;\quad b=\min\{b_1,-b^1\},$$

для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t)\in Q_T$;

умова C:

$$c_i\in L^\infty(Q_T),\quad i=1,\ldots,n;\qquad \sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}c_i^2(x,t)=c^1,$$

$$c_0\in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];L^\infty(\Omega));\qquad c_0(x,t)\geq c^0>0,\quad (x,t)\in Q_T;$$

умова G:

$$g \in L^{\infty}(\Omega); \quad g(x) \geq g_0 > 0, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів нерівності* (1) *виконуються умови* A_1, A_2, B, C, G *і, крім того,* $(4a_0 - 2b^1)\,c^0 > c^1$. *Тоді нерівність* (1) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Визначимо оператори A і B_1 за формулами

$$\langle A w^1, w^2\rangle(t) = \int_\Omega \Bigg(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, w^1_{x_i} w^2_{x_j} + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\, |w^1_{x_i}|^{p-2} w^1_{x_i} w^2_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x,t)\, w^1_{x_i} w^2 + c_0(x,t)\, w^1 w^2 + g(x)\, |w^1|^{p-2} w^1 w^2 \Bigg) dx,$$

$$\langle B_1 w^1, w^2\rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n b_{ijt}(x,t)\, w^1_{x_i} w^2_{x_j}\, dx,$$

де w^1, w^2 — довільні функції з V.

Легко переконатися, що при виконанні умов теореми оператор $A - B_1$ є рівномірно монотонним. Справді,

$$\big\langle (A-B_1) w^1 - (A-B_1) w^2, w^1 - w^2 \big\rangle \geq$$

$$\geq \int_\Omega \Bigg[\left(a_0 - \frac{b^1 + c^1 \delta_0}{2} \right) \sum_{i=1}^n |w^1_{x_i} - w^2_{x_i}|^2 + \left(c^0 - \frac{1}{2\delta_0} \right) |w^1 - w^2|^2 +$$

$$+ 2^{2-p} \alpha_0 \sum_{i=1}^n |w^1_{x_i} - w^2_{x_i}|^p + 2^{2-p} g_0\, |w^1 - w^2|^p \Bigg] dx \geq$$

$$\geq \beta_0 \int_\Omega \Bigg(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)\, |w^1_{x_i} - w^2_{x_i}|\, (w^1_{x_j} - w^2_{x_j}) + (w^1 - w^2)^2 \Bigg) dx, \tag{2}$$

де $\beta_0 = (n+1)^{(2-p)/2}\, 2^{2-p} \min\{\alpha_0, g_0\} \left(\min\left\{1, \frac{1}{b_0}\right\} \right)^{p/2}$.

Нехай $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$ — два розв'язки нерівності (1). Тоді для функції $v(x,t) = \frac{1}{2}(u^1(x,t) + u^2(x,t))$ справджуються нерівності

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t - f^k)(v - u^k) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\, v_{x_i,t} (v_{x_j} - u^k_{x_j}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ijt} (v_{x_i} - u^k_{x_i})(v_{x_j} - u^k_{x_j}) \Bigg] dx\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_{Q_{t_2}} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (v_{x_i} - u^k_{x_i})(v_{x_j} - u^k_{x_j}) + (v - u^k)^2 \Bigg] dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_1}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (v_{x_i} - u^k_{x_i})(v_{x_j} - u^k_{x_j}) + (v - u^k)^2 \right] dx ,$$

де

$$f^k = f_0 - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i} - A u^k, \quad k = 1, 2.$$

Додавши ці дві нерівності, матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[(f^1 - f^2)(u^1 - u^2) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt} (u^1_{x_i} - u^2_{x_i})(u^1_{x_j} - u^2_{x_j}) \right] dx\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_2}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (u^1_{x_i} - u^2_{x_i})(u^1_{x_j} - u^2_{x_j}) + (u^1 - u^2)^2 \right] dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_1}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (u^1_{x_i} - u^2_{x_i})(u^1_{x_j} - u^2_{x_j}) + (u^1 - u^2)^2 \right] dx . \tag{3}$$

На підставі виразу для функцій f^k, $k = 1, 2$, оцінку (3) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) (u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) (u^1_{x_j} - u^2_{x_j}) + (u^1 - u^2)^2 \right) dx \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle (A - B_1) u^1 - (A - B_1) u^2, u^1 - u^2 \rangle \, dt \leq 0 .$$

Звідси за допомогою оцінки (2) отримуємо нерівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (y'(t) + \beta_1 (y(t))^{p/2}) \, dt \leq 0 , \tag{4}$$

де

$$y(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (u^1_{x_i} - u^2_{x_i})(u^1_{x_j} - u^2_{x_j}) + (u^1 - u^2)^2 \right] dx ,$$

$$\beta_1 = \frac{2\beta_0}{(\operatorname{mes}\Omega)^{(p-2)/2}} .$$

Враховуючи довільність чисел t_1 і t_2, з оцінки (4) отримуємо нерівність

$$y'(t) + \beta_1 (y(t))^{p/2} \leq 0$$

для майже всіх $t \in (-\infty, T]$.

Тоді за лемою 2 із [20] маємо, що $y(t) = 0$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$, тобто $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ майже скрізь в Q_T. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів нерівності* (1) *виконуються умови* A_1, A_2, B, C, G *і, крім того,* $a_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $i, j = 1, \ldots, n$; $c_{i,t} \in L^\infty(Q_T)$, $i = 0, 1, \ldots, n$; *існує таке додатне число* γ, *що*

$$p_0 = 2a_0 - 2b^0\gamma - b > 0, \quad 2(g_0 - \gamma)p_0 > h_1,$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=0}^{n} (f_i^2(x,t) + f_{i,t}^2(x,t))e^{2\gamma t}\,dx\,dt < \infty.$$

Тоді існує розв'язок $u(x,t)$ *нерівності* (1).

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{\varphi^i\}$, які мають такі властивості: $\varphi^i \in W^{1,p}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$; для довільного k функції $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ лінійно незалежні; лінійні комбінації φ^i щільні в $W^{1,p}(\Omega)$.

Нехай

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\,\varphi^k(x), \quad N = 1, 2, \ldots,$$

де $c_1^N, \ldots, c_N^N$ — розв'язок задачі Коші:

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg(u_t^N\varphi^k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i,t}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} c_i u_{x_i}^N\varphi^k + c_0u^N\varphi^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^N\varphi_{x_i}^k + g|u^N|^{p-2}u^N\varphi^k - f_0^{t_0}\varphi^k - \sum_{i=1}^{n} f_i^{t_0}\varphi_{x_i}^k\Bigg)dx +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\langle\mathcal{B}(u^Ne^{\gamma t}), \varphi^k\rangle = 0, \quad t \in [t_0, T], \tag{5}$$

$$c_k^N(t_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{6}$$

Тут $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}$ — оператор штрафу [16, с. 384]; $\mathcal{B}(u) = J(u - P_Ku)$, J — оператор двоїстості між просторами $H^1(\Omega)$ і $(H^1(\Omega))^*$; P — оператор проектування на множину K;

$$f_i^{t_0}(x,t) = \begin{cases} f_i(x,t), & \text{якщо } (x,t) \in Q_{t_0,T}; \\ 0, & \text{якщо } (x,t) \in Q_{t_0}. \end{cases}$$

Існування розв'язку задачі (5), (6) буде випливати з наступних апріорних оцінок. Продовжимо функції $c_k^N(t)$ нулем на проміжок $(-\infty, t_0]$ і зробимо у системі (5) заміну $u^N(x,t) = v^N(x,t)e^{-\gamma t}$. Тоді $u_t^N(x,t) = v_t^N(x,t)e^{-\gamma t} - \gamma v_t^N(x,t)e^{-\gamma t}$ і задача (5), (6) набуде вигляду

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[v_t^N\varphi^k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}v_{x_i,t}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij} - \gamma b_{ij})v_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i v_{x_i}^N\varphi^k + (c_0 - \gamma)v^N\varphi^k + e^{-\gamma(p-2)t}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_{x_i}^N|^{p-2}v_{x_i}^N\varphi_{x_i}^k +$$

$$+ e^{-\gamma(p-2)t}g|v^N|^{p-2}v^N\varphi^k - \left(f_0^{t_0}\varphi^k + \sum_{i=1}^{n} f_i^{t_0}\varphi_{x_i}^k\right)e^{\gamma t}\Bigg]dx +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\langle\mathcal{B}(v^N), \varphi^k\rangle = 0, \tag{7}$$

$$v^N(t_0) = 0. \tag{8}$$

Домноживши кожне рівняння системи (7) відповідно на функцію $c_k^N(t)\,e^{\gamma t}$, підсумувавши їх за індексом k від 1 до N і проінтегрувавши по проміжку $[t_1, \tau] \subset [t_0, T]$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{t_1,\tau}} \Bigg[v_t^N v^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_i,t}^N v_{x_j}^N + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - \gamma b_{ij}) v_{x_i}^N v_{x_j}^N + $$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i v_{x_i}^N v^N + (c_0 - \gamma)(v^N)^2 + e^{-\gamma(p-2)t} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |v_{x_i}^N|^p + g\,|v^N|^p \right) -$$

$$- \left(f_0^{t_k} v^N + \sum_{i=1}^n f_i^{t_0} v_{x_i}^N \right) e^{\gamma t} \Bigg] dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_1}^{T} \langle \mathcal{B}(v^N), v^N \rangle\, dt = 0. \tag{9}$$

На підставі умов теореми з рівності (9) легко одержати такі оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(|v^N|^2 + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 \right) dx \le \mu_1 F_{0,\gamma}, \tag{10}$$

$$\int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left(|v^N|^2 + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 \right) dx\,dt \le \mu_1 F_{0,\gamma}, \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_{t_1,\tau}} e^{-\gamma(p-2)t} \left(|v^N|^p + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^{p-2} \right) dx\,dt \le \mu_1 F_{0,\gamma}, \tag{12}$$

$$\int\limits_{t_1}^{T} \langle B(v^N), v^N \rangle\, dt \le \mu_1 \varepsilon F_{0,\gamma}, \tag{13}$$

де $\tau \in [t_1, T]$; стала μ_1 не залежить від ε, n і t_1;

$$F_{0,\gamma} = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^2 e^{2\gamma t}\, dx\,dt.$$

Продиференціюємо рівняння (7) за змінною t, домноживши кожне рівняння відповідно на функцію $(c_{k,t}^N(t) + \gamma c_k^N(t))\,e^{\gamma t}$, підсумуємо їх по k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[t_1, \tau]$. В результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \Bigg[v_{tt}^N v_t^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_i,tt}^N v_{x_j,t}^N + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - \gamma b_{ij} + b_{ij,t}) v_{x_i,t}^N v_{x_j,t}^N + $$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i v_{x_i,t}^N v_t^N + (c_0 - \gamma)(v_t^N)^2 \Bigg] dx\,dt +$$

$$+ (p-1) \int\limits_{Q_{t_1,\tau}} e^{-\gamma(p-2)t} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |v_{x_i}^N|^{p-2} (v_{x_i,t}^N)^2 + g\,|v^N|^{p-2} (v_t^N)^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \gamma(p-2) \int\limits_{Q_{t_1,\tau}} e^{-\gamma(p-2)t} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_{x_i}^N|^{p-2} v_{x_i}^N v_{x_i,t}^N + g |v^N|^{p-2} v^N v_t^N \right] dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij,t} - \gamma b_{ij,t}) v_{x_i}^N v_{x_j,t}^N + \sum_{i=1}^{n} c_{i,t} v_{x_i}^N v_t^N + c_{0,t} v^N v_t^N - \right.$$

$$\left. - \left((f_{0,t}^{t_0} + \gamma f_0^{t_0}) v_t^N + \sum_{i=1}^{n} (f_{i,t}^{t_0} + \gamma f_i^{t_0}) v_{x_i,t}^N \right) e^{\gamma t} \right] dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t_1}^{T} \langle \mathcal{B}_t(v^N), v_t^N \rangle\, dt = 0. \tag{14}$$

Враховуючи, що $\langle \mathcal{B}_t(v^N), v_t^N \rangle \geq 0$ [16, с. 413], а також умови теореми і оцінки (10) – (12), з рівності (14) неважко одержати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(|v_t^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i,t}^N|^2 \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left[\left(a_0 - \gamma b^0 + \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} \delta_0 c^1 - \delta_1 \right) \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i,t}^N|^2 + \right.$$

$$\left. + \left(c_0 - \gamma - \frac{1}{2\delta_0} - \delta_2 \right) |v_t^N|^2 \right] dx\, dt \leq$$

$$\leq \mu_2 e^{-\gamma(p-2)\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} \left(|v^N|^p + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}^N|^p \right) dx + \mu_2 F_{0,\gamma} + \mu_2 F_{1,\gamma}, \tag{15}$$

де стала μ_2 не залежить від ε, N і t_1; $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, а

$$F_{1,\gamma} = \int\limits_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{n} |f_{i,t}(x,t)|^2 e^{2\gamma t}\, dx\, dt.$$

На підставі оцінки (12) і леми Фату маємо

$$\int\limits_{t_1}^{T} \liminf \|v^N\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p e^{-\gamma(p-2)t}\, dt \leq \mu_1 F_{0,\gamma}.$$

Отже,

$$e^{-\gamma(p-2)t} \liminf \|v^N\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p < \infty$$

для майже всіх $t \in [t_1, \tau]$. Тоді існує таке $\overline{\tau} \in [T-1, T]$, що вказана нижня границя скінченна при $\tau = \overline{\tau}$. Замінюючи τ на $\overline{\tau}$ і переходячи при потребі до підпослідовності, можна вважати, що

$$e^{-\gamma(p-2)\overline{\tau}} \|v^N(\overline{\tau})\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p < \mu_3, \tag{16}$$

де стала μ_3 не залежить від ε, N і t_1.

На підставі умов теореми можна вибрати числа δ_0, δ_1, δ_2 такими, що з нерівності (15) (з урахуванням оцінки (16)) буде випливати оцінка

$$\int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left(|v_t^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i,t}^N|^2 \right) dx\,dt \le \mu_4 (F_{0,\gamma} + F_{1,\gamma}), \tag{17}$$

де стала μ_4 не залежить від ε, N і t_1.

Враховуючи оцінки (10) – (12), (17) та монотонність операторів A_0, $\mathcal{B}$, де оператор A_0 визначений за формулою

$$\langle A_0 w^1, w^2 \rangle = \int\limits_{\Omega_t} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |w_{x_i}^1|^{p-2} w_{x_i}^1 w_{x_i}^2 + g |w^1|^{p-2} w^1 w^2 \right) dx,$$

$$w^1,\ w^2 \in W^{1,p}(\Omega),$$

можемо стверджувати існування такої граничної точки $v^{t_0}(x,t)$ послідовності $\{v^N(x,t)\}$, яка задовольняє рівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_1,\tau}} \Bigg[v_t^{t_0} w + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_{x_i,t}^{t_0} w_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \gamma b_{ij}) v_{x_i}^{t_0} w_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i v_{x_i}^{t_0} w + (c_0 - \gamma) v^{t_0} w \Bigg] dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\tau} \left(e^{-\gamma(p-2)t} \langle A_0 v^{t_0}, w \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathcal{B}(v^{t_0}), w \rangle \right) dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left(f_0 w + \sum_{i=1}^{n} f_i w_{x_i} \right) e^{\gamma t} dx\,dt \tag{18}$$

для довільної функції $w \in L_{\mathrm{loc}}^p((-\infty, T]; W^{1,p}(\Omega))$, де t_1 — довільне число з $[t_0, T]$.

Крім цього, для функції $v^{t_0}(x,t)$ справджуються оцінки (10) – (12), (17). Якщо послідовно покладати $t_0 = T-1$, $t_0 = T-2$, ... , $t_0 = T-k$, ... , то отримаємо нову послідовність функцій $\{v^k(x,t)\}$, кожна з яких є розв'язком рівняння (18) і справджує оцінки (10) – (12), (17). Тому дана послідовність теж має граничну точку $v^{\varepsilon}(x,t)$, яка задовольняє рівність (18) і оцінки (10) – (12), (17). Отже, можна вибрати таку послідовність $\{v^{\varepsilon_k}(x,t)\} \subset \{v^{\varepsilon}(x,t)\}$, що

$$v^{\varepsilon_k} \to v \quad \text{слабко в} \quad L^p((t_1, t_2); W^{1,p}(\Omega)),$$

$$v^{\varepsilon_k} \to v \quad \text{слабко в} \quad L^2((t_1, t_2); H^1(\Omega)),$$

$$v_t^{\varepsilon_k} \to v_t \quad \text{слабко в} \quad L^2((t_1, t_2); H^1(\Omega)),$$

$$v^{\varepsilon_k} \to v \quad \text{рівномірно в} \quad C([t_1, t_2]; H^1(\Omega))$$

при $\varepsilon \to 0$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Враховуючи монотонність операторів A_0, $\mathcal{B}$, маємо

$$A_0 v^{\varepsilon_k} \to A_0 v \quad \text{слабко в} \quad L^p((t_1, t_2); (W^{1,p}(\Omega))^*),$$

$$\mathcal{B}(v^{\varepsilon_k}) \to \mathcal{B}(v) \quad \text{слабко в} \quad L^2((t_1, t_2); (H^1(\Omega))^*)$$

при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи рівність (18), яка справджується для функцій $v^{\varepsilon_k}(x, t)$ і $\tau = t_2$, отримуємо

$$\mathcal{B}(v^{\varepsilon_k}) \to 0 \quad \text{слабко в} \quad L^2((t_1, t_2); (H^1(\Omega))^*).$$

Отже, $\mathcal{B}(v) = 0$, тобто $v \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$. Розглянемо тепер рівність (18) для функцій $v^{\varepsilon_k}(x, t)$ і $\tau = t_2$, поклавши $w = (z - u^k) e^{-\gamma t}$, $u^k = v^{\varepsilon_k} e^{-\gamma t}$, де $t \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty, T]$, $z \in H^1_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; H^1(\Omega)) \cup L^p_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; W^{1,p}(\Omega))$:

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u^k_t (z - u^k) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^k_{x_i,t} (z_{x_j} - u^k_{x_j}) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u^k_{x_i} (z_{x_j} - u^k_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \alpha_i |u^k_{x_i}|^{p-2} u^k_{x_i} (z_{x_i} - u^k_{x_i}) + \sum_{i=1}^n c_i u^k_{x_i} (z - u) + c_0 u^k (z - u^k) +$$

$$+ g |u^k|^{p-2} u^k (z - u^k) - f_0 (z - u^k) - \sum_{i=1}^n f_i (z_{x_i} - u^k_{x_i}) \Bigg] dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\langle B(z e^{-\gamma t}) - B(u^k e^{-\gamma t}),\, z - u^k \right\rangle dt \geq 0. \tag{19}$$

Після елементарних перетворень інтеграла

$$\int\limits_{\Omega_{t_1,t_2}} \Bigg[u^k_t (z - u^k) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^k_{x_i,t} (z_{x_j} - u^k_{x_j}) \Bigg] dx\, dt$$

нерівність (19) набуде вигляду

$$\int\limits_{\Omega_{t_1,t_2}} \Bigg[z_t (z - u^k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij,t} (z_{x_i} - u^k_{x_i})(z_{x_j} - u^k_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij} z_{x_i,t} (z_{x_j} - u^k_{x_j}) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u^k_{x_i} (z_{x_j} - u^k_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \alpha_i |u^k_{x_i}|^{p-2} u^k_{x_i} (z_{x_i} - u^k_{x_i}) + \sum_{i=1}^n c_i u^k_{x_i} (z - u^k) + c_0 u^k (z - u^k) +$$

$$+ g |u^k|^{p-2} u^k (z - u^k) - f_0 (z - u^k) - \sum_{i=1}^n f_i (z_{x_i} - u^k_{x_i}) \Bigg] dx\, dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_2}} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (z_{x_i} - u^k_{x_i})(z_{x_j} - u^k_{x_j}) + |z - u^k|^2 \Bigg] dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_1}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (z_{x_i} - u^k_{x_i})(z_{x_j} - u^k_{x_j}) + |z - u^k|^2 \right] dx . \tag{20}$$

Поклавши в (20) $z = u$, отримаємо сильну збіжність послідовності $\{u^k(x, t)\}$ до функції $u(x, t)$ у просторі $W^{1,p}(\Omega)$. Тому в нерівності (20) можна перейти до границі, коли $k \to \infty$. При цьому отримаємо нерівність (1), тобто функція $u(x, t)$ є шуканою. Теорему доведено.

1. *Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 3. – С. 852–864.
2. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. – 1948. – **12**, № 1. – С. 27–45.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Majchrovski M.* On inverse problems with nonlocal conditions for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations // Demonstr. math. – 1993. – **26**, № 1. – P. 255–275.
5. *Ting T. W.* Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Jap. – 1969. – **21**, № 3. – P. 440–453.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
7. *Gopala Rao V. R., Ting T. W.* Initial-boundary value problems for pseudoparabolic partial differential equations // Indiana Univ. Math. J. – 1973. – **23**, № 2. – P. 131–153.
8. *Showalter R. E.* Partial differential equations of Sobolev–Galpern type // Pacif. J. Math. – 1969. – **31**, № 3. – P. 787–793.
9. *Rundel W.* The solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1976. – **A 74**. – P. 311–326.
10. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, № 3. – P. 559–565.
11. *Сувейка И. В.* Смешанные задачи для одного нестационарного уравнения // Мат. исслед. – 1980. – № 58. – С. 99–123.
12. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 10. – С. 689–699.
13. *Cannon J. P., Lin Jamping.* Classical and weak solution for onedimensional pseudoparabolic equations with typical boundary data // Ann. mat. pura ed appl. – 1988. – № 152. – P. 375–389.
14. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболева–Гальперна // Укр. мат. журн. – 1996. –**48**, № 1. – С. 124–128.
15. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Задача Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи. – Київ, 1985. – 46 с. – Деп. в ДНТБ України, № 2017-Ук.95.
16. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
17. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
18. *Лавренюк С. П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 10. – С. 1–5.
19. *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 919–929.
20. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.

Одержано 17.10.97,
після доопрацювання — 16.04.98