УДК 519.21

*В. В. Булдыгин*

# О сходимости рядов Фурье стационарных гауссовских процессов

1. В настоящей статье изучается характер сходимости по вероятности рядов Фурье стационарных гауссовских процессов. Для упрощения обозначений разложения в ряд Фурье будут рассматриваться на интервале $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то частичные суммы ряда Фурье функции $f$ определяются свертками $D_n * f$, $n \geqslant 1$, где

$$(D_n * f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(t-u)\, du, \quad t \in R,$$

а $D_n$, $n \geqslant 1$, — ядра Дирихле:

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin u/2}, \qquad u \in R.$$

В теории тригонометрических рядов Фурье хорошо известно [1], что непрерывности функции $f$ не достаточно для равномерной сходимости ее ряда Фурье на интервале $[-a, a] \subset (-\pi, \pi)$. Ситуация не изменится, если вместо детерминированной функции $f$ рассмотреть общий (и даже гауссовский) центрированный случайный процесс, а сходимость в равномерной норме заменить сходимостью в равномерной норме по вероятности. Однако если $\xi = (\xi(t),\ t \in [-\pi, \pi])$ — сужение на интервал $[-\pi, \pi]$ вещественного стационарного центрированного гауссовского процесса и процесс $\xi$ непрерывен почти наверное (п. н.), то [2] для любого $[-a, a] \subset (-\pi, \pi)$

$$\| \xi - D_n * \xi \|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}} 0,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма на $[-a, a]$. Отсюда, в частности, следует, что из любой последовательности частичных сумм ряда Фурье процесса $\xi$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к $\xi$ равномерно п. н. на любом интервале $[-a, a] \subset (-\pi, \pi)$. Ниже будет показано, что аналогичное утверждение справедливо и для сходимости по вероятности ряда Фурье процесса $\xi$ в нормах, порожденных широким классом модулей непрерывности.

Пусть $\sigma(x)$, $x > 0$, — модуль непрерывности, т. е. неотрицательная функция $\sigma$ непрерывна, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(x) \leqslant \sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y)$ при $x, y \geqslant 0$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sigma(x)} = 0. \tag{1}$$

Простейшим примером таких модулей непрерывности являются функции $x^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $C[a, b]$ — пространство вещественных непрерывных на интервале $[a, b]$ функций, а $H_\sigma[a, b]$ — пространство функций $\varphi$ из $C[a, b]$, у которых конечна величина

$$\| \varphi \|_{[a,b]}^{(\sigma)} = \sup_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| + \sup_{t \neq s} \frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|}{\sigma(|t-s|)}. \tag{2}$$

Пространство $H_\sigma[a, b]$ относительно нормы (2) является банаховым несепарабельным пространством. Однако его подпространство $H_\sigma^0[a, b]$, состоящее из функций $\varphi$, удовлетворяющих условию $\sup_{|t-s|<h} |\varphi(t) - \varphi(s)| = o(\sigma(h))$, будет сепарабельным банаховым пространством относительно нормы (2). Далее будут рассматриваться сужения функций на различные интервалы. Условимся, что для функции $\varphi$, определенной на параметрическом множестве $T$, запись $\varphi \in \Phi(T_1)$, где $\Phi(T_1)$ — класс функций, определенных на $T_1 \subset T$, означает, что классу $\Phi(T_1)$ принадлежит сужение на $T_1$ функции $\varphi$. Стационарные процессы считаем вещественными и заданными на всей числовой оси $R$ Все случайные элементы задаются на базовом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

Теорема 1. *Пусть $\xi$ — стационарный центрированный гауссовский случайный процесс. Если $\xi \in H_\sigma^0[-\pi, \pi]$ п. н., то для любого $a \in (0, \pi)$*

$$\| \xi - D_n * \xi \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Поскольку процесс $\xi$ не является, вообще говоря, периодическим, то в теореме 1 интервал $[-a, a]$ нельзя полагать равным $[-\pi, \pi]$. Если же $\xi$ — периодический и величина $2\pi$ равна периоду или кратна ему, то процесс $\xi$ имеет дискретный спектр и его ряд Фурье будет рядом Фурье с независимыми центрированными гауссовскими коэффициентами. Для рядов из независимых случайных элементов в сепарабельных банаховых пространствах сходимость по вероятности и сходимости п. н. эквивалентны. Поэтому в периодическом случае в теореме 1 сходимость по вероятности можно заменить сходимостью п. н., а в качестве $a$ выбирать любое положительное число. Этот факт полностью согласуется с известными результатами [3, 4].

2. Доказательство теоремы 1 опирается на ряд вспомогательных утверждений. Прежде всего остановимся на некоторых свойствах ядер Дирихле. Если $f \in L_1[-2\pi, 2\pi]$, то наряду со свертками $D_n * f$, $n \geqslant 1$, можно рассмотреть свертки $f * D_n$, $n \geqslant 1$, где

$$(f * D_n)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) D_n(u)\, du, \quad t \in R.$$

Если функция $f$ периодическая с периодом $2\pi$, то для всех $t \in [-\pi, \pi]$ $(D_n * f)(t) = (f * D_n)(t)$. В общем случае такого совпадения нет. Однако при $n$, стремящемся к бесконечности, свертки $f * D_n$ и $D_n * f$ сближаются внутри интервала $[-\pi, \pi]$, причем характер их сближения тождествен степени гладкости функции $f$.

Лемма 1. *Если $f \in H_\sigma^0[-2\pi, 2\pi]$, то для любого $a \in (0, \pi)$*

$$\| f * D_n - D_n * f \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство этого, возможно известного, факта основано на довольно громоздких, но вполне стандартных рассуждениях, связанных с применением равномерного варианта теоремы Римана—Лебега. Отметим, что именно при доказательстве леммы 1 используется ограничение (1) на модуль непрерывности $\sigma$.

Лемма 2. *Для любого $b > 0$*

$$\sup_{n \geqslant 1} \sup_{\lambda \in R} \left| \int_{-b}^{b} \cos \lambda u D_n(u)\, du \right| < \infty.$$

Доказательство леммы 2 носит чисто технический характер и принципиальных трудностей не представляет.

Напомним, что семейство вероятностных мер $(P_n, n \geqslant 1)$ в банаховом пространстве $E$ называется плотным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset E$, что $P_n(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ для всех $n \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть $X_n = (X_n(t), t \in [a, b])$, $n \geqslant 0$, — случайные элементы в пространстве $H_\sigma^0[a, b]$; $P_n$ — распределение случайного элемента $X_n$, $n \geqslant 1$. Тогда, если*

$$\| X_0 - X_n \|_{L_1[a,b]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0$$

*и семейство распределений $(P_n, n \geqslant 1)$ плотно в пространстве $H_\sigma^0[a, b]$, то*

$$\| X_0 - X_n \|_{[a,b]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Лемма 3 непосредственно вытекает из критерия Ю. В. Прохорова о слабой сходимости последовательности распределений в банаховых пространствах (см. также [3, с. 51]).

Применим лемму 1 к сверткам процесса $\xi$ с последовательностью $\delta$-образных ядер. Пусть $b \geqslant a > 0$ и $(g_n, n \geqslant 1) \subset L_1[-b, b]$ — такая последовательность, что для любой функции $f \in C[-2b, 2b]$ последовательность $(f * g_n, n \geqslant 1)$, где $(f * g_n)(t) = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} f(t-u) g_n(u)\, du$, $t \in [-b, b]$, сходится к $f$ в $L_1[-a, a]$. Положим

$$\widehat{g}_n(\lambda) = \int_{-b}^{b} e^{-i\lambda u} g_n(u)\, du, \quad \lambda \in R.$$

Лемма 4. *Пусть* $\xi$ — *стационарный центрированный гауссовский процесс и*

$$\xi \in H_\sigma^0[-a, a] \text{ п. н.} \tag{3}$$

*Тогда* $\forall n \geqslant 1$

$$\xi * g_n \in H_\sigma^0[-a, a] \text{ п. н.} \tag{4}$$

*и если*

$$\beta = \sup_{n\geqslant 1} \sup_{\lambda\in R} |\widehat{g}_n(\lambda)| < \infty, \tag{5}$$

*то* $\| \xi - \xi * g_n \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$

Доказательство. Процесс $\xi_n(t) = (\xi * g_n)(t)$ как линейное преобразование процесса $\xi$ является стационарным центрированным гауссовским процессом. В силу стационарности процесса $\xi$ из соотношения (3) следует, что $\xi \in H_\sigma^0[-2b, 2b]$ п. н. Отсюда очевидно вытекает (4). Спектральная функция $F_n$ процесса $\xi_n$ связана со спектральной функцией $F$ процесса $\xi$ соотношением $dF_n(\lambda) = \frac{1}{b^2} |\widehat{g}_n(\lambda)|^2 dF(\lambda)$, $\lambda \in R$. Наряду с процессом $\xi$ рассмотрим стационарный гауссовский центрированный процесс $\xi' = \frac{\beta}{b}\xi$, который имеет спектральную функцию $F'(\lambda) = \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 F(\lambda)$. Ясно, что $\xi' \in H_\sigma^0[-a, a]$ п. н. Рассмотрим теперь тождество $dF'(\lambda) = dF_n(\lambda) + \frac{1}{b^2}(\beta^2 - |\widehat{g}_n(\lambda)|^2) dF(\lambda)$. Поскольку в силу (5) $\inf_{\lambda\in R}(\beta^2 - |\widehat{g}_n(\lambda)|^2) \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, то для каждого $n \geqslant 1$ можно построить такие стационарные центрированные гауссовские процессы $\bar{\xi}^{(n)}$, $\bar{\xi}_n$, $\bar{\zeta}_n$, что процесс $\bar{\xi}^{(n)}$ стохастически эквивалентен процессу $\xi'$, процесс $\bar{\xi}_n$ — процессу $\xi_n$, процессы $\bar{\xi}_n$ и $\bar{\zeta}_n$ независимы и, кроме того,

$$\bar{\xi}^{(n)}(t) = \bar{\xi}_n(t) + \bar{\zeta}_n(t) \text{ п. н.} \tag{6}$$

для любого $t \in R$. Из соотношения (6) и неравенства Андерсона для центрированных гауссовских случайных векторов в конечномерных пространствах [5] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $h > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{\substack{0<|t-s|<h\\ t,s\in Q}} \frac{|\bar{\zeta}_n(t) - \bar{\zeta}_n(s)|}{\sigma(|t-s|)} > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{\substack{0<|t-s|<h\\ t,s\in Q}} \frac{|\xi'(t) - \xi'(s)|}{\sigma(|t-s|)} > \varepsilon\right),$$

где $Q$ — произвольное фиксированное счетное всюду плотное в интервале $[-a, a]$ множество. Так как $\xi' \in H_\sigma^0[-a, a]$ п. н., то вероятность, стоящая в правой части этого неравенства, стремится к нулю при $h$, стремящемся к нулю, для любого $\varepsilon > 0$. Соответственно стремится к нулю и вероятность в левой части неравенства. Следовательно, процесс $\bar{\zeta}_n$ стохастически эквивалентен процессу, реализации которого п. н. принадлежат пространству $H_\sigma^0[-a, a]$. Таким образом, процессы в равенстве (6) можно рассматривать как $H_\sigma^0[-a, a]$-значные случайные элементы, а само равенство — как равенство элементов в пространстве $H_\sigma^0[-a, a]$. Опять воспользовавшись неравенством Андерсона, но уже для гауссовских случайных элементов в сепарабельном банаховом пространстве (см., например, [6]), заключаем, что для любого выпуклого и симметричного относительно нуля компакта $K \subset H_\sigma^0[-a, a]$ выполняется неравенство $\mathbf{P}(\bar{\xi}_n \in K) \geqslant \mathbf{P}(\bar{\xi}^{(n)} \in K)$. Отсюда $\inf_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(\xi_n \in K) \geqslant \mathbf{P}(\xi' \in K)$. Поскольку, согласно теореме Улама, распределение процесса $\xi'$, как случайного элемента в сепарабельном банаховом пространстве $H_\sigma^0[-a, a]$, плотно в $H_\sigma^0[-a, a]$, то из последнего неравенства вытекает, что семейство распределений случайных элементов $\xi_n$, $n \geqslant 1$, плотно в пространстве $H_\sigma^0[-a, a]$. Применение леммы 3 завершает доказательство. Лемма 4 доказана.

В конкретных приложениях в качестве $(g_n, n \geqslant 1)$ часто появляются $\delta$-образные последовательности ядер Дирихле, Фейера, Пуассона и т. д. Если ядра таковы, что $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| g_n \|_{L_1[-b,b]} < \infty$, то соотношение (5) очевидно выполняется. Для ядер Дирихле $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| D_n \|_{L_1[-b,b]} = \infty$. Тем не менее, как показывает лемма 2, условие (5) выполняется и для них. Таким образом, из лемм 1, 2 и 4, а также равенства

$$\xi - D_n * \xi = (\xi - \xi * D_n) + (\xi * D_n - D_n * \xi) \tag{7}$$

вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Если выполнено условие теоремы* 1, *то для любого* $a \in (0, \pi)$

$$\| \xi - \xi * D_n \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Окончательное доказательство теоремы 1 очевидно следует из лемм 1, 5 и равенства (7). Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Формулировку теоремы 1 можно уточнить.

Теорема 2. *Пусть* $\xi$ — *стационарный центрированный гауссовский случайный процесс. Рассмотрим утверждения:*

1) $\xi \in H_\sigma^0[-\pi, \pi]$ *п. н.*;

2) *для любого* $a \in (0, \pi)$ *последовательность* $(D_n * \xi,\ n \geqslant 1)$ *частичных сумм ряда Фурье процесса* $\xi$ *сходится по вероятности в пространстве* $(H_\sigma^0[-a, a],\ \|\cdot\|_{[-a,a]}^{(\sigma)})$;

3) *для любого* $a \in (0, \pi)$

$$\| \xi - D_n * \xi \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}} 0.$$

*Тогда, если выполнено* 1), *то имеют место* 2) *и* 3). *Наоборот, если* $\xi \in C[-\pi, \pi]$ *п. н. и выполнено* 2), *то имеют место* 1) *и* 3).

Достаточная часть теоремы 2 эквивалентна теореме 1, а необходимая часть вполне очевидна.

Заметим также, что теоремы 1, 2 включают в себя и случай сходимости в равномерной норме, если положить $\sigma(x) \equiv 1$.

Поскольку для гауссовских последовательностей в сепарабельном банаховом пространстве $E$ сходимость по вероятности и сходимость в $L_p(\Omega, E)$, $p > 0$, эквивалентны [2], то из теоремы 1 вытекает утверждение о сходимости моментов.

Следствие. *Если выполнено условие теоремы* 1, *то для любого* $a \in (0, \pi)$ *и любого* $p > 0$

$$\mathbf{M}\left(\| \xi - D_n * \xi \|_{[-a,a]}^{(\sigma)}\right)^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
2. *Булдыгин В. В.* О сходимости разложения гауссовского поля // Укр. мат журн.— 1982.— 34, № 2.— С. 137—143.
3. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 239 с.
4. *Marcus M. B., Pisier G.* Random Fourier series with applications to harmonic analysis.— Princeton : New Jersey, 1981.— 150 p.
5. *Anderson T.* The integral of symmetric unimodal functions over a symmetric convex sets and some probability inegualities // Proc. Amer. Math. Soc.—1955.—6, N 2.—P 170—176.
6. *Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б.* Неравенство Брунна—Минковского и его приложения.— Киев: Наук. думка, 1985.— 196 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 24.01.86

пределение процесса $\xi'$, как случайного элемента в сепарабельном банаховом пространстве $H_\sigma^0[-a, a]$, плотно в $H_\sigma^0[-a, a]$, то из последнего неравенства вытекает, что семейство распределений случайных элементов $\xi_n$, $n \geqslant 1$, плотно в пространстве $H_\sigma^0[-a, a]$. Применение леммы 3 завершает доказательство. Лемма 4 доказана.

В конкретных приложениях в качестве $(g_n, n \geqslant 1)$ часто появляются $\delta$-образные последовательности ядер Дирихле, Фейера, Пуассона и т. д. Если ядра таковы, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| g_n \|_{L_1[-b,b]} < \infty$, то соотношение (5) очевидно выполняется. Для ядер Дирихле $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| D_n \|_{L_1[-b,b]} = \infty$. Тем не менее, как показывает лемма 2, условие (5) выполняется и для них. Таким образом, из лемм 1, 2 и 4, а также равенства

$$\xi - D_n * \xi = (\xi - \xi * D_n) + (\xi * D_n - D_n * \xi) \tag{7}$$

вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Если выполнено условие теоремы* 1, *то для любого* $a \in (0, \pi)$

$$\| \xi - \xi * D_n \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Окончательное доказательство теоремы 1 очевидно следует из лемм 1, 5 и равенства (7). Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Формулировку теоремы 1 можно уточнить.

Теорема 2. *Пусть* $\xi$ — *стационарный центрированный гауссовский случайный процесс. Рассмотрим утверждения:*

1) $\xi \in H_\sigma^0[-\pi, \pi]$ *п. н.*;

2) *для любого* $a \in (0, \pi)$ *последовательность* $(D_n * \xi,\ n \geqslant 1)$ *частичных сумм ряда Фурье процесса* $\xi$ *сходится по вероятности в пространстве* $(H_\sigma^0[-a, a],\ \|\cdot\|_{[-a,a]}^{(\sigma)})$;

3) *для любого* $a \in (0, \pi)$

$$\| \xi - D_n * \xi \|_{[-a,a]}^{(\sigma)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

*Тогда, если выполнено* 1), *то имеют место* 2) *и* 3). *Наоборот, если* $\xi \in C[-\pi, \pi]$ *п. н. и выполнено* 2), *то имеют место* 1) *и* 3).

Достаточная часть теоремы 2 эквивалентна теореме 1, а необходимая часть вполне очевидна.

Заметим также, что теоремы 1, 2 включают в себя и случай сходимости в равномерной норме, если положить $\sigma(x) \equiv 1$.

Поскольку для гауссовских последовательностей в сепарабельном банаховом пространстве $E$ сходимость по вероятности и сходимость в $L_p(\Omega, E)$, $p > 0$, эквивалентны [2], то из теоремы 1 вытекает утверждение о сходимости моментов.

Следствие. *Если выполнено условие теоремы* 1, *то для любого* $a \in (0, \pi)$ *и любого* $p > 0$

$$\mathbf{M}(\|\xi - D_n * \xi\|_{[-a,a]}^{(\sigma)})^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
2. *Булдыгин В. В.* О сходимости разложения гауссовского поля // Укр. мат журн.— 1982.— 34, № 2.— С. 137—143.
3. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 239 с.
4. *Marcus M. B., Pisier G.* Random Fourier series with applications to harmonic analysis.— Princeton : New Jersey, 1981.— 150 p.
5. *Anderson T.* The integral of symmetric unimodal functions over a symmetric convex sets and some probability inegualities // Proc. Amer. Math. Soc.—1955.—6, N 2.—P 170—176.
6. *Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б.* Неравенство Брунна—Минковского и его приложения.— Киев: Наук. думка, 1985.— 196 с.


Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 24.01.86