УДК 517.43+513.881

Г. В. Радзиевский

Линейная независимость и полнота производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке

Данная работа посвящена исследованию линейной независимости и полноты производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиальной оператор-функции и отвечающих краевой задаче на конечном отрезке. Эти задачи о линейной независимости и о полноте возникают соответственно при изучении вопросов о единственности и о разрешимости краевой задачи на конечном отрезке для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. п. 3).

1. Постановка задачи. Введем вначале необходимые обозначения и понятия. Будем рассматривать полиномиально зависящую от спектрального параметра λ оператор-функцию

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n, \tag{1}$$

где L_k — ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Элементы $x_0, \ldots, x_d$ из $\mathfrak{H}$ называются **цепочкой корневых векторов**, отвечающей характеристическому числу μ оператор-функции $L(\lambda)$, если **собственный вектор** $x_0 \neq 0$ и $\left\| L(\lambda) \sum_{h=0}^{d} (\lambda - \mu)^h x_h \right\| = O(|\lambda - \mu|^{d+1})$ в окрестности точки μ. По цепочке корневых векторов $x_0, \ldots, x_d$ в пространстве $\mathfrak{H}^{p+q}$ (т. е. в прямой сумме $p+q$ экземпляров пространства $\mathfrak{H}$, где p и q — натуральные числа) образуем $d+1$ элемент $\tilde{g}_h^{p,q}$ по правилу

$$\tilde{g}_h^{p,q} = \{y_h^1, \ldots, y_h^p, z_h^1, \ldots, z_h^q\}, \quad h = 0, \ldots, d, \tag{2}$$

где

$$y_h^l = \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s (\lambda^{l-1})}{d\lambda^s} \right|_{\lambda=\mu} x_{h-s}, \tag{3}$$

а

$$z_h^l = \sum_{s=0} \frac{1}{s!} \frac{d^s (e^{\lambda} \lambda^{l-1})}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=\mu} x_{h-s}. \tag{4}$$

Упорядоченная цепочка элементов (2) из гильбертового пространства $\mathfrak{H}^{p+q}$ называется производной цепочкой [1], отвечающей краевой задаче на конечном отрезке, а вектор $\tilde{g}_h^{p,q}$ — производным вектором порядка h.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ множество элементов (2), построенных по правилу (3), (4) по всем цепочкам корневых векторов оператор-функции $L(\lambda)$, которые отвечают данному характеристическому числу μ. Можно показать, что множество $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ с присоединенным к нему нулевым вектором из пространства $\mathfrak{H}^{p+q}$ является линейным многообразием. Если же μ не является характеристическим числом $L(\lambda)$, то считаем $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu) = \{\varnothing\}$. Линейную оболочку множеств $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ при всех $\mu \in \mathbf{C}$ обозначим через $\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda))$. Если пользоваться символикой работы [1], то

$$\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda)) = \mathfrak{P}(L(\lambda); I, \lambda I, \ldots, \lambda^{p-1}I, e^{\lambda}I, e^{\lambda}\lambda I, \ldots, e^{\lambda}\lambda^{q-1}I; \mathbf{C}). \qquad (5)$$

Через $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$ здесь и далее обозначены соответственно множества комплексных и вещественных чисел, I — тождественный в $\mathfrak{H}$ оператор.

Пусть множества $\mathfrak{D}(\mu)$ состоят из векторов, принадлежащих некоторому линейному пространству, и зависят от комплексного параметра μ. Тогда множества $\mathfrak{D}(\mu)$ надовем линейно независимыми, если для любого конечного набора не равных между собой комплексных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_r$ равенство $g_1 + \ldots + g_r = 0$ невозможно, когда векторы $g_k \in \mathfrak{D}(\mu_k)$ при $k = 1, \ldots, r$. В противном случае множества $\mathfrak{D}(\mu)$ назовем линейно зависимыми.

При изучении линейной независимости множеств $\mathfrak{D}(\mu)$ можно рассматривать лишь те множества $\mathfrak{D}(\mu)$, которые не пусты, так как добавление пустых множеств к исходной системе не изменит ее линейную зависимость или независимость.

В работе при определенных ограничениях на $L(\lambda)$ исследована линейная независимость множеств $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ при $\mu \in \mathbf{C}$, а также установлена полнота линейной оболочки этих множеств, т. е. в принятых обозначениях установлено равенство $\overline{\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda))} = \mathfrak{H}^{p+q}$.

2. Линейная независимость и полнота производных цепочек. Для оператора A, действующего в $\mathfrak{H}$, положим $\operatorname{Re} A = (A + A^*)/2$.

Теорема 1. *Пусть у оператор-функции* (1) $\operatorname{Re} L(i\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in \mathbf{R}$, *а* $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ *для некоторого* $\zeta_0 \in \mathbf{R}$. *Тогда множества* $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ *при* $\mu \in \mathbf{C}$ *линейно независимы в следующих случаях:*

1) *если* $p = q = [(n+1)/2]$;

2) *если* n — *нечетное число, оператор* $(-1)^{[n/2]}L_n \leqslant 0$ *и число* $p = [n/2]$, *а* $q = [(n+1)/2]$;

3) *если* n — *нечетное число, оператор* $(-1)^{[n/2]}L_n \geqslant 0$ *и число* $p = [(n+1)/2]$, *а* $q = [n/2]$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы 1 не справедливо. Тогда найдутся такие неравные между собой характеристические числа $\mu_1, \ldots, \mu_r$, для которых множества $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu_k)$ линейно зависимы. Из линейной зависимости указанных множеств вытекает существование производных векторов $\tilde{g}_{d_k,k}^{p,q}$ порядка d_k, принадлежащих множествам $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu_k)$, для которых

$$\tilde{g}_{d_1,1}^{p,q} + \ldots + \tilde{g}_{d_r,r}^{p,q} = 0. \qquad (6)$$

Так как элементы $\tilde{g}_{d_k,k}^{p,q}$ принадлежат множествам $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu_k)$, то они построены по правилам (2), (3) и (4) по некоторым цепочкам корневых векторов $x_{0,k}, \ldots, x_{d_k,k}$, отвечающим характеристическим числам μ_k оператор-функции $L(\lambda)$. По этим цепочкам корневых векторов введем вектор-функции

$$x_k(\lambda) = \sum_{s=0}^{d_k} \frac{x_{d_k-s,k}}{(\lambda - \mu_k)^{s+1}}, \qquad (7)$$

$$y_k(\lambda) = e^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\delta_k} \frac{1}{(\lambda - \mu_k)^{s+1}} \left[\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} (\lambda - \mu_k)^j \right] x_{d_k - s, k} \tag{8}$$

и положим

$$x(\lambda) = x_1(\lambda) + \ldots + x_r(\lambda), \tag{9}$$

$$y(\lambda) = y_1(\lambda) + \ldots + y_r(\lambda). \tag{10}$$

Для вектор-функций $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{p+1} x(\lambda) = x \tag{11}$$

и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{q+1} y(\lambda) = y, \tag{12}$$

причем пределы в (11) и (12) понимаются в смысле нормы пространства $\mathfrak{H}$, а векторы x и y принадлежат $\mathfrak{H}$. Действительно, из равенств (7)—(10) имеем $\| x(\lambda) \| \to 0$ и $\| y(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому разложения в ряд Лорана вектор-функций $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид

$$x(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} u_l, \tag{13}$$

$$y(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} v_l. \tag{14}$$

Найдем выражение элементов u_l и v_l. Для этого заметим, что в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{(\lambda - \mu_k)^{s+1}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^l} \frac{1}{s!} \frac{d^s (\lambda^{l-1})}{d\lambda^s} \bigg|_{\lambda = \mu_k}, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

откуда с учетом равенств (7), (9) и (13) следует

$$u_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{d_k} \frac{1}{s!} \frac{d^s (\lambda^{l-1})}{d\lambda^s} \bigg|_{\lambda = \mu_k} x_{d_k - s, k} = \sum_{k=1}^{r} y^l_{d_k, k}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

а из равенств (8), (10) и (14) вытекает

$$v_l = \sum_{k=1}^{r} e^{\mu_k} \sum_{s=0}^{d_k} \left[\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!\,(s-j)!} \frac{d^{s-j} (\lambda^{l-1})}{d\lambda^{s-j}} \bigg|_{\lambda = \mu_k} \right] x_{d_k - s, k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{d_k} \frac{1}{s!} \left[\sum_{j=0}^{s} C_s^j e^{\mu_k} \frac{d^{s-j} (\lambda^{l-1})}{d\lambda^{s-j}} \bigg|_{\lambda = \mu_k} \right] x_{d_k - s, k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{d_k} \frac{1}{s!} \frac{d^s (e^{\lambda} \lambda^{l-1})}{d\lambda^s} \bigg|_{\lambda = \mu_k} x_{d_k - s, k} = \sum_{k=1}^{r} z^l_{d_k, k}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

причем в равенствах (15) и (16) элементы $y^l_{d_k, k}$ и $z^l_{d_k, k}$ определены соответственно по формулам (3) и (4) по цепочкам корневых векторов $x_{0,k}, \ldots$ $\ldots, x_{d_k, k}$, отвечающим характеристическим числам μ_k оператор-фунции $L(\lambda)$ и по которым построены векторы $\tilde{g}^{p,q}_{d_k, k}$ из равенства (6). Но из (6) следует $y^l_{d_1, 1} + \ldots + y^l_{d_r, r} = 0$ при $l = 1, \ldots, p$, а $z^l_{d_1, 1} + \ldots + z^l_{d_r, r} = 0$ при $l = 1, \ldots, q$.

Тем самым векторы $u_l = 0$ при $l = 1, \dots, p$ и $v_l = 0$ при $l = 1, \dots, q$. Отсюда с учетом тождеств (13) и (14) следуют соответственно соотношения (11) и (12).

Так как точка $\lambda = \mu_k$ является нулем порядка $s+1$ для функции $e^{\lambda-\mu_k} - \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} (\lambda - \mu_k)^j$, то вектор-функция

$$x(\lambda) - e^{-\lambda} y(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} e^{\mu_k - \lambda} \sum_{s=0}^{d_k} \frac{1}{(\lambda - \mu_k)^{s+1}} \left[e^{\lambda - \mu_k} - \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} (\lambda - \mu_k)^j \right] x_{d_k - s, k}$$

целая. Кроме того, исходя из определения цепочек корневых векторов $x_{0,k}, \dots, x_{d_k,k}$ выводим, что вектор-функции $L(\lambda) x(\lambda)$ и

$$L(\lambda) y(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} e^{\mu_k} \sum_{j=0}^{d_k} \frac{1}{j!} \left[L(\lambda) \sum_{s=j}^{d_k} \frac{x_{d_k - s, k}}{(\lambda - \mu_k)^{s-j+1}} \right]$$

также являются целыми. Поэтому целыми будут и числовые функции

$$\alpha_1(\lambda) = (L(\lambda) x(\lambda), x(-\bar{\lambda}) - e^{\bar{\lambda}} y(-\bar{\lambda})) \tag{17}$$

и

$$\alpha_2(\lambda) = -(L(\lambda) e^{-\lambda} y(\lambda), x(-\bar{\lambda}) - e^{\bar{\lambda}} y(-\bar{\lambda})). \tag{18}$$

Обозначим через $\Gamma_m(R)$ полуокружности радиуса R, заданные выражениями $\{\lambda : |\lambda| = R, (-1)^m \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\}$, $m = 1, 2$, причем $\Gamma_m(R)$ ориентированы так, что $(-1)^{m+1} iR$ является начальной точкой, а $(-1)^m iR$ — конечной (т. е. ориентированы против часовой стрелки относительно начала координат). Так как $\alpha_m(\lambda)$ — целые функции, то

$$\int_{-R}^{R} \alpha_m(i\zeta)\, d\zeta = \frac{(-1)^m}{i} \int_{\Gamma_m(R)} \alpha_m(\lambda)\, d\lambda, \quad m = 1, 2. \tag{19}$$

Учитывая значения p и q в условиях теоремы 1, из равенств (11), (12) и (17), (18) имеем

$$\lim_{\lambda \to \infty, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0} \lambda \alpha_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случаях 1 и 3;} \\ (-1)^{p+1} (L_n x, x) & \text{в случае 2} \end{cases}$$

и

$$\lim_{\lambda \to \infty, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0} \lambda \alpha_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случаях 1 и 2;} \\ (-1)^{q+1} (L_n y, y) & \text{в случае 3,} \end{cases}$$

откуда и из тождества (19) заключаем, что

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} [\alpha_1(i\zeta) + \alpha_2(i\zeta)]\, d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ \pi(-1)^{q+1} (L_n y, y) & \text{в случае 3;} \\ \pi(-1)^{p} (L_n x, x) & \text{в случае 2.} \end{cases}$$

Так как в случае 3 теоремы 1 оператор $(-1)^{q+1} L_n \leqslant 0$, а в случае 2 оператор $(-1)^p L_n \leqslant 0$, то из этих соотношений следует неравенство

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \operatorname{Re} [\alpha_1(i\zeta) + \alpha_2(i\zeta)]\, d\zeta \leqslant 0. \tag{20}$$

По условию теоремы 1 $\operatorname{Re} L(i\zeta) \geqslant 0$ при $\zeta \in \mathbf{R}$, откуда и из формул (17) и (18), определяющих функции $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$, вытекает, что числовая функция

$$\operatorname{Re} [\alpha_1(i\zeta) + \alpha_2(i\zeta)] = ([\operatorname{Re} L(i\zeta)] [x(i\zeta) - e^{-i\zeta} y(i\zeta)], x(i\zeta) - e^{-i\zeta} y(i\zeta)) \tag{21}$$

неотрицательна. Воспользовавшись теперь неравенством (20), получим тождественное равенство нулю непрерывной при $\zeta \in \mathbf{R}$ функции $\operatorname{Re}[\alpha_1(i\zeta) + \alpha_2(i\zeta)]$. Но $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ при некотором вещественном ζ_0, а вектор-функция $x(i\zeta) - e^{-i\zeta}y(i\zeta)$ принимает свои значения в конечномерном пространстве, поэтому из равенства (21) вытекает, что $\operatorname{Re}[\alpha_1(i\zeta) + \alpha_2(i\zeta)] \geqslant \delta \| x(i\zeta) - e^{-i\zeta}y(i\zeta)\|^2$ при $\delta > 0$ в некоторой вещественной окрестности точки ζ_0. Значит, в этой же окрестности равна нулю и вектор-функция $x(i\zeta) - e^{-i\zeta}y(i\zeta)$. Тем самым целая вектор-функция $x(\lambda) - e^{-\lambda}y(\lambda)$ тождественно равна нулю. Отсюда и из равенств (7) — (10), задающих $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, и из предположения о неравенстве между собой чисел μ_k при $k = 1, \ldots, r$ непосредственно следует, что все векторы $x_{h,k} = 0$ при $h = 0, \ldots, d_k$ и $k = 1, \ldots, r$. Но $x_{0,k}$ — собственные векторы, отвечающие характеристическим числам μ_k оператор-функции $L(\lambda)$, и по определению не равны нулю. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Формулировка теоремы о полноте содержит условие $L(\lambda) \in \mathfrak{F}(\mathbf{C}; [\mathfrak{H}])$, означающее, что оператор-функция (1) обратима при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, за исключением, быть может, множества изолированных точек μ, причем, если оператор $L(\mu)$ необратим при $\mu \in \mathbf{C}$, то в проколотой окрестности μ справедливо представление $L^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{h} (\lambda - \mu)^{-h+s-1} R_s + W(\lambda)$ с аналитической при $\lambda = \mu$ оператор-функцией $W(\lambda)$ и ограниченными операторами R_s (см. [1, с. 94]).

Теорема 2. *Пусть у оператор-функции* (1) $\operatorname{Re} L(i\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in \mathbf{R}$, *а* $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ *для некоторого* $\zeta_0 \in \mathbf{R}$. *Предположим также, что* $L(\lambda) \in \mathfrak{F}(\mathbf{C}; [\mathfrak{H}])$ *и оператор* L_n *обратим. Тогда равенство* $\overline{\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda))} = \mathfrak{H}^{p+q}$ *справедливо при* $p = q = [n/2]$, *а также в случаях 2 и 3 из теоремы 1.*

Доказательство. Предположим, что равенство $\overline{\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda))} = \mathfrak{H}^{p+q}$ не справедливо. Тогда на основании леммы 4.1 работы [1] найдется такой ненулевой вектор $\tilde{f} = \{f_1, \ldots, f_{p+q}\}$ из $\mathfrak{H}^{p+q}$, для которого вектор-функция

$$f(\lambda) = [L^*(\bar{\lambda})]^{-1} \left(\sum_{l=1}^{p} \lambda^{l-1} f_l + \sum_{l=1}^{q} e^{\lambda} \lambda^{l-1} f_{l+p} \right) \tag{22}$$

целая. Введем теперь две целых числовых функции

$$\beta_1(\lambda) = \left(f(\lambda), \sum_{l=1}^{p} (-\bar{\lambda})^{l-1} f_l \right) \tag{23}$$

и

$$\beta_2(\lambda) = \left(f(\lambda), \sum_{l=1}^{q} e^{-\bar{\lambda}} (-\bar{\lambda})^{l-1} f_{l+p} \right). \tag{24}$$

Из обратимости оператора L_n следует, что при достаточно больших по модулю λ оператор $L(\lambda)$ обратим и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^n [L^*(\bar{\lambda})]^{-1} = (L_n^*)^{-1}, \tag{25}$$

причем предел понимается в смысле операторной нормы. Далее считаем, что выполнен случай 1, если $p = q = [n/2]$, и случаи 2 и 3, когда выполнены соответственно случаи 2 и 3 из теоремы 1. Из равенств (22)—(25), учитывая значения p и q, имеем

$$\lim_{\lambda \to \infty, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0} \lambda \beta_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случаях 1 и 2;} \\ (-1)^{p-1} ((L_n^*)^{-1} f_p, f_p) & \text{в случае 3} \end{cases}$$

и

$$\lim_{\lambda \to \infty, \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0} \lambda \beta_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случаях 1 и 3;} \\ (-1)^{q-1} ((L_n^*)^{-1} f_{p+q}, f_{p+q}) & \text{в случае 2.} \end{cases}$$

Из этих равенств, как и при доказательстве теоремы 1, выводим неравенство $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} \operatorname{Re}[\beta_1(i\zeta) + \beta_2(i\zeta)]\, d\zeta \leqslant 0$, из которого и условий, наложенных в теореме 2 на оператор-функцию $\operatorname{Re} L(i\zeta)$, следует равенство нулю векторов $f_1, \dots, f_{p+q}$. Но по предположению вектор $\tilde{f} = \{f_1, \dots, f_{p+q}\}$ не равен нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы 2.

3. Единственность и разрешимость системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведем теперь три следствия из теорем 1 и 2 для системы уравнений с постоянными коэффициентами, которую представим в векторной форме в конечномерном евклидовом * пространстве $\mathfrak{H}$:

$$L_0 x(t) + L_1 x^{(1)}(t) + \dots + L_n x^{(n)}(t) = f(t), \tag{26}$$

где L_k — матрицы, рассматриваемые как операторы, действующие в $\mathfrak{H}$, $x(t)$ и $f(t)$ — функции от $t \in [0, 1]$ со значениями в $\mathfrak{H}$, причем каждая компонента вектора $x(t)$ — $n-1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, а $(n-1)$-я производная абсолютно непрерывна; каждая компонента вектора $f(t)$ суммируема.

Для системы уравнений (26) рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} x^{(l-1)}(0) = f_l, \quad f_l \in \mathfrak{H}; \quad l = 1, \dots, p, \\ x^{(l-1)}(1) = f_{l+p}, \quad f_{l+p} \in \mathfrak{H}; \quad l = 1, \dots, q. \end{gathered} \tag{27}$$

Из теоремы 1 вытекает утверждение о единственности решения задачи (26), (27), формулируемое в условиях, налагаемых на матрицу-функцию (1), построенную по матричным коэффициентам L_k, входящим в уравнение (26), и являющуюся аналогом характеристического многочлена для уравнения (26).

Следствие 1. *Пусть* $\operatorname{Re} L(i\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in \mathbf{R}$, *а* $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ *для некоторого* $\zeta_0 \in \mathbf{R}$. *Тогда решение задачи* (26), (27) *единственно в следующих случаях*:

1) *если в условиях* (27) $p = q = [(n+1)/2]$;

2) *если* n — *нечетное число, оператор* $(-1)^{[n/2]} L_n \leqslant 0$ *и в условиях* (27) *число* $p = [n/2]$, *а* $q = [(n+1)/2]$;

3) *если* n — *нечетное число, оператор* $(-1)^{[n/2]} L_n \geqslant 0$ *и в условиях* (27) *число* $p = [(n+1)/2]$, *а* $q = [n/2]$.

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 на основании следующего предложения.

Утверждение. *Пусть детерминант системы* (26) *не тождественно равен нулю. Тогда для того чтобы решение задачи* (26), (27) *было единственным, необходимо и достаточно, чтобы множества* $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ при $\mu \in \mathbf{C}$ *были линейно независимы.*

Доказательство. Если решение задачи (26), (27) не единственно, то существует не тождественно равная нулю вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая (26), (27) с вектор-функцией $f(t) = 0$ и векторами $f_l = 0$. По условию утверждения детерминант системы (26) не тождественно равен нулю, поэтому (см. [2, с. 69, 70]) всякое ненулевое решение системы (26) с функцией $f(t) = 0$ представимо в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\mu_k t} \left(\sum_{h=0}^{d_k} \frac{t^h}{h!} x_{d_k - h, k} \right), \tag{28}$$

где $x_{0,k}, \dots, x_{d_k,k}$ — цепочка корневых векторов, отвечающая характеристическому числу μ_k матриц-функции (1). По цепочкам корневых векторов $x_{0,k}, \dots, x_{d_k,k}$ по правилу (2), (3), (4) построим производные цепочки $\tilde{g}^{p,q}_{0,k}, \dots, \tilde{g}^{p,q}_{d_k,k}$, которые будут принадлежать множествам $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu_k)$. По

* Введение евклидовой структуры и операторов вместо матриц для последующих построений несущественно, однако это оказывается удобным, чтобы не вводить новых обозначений. Например, чтобы вместо (Lx, y) не писать yLx, где L — матрица, x — столбец, а y — строка с комплексно сопряженными компонентами.

предположению вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет равенствам (27) с векторами $f_l = 0$, значит [1, с. 86], справедливо тождество (6). Тем самым показана линейная зависимость множеств $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$.

Пусть теперь множества $\mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu)$ линейно зависимы при $\mu \in \mathbf{C}$. Значит, найдутся такие векторы $\widetilde{g}^{p,q}_{d_k,k} \in \mathfrak{D}_{p,q}(L(\lambda), \mu_k)$, для которых выполнено равенство (6). Из определения векторов $\widetilde{g}^{p,q}_{d_k,k}$ следует существование таких цепочек корневых векторов $x_{0,k}, \ldots, x_{d_k,k}$, что построенное по ним решение (28) не тождественно равно нулю и удовлетворяет задаче (26), (27) с функцией $f(t) = 0$ и векторами $f_l = 0$. Тем самым решение задачи (26), (27) не единственно.

Заметим, что в следствии 1 требование $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ обеспечивает неравенство нулю детерминанта системы (26) в точке $i\zeta_0$. Поэтому из теоремы 1 и утверждения вытекает следствие 1.

Из теоремы 2 выводим следующее утверждение о существовании решения задачи (26), (27).

Следствие 2. *Пусть* $\operatorname{Re} L(i\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in \mathbf{R}$, *а* $\operatorname{Re} L(i\zeta_0) > 0$ *для некоторого* $\zeta_0 \in \mathbf{R}$. *Предположим также, что детерминант матрицы* L_n *отличен от нуля. Тогда решение задачи* (26), (27) *существует для любой суммируемой на отрезке* $[0, 1]$ *функции* $f(t)$ *и любых векторов* $f_1, \ldots, f_{p+q}$ *из* $\mathfrak{H}$, *когда в условиях* (27) $p = q = [n/2]$, *а также в случаях* 2 *и* 3 *из следствия* 1.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — некоторое частное решение системы уравнений (26), которое существует в силу того, что детерминант матрицы L_n отличен от нуля, и поэтому система (26) приводится к нормальному виду, а ее частное решение $y(t)$ можно найти, например, методом вариации постоянных.

После нахождения частного решения разрешимость задачи (26), (27) сводится к разрешимости этой же задачи, но при $f(t) = 0$. А в силу равенства (5) и утверждения 2.1 работы [1] задача (26), (27) при $f(t) = 0$ разрешима, когда элемент $\widetilde{f} = \{f_1, \ldots, f_{p+q}\} \in \mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda))$. Из конечномерности пространства $\mathfrak{H}$ и из теоремы 2 следует равенство $\mathfrak{P}_{p,q}(L(\lambda)) = \mathfrak{H}^{p+q}$. Тем самым показано, что задача (26), (27) с $f(t) = 0$ разрешима при любых векторах $f_1, \ldots, f_{p+q}$ из $\mathfrak{H}$, что и завершает доказательство следствия.

Из следствий 1 и 2 вытекает следствие 3.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия следствия* 2. *Тогда решение задачи* (26), (27) *существует и единственно, если* n *— четное число и в условиях* (27) $p = q = [n/2]$, *а при нечетном* n *в случаях* 2 *и* 3 *из следствия* 1.

1. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук.— 1982.— 37, № 2.— С. 81—145.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1965.— 331 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.05.86