УДК 512.54

Н. Ф. Кузенный, И. Я. Субботин

Группы, в которых все подгруппы пронормальны

Подгруппа H называется пронормальной в группе G, если для любого элемента g из G подгруппы H и $H^g = g^{-1}Hg$ сопряжены в порождаемой ими подгруппе $\langle H, H^g \rangle$ (см., например, [1], § 17). В качестве примеров пронормальных подгрупп можно указать инвариантные подгруппы произвольных групп, силовские и максимальные подгруппы конечных групп. Свойства групп, связанные с пронормальностью, рассматривались в работах разных авторов (см., например, [1]. Естествен вопрос о строении групп, в которых пронормальны все подгруппы. В настоящей работе дано конструктивное описание периодических локально ступенчатых групп такого рода. Локально ступенчатой называется группа, в которой каждая отличная от единицы конечно порожденная подгруппа имеет подгруппу конечного отличного от единицы индекса. Класс локально ступенчатых групп, введенный в теорию групп С. Н. Черниковым [2], весьма широк. Он содержит все локально конечные группы, все локально разрешимые группы и все линейные группы. Ограничение локальной ступенчатости авторами выбрано в связи с тем, что как периодические, так и группы без кручения, построенные А. Ю. Ольшанским [3, 4], являются примерами бесконечных групп, в которых все подгруппы пронормальны.

Лемма 1. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H пронормальна в G, то H пронормальна и в любой подгруппе группы G, ее содержащей;*

2) *если $N \triangleleft G$ (здесь и далее запись $N \triangleleft G$ означает, что подгруппа N нормальна в группе G) и H содержит N, то H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H/N пронормальна в G/N;*

3) *если $N \triangleleft G$ и H пронормальна в группе G, то HN/N пронормальна в G/N;*

4) *если $N \triangleleft G$ и H — пронормальная подгруппа в G, то $N_G(HN) = N_G(H)N$ (через $N_G(H)$ обозначен нормализатор H в G);*

5) *если субнормальная подгруппа H группа G пронормальна в G, то $H \triangleleft G$;*

6) *если H пронормальна в G, то $N_G(H) = N_G(N_G(H))$;*

7) *если H пронормальна в G и N* — нормальный делитель, содержащий H, *то $G = N \cdot N_G(H)$.*

Доказательство первых пяти утверждений леммы дано в работе [1] § 17. В силу утверждения 5 подгруппа H в $N_G(N_G(H))$ инвариантна. Значит, утверждение 6 справедливо. Докажем утверждение 7. Пусть H — пронормальная подгруппа группы G и $N \triangleleft G$, $N \supset H$. Для всякого элемента $g \in G$ $H^g \subset N$. Поскольку H пронормальна в G, то в N найдется элемент n такой, что $H^g = H^n$. Отсюда следует, что $n_1 = gn^{-1} \in N_G(H)$. Значит, $g = n_1 n$. Поскольку элемент $g \in G$ выбран произвольно, то группа G допускает указанное разложение. Лемма доказана.

В работе [5] произвольная группа G, в которой для любых трех подгрупп H, K, L, связанных соотношением $H \triangleleft K \triangleleft L$, выполняется соотношение $H \triangleleft L$, названа $\overline{T}$-группой, а разрешимая группа такого рода — $S\overline{T}$-группой.

Следствие. *Группа, в которой пронормальны все подгруппы, является $\overline{T}$-группой.*

Следуя терминологии работы [6], подгруппу A группы G назовем квазицентральной в группе, если все подгруппы из A в G инвариантны. В работе [7] доказана разрешимость локально конечных $\overline{T}$-групп. Пользуясь этим, можно показать, что разрешимой будет и периодическая локально ступенчатая $\overline{T}$-группа. Отсюда следует такая лемма.

Лемма 2. *Периодическая локально ступенчатая группа, в которой все подгруппы пронормальны, имеет абелев квазицентральный коммутант.*

Лемма 3. *Локально разрешимая непериодическая группа, в которой пронормальны все подгруппы, является абелевой.*

Справедливость леммы вытекает из теоремы 6.1.1 работы [5] с учетом следствия из леммы 1.

Лемма 4. *Локально ступенчатая периодическая группа G, в которой пронормальны все подгруппы, является расширением абелевой квазицентральной подгруппы A без инволюций, посредством дедекиндовой группы, причем A — последний член нижнего центрального ряда группы G и $\pi(A) \cap \pi(G/A) = \varnothing$ (здесь и далее через $\pi(A)$ обозначено множество простых делителей порядков элементов группы A).*

Эта лемма также вытекает из теоремы 6.1.1 работы [5] и леммы 2 настоящей работы с учетом следствия из леммы 1.

Лемма 5. *Периодическая локально ступенчатая группа G, в которой все подгруппы пронормальны, представима в виде полупрямого произведения $G = A \leftthreetimes B$ абелевой квазицентральной подгруппы A без инволюций, являющейся последним членом нижнего центрального ряда группы G и дедекиндовой группы B, причем $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$.*

Доказательство. В силу леммы 4 группа G является расширением рассматриваемой абелевой подгруппы A. Обозначим $\pi(G/A) = \{p_1, \ldots, p_i, \ldots\}$, где p_i — различные простые числа для $i \in I$. Пусть N — такая нормальная подгруппа группы G, что $N \supset A$ и $\pi(N) \cap \pi(G/N) = \varnothing$, и P_i — силовская p_i подгруппа из G. Поскольку группа G/A дедекиндова (см. лемму 4), то $NP_i \lhd G$. Обозначим через C нормализатор $N_G(P_i)$. В силу утверждения 7 леммы 1 группа G имеет разложение $G = NP_i \cdot C$. Поскольку $P_i \lhd C$, то все p_i-элементы из C содержатся в P_i. В силу изоморфизма $G/NP_i \cong C/NP_i \cap C$ заключаем, что поскольку $NP_i \cap C$ содержит все p_i-элементы из C, то G/NP_i не содержит p_i-элементов. Значит, все p_i-элементы из G содержатся в NP_i.

Рассуждая аналогично, покажем, что группа G обладает возрастающим инвариантным рядом подгрупп G_i, удовлетворяющих следующим условиям: а) $G_i = A \leftthreetimes B_i$, $B_i = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{j=1}^{i} P_j$, где P_j — силовские p_j-подгруппы с простыми числами $p_j \in \pi(G/A)$; б) все π_i-элементы группы G, где $\pi_i = \{p_1, p_2, \ldots, p_i\}$ и $\pi_i \subset \pi(G/A)$, принадлежат G_i. Пусть p_1 — силовская p_1-подгруппа из G и $p_1 \in \pi(G/A)$. Положим $G_1 = A \leftthreetimes P_1$. Как отмечено выше, $G_1 \lhd G$ и все p_1-элементы из G содержатся в G_1. Предположим теперь, что подгруппа G_i построена, т. е. $G_i = A \leftthreetimes B_i$ и условия а), б) выполнены. Построим подгруппу G_{i+1}. Отметим, что $G_i \lhd G$ $(G_i \supset A)$ и B_i — пронормальная подгруппа в G. Поэтому $G = G_i N_i$, где $N_i = N_G(B_i)$ (см. утверждение 7 леммы 1). Подгруппа B_i является инвариантной силовской π_i-подгруппой в N_i. Если $G_i = G$, то построение закончим. Если же $G_i \neq G$, то ввиду разложения $G = G_j N_i$ в N_i есть нетривиальная силовская p_{i+1}-подгруппа P_{i+1}, где $p_{i+1} \in \pi(G/A)$. Рассмотрим группу $B_{i+1} = B_i \leftthreetimes P_{i+1}$; группа B_{i+1} дедекиндова. Следовательно, B_{i+1} — прямое произведение своих силовских подгрупп, т. е. $B_{i+1} = B_i \times P_{i+1}$. Пусть $G_{i+1} = A \leftthreetimes B_{i+1}$. Ясно, что $G_{i+1} \lhd G$. Покажем, что все p_{i+1}-элементы группы G содержатся в G_{i+1}. Обозначим через H_{i+1} пересечение $G_{i+1} \cap N_i$. Очевидно, $H_{i+1} \supset B_{i+1}$ и H_{i+1} — нормальный делитель в N_i. В силу леммы 1 $N_i = H_{i+1} N_{N_i}(P_{i+1})$. Из изоморфизма

$$N_i/H_{i+1} \cong N_{N_i}(P_{i+1})/N_{N_i}(P_{i+1}) \cap H_{i+1}$$

следует, что все p_{i+1}-элементы из N_i содержатся в H_{i+1}. В силу изоморфизма $G/G_{i+1} \cong N_i/H_{i+1}$ получаем, что все p_{i+1}-элементы из G содержатся в G_{i+1}, т. е. p_{i+1} является силовской p_{i+1}-подгруппой группы G. Построение G_{i+1} закончено.

Обозначим через $G_0 = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$. Покажем, что $G_0 = G$. Пусть G — p-элемент из G, где p — некоторое простое число из $\pi(G)$. Если $p \in \pi(A)$, то $g \in A \subset G_0$. Предположим, что $p \in \pi(G/A)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$, т. е. $g \in G_i \subset G_0$. Значит, в любом случае $G \subset G_0$, а потому $G = G_0$.

Обозначим через B объединение всех B_i и через G^* подгруппу $G^* = A \rightthreetimes B$. Ясно, что $G^* \subset G$. С другой стороны, для всякого $i \in I$ $G_i \subset G^*$. Но тогда $G^0 \subset G^*$ и потому $G^* = G$. Лемма доказана.

Лемма 6. *В группе G, о которой речь идет в лемме 5, любая силовская $\pi(G/A)$-подгруппа из G дополняет нормальный делитель A.*

Доказательство. Пусть G — локально ступенчатая периодическая группа из леммы 5, $\bar{B}$ — отличная от B силовская $\pi(B)$-подгруппа из G. Рассмотрим подгруппу $G_1 = A \rightthreetimes \bar{B}$. Ясно, что $G_1 \lhd G$ ($G_1 \supset A$, G/A — дедекиндова группа). Из утверждения 7 леммы 1 следует, что группа G представима в виде $G = G_1 N_G(\bar{B})$. Подгруппа $\bar{B}$ — инвариантная силовская $\pi(B)$-подгруппа в $N_G(\bar{B})$. Из изоморфизма $G/G_1 = N_G(\bar{B})/G_1 \cap N_G(\bar{B})$ вытекает, что все $\pi(\bar{B})$-элементы из G содержатся в G_1. Если $\pi(\bar{B}) = \pi(B)$, то доказательство завершено. Пусть $\pi(\bar{B}) \neq \pi(B)$. Тогда G_1 не содержит некоторую силовскую p-подгруппу из G, где $p \in \pi(B) \setminus \pi(\bar{B})$. Так как $G = (A \rightthreetimes \bar{B}) N_G(\bar{B}) = AN_G(\bar{B})$, то при $p \in \pi(N_G(\bar{B}))$, очевидно, $p \in \pi(G)$ $(p \notin \pi(A))$. Значит, $p \in \pi(N_G(\bar{B}))$. Возьмем какую-нибудь силовскую p-подгруппу P из $N_G(\bar{B})$ и рассмотрим группу $\tilde{B} = \bar{B} \rightthreetimes P \subset N_G(\bar{B})$. Подгруппа $\tilde{B}$, очевидно, является $\pi(B)$-подгруппой из $N_G(\bar{B})$. Следовательно, $\bar{B}$ не является силовской $\pi(B)$-подгруппой в G. Полученное противоречие показывает, что $G = G_1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть периодическая группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$G = A \rightthreetimes B$, где A — абелева квазицентральная группа без инволюций, являющаяся последним членом нижнего центрального ряда группы G, B — дедекиндова группа;*

2) $G' = A \times B'$ $(B' = [B, B])$;

3) $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$;

4) *любая силовская $\pi(B)$-подгруппа из G дополняет подгруппу A в группе G.*

Тогда любая подгруппа C из G имеет разложение $C = A_1 \rightthreetimes B_1$, где B_1 — силовская $\pi(B)$-подгруппа из C, $A_1 = A \cap C$ и каждая силовская $\pi(B)$-подгруппа из C дополняет в C подгруппу A_1.

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа и C — ее произвольная подгруппа, $A_1 = C \cap A$ и B_1 — какая-нибудь силовская $\pi(B)$-подгруппа из C. Рассмотрим группу $C_1 = A_1 \rightthreetimes B_1$. Покажем, что $C_1 = C$. Предположим противное. Пусть в подгруппе C найдется какой-нибудь элемент c, не принадлежащий подгруппе C_1.

В силу леммы 6 среди дополнений к подгруппе A в группе G можно выбрать такое B, которое содержит подгруппу B_1. Тогда элемент c, как и любой другой элемент группы G, представим в виде $c = ab$, где $a \in A$, $b \in B$ и $B \supset B_1$. Пусть b_1 — произвольный элемент из B_1. Тогда $b_1^{-1}abb_1 = a^{\alpha}b^{\beta}$, где $\beta = 1$ или $\beta = -1$ (B — дедекиндова группа). Элемент $a^{\alpha}b^{\beta}(ab)^{-1}$ принадлежит C. Если $\beta = -1$, то b-элемент порядка 4 и $b^{\beta-1} = b^{-2}$ — элемент порядка 2 из $G' = A \times B'$, и тогда $[b^{-2}, a^{\alpha-1}] = 1$. Поскольку $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, то $k = a^{\alpha-1} \in C$. Если же $\beta = 1$, то, очевидно, $a^{\alpha-1} \in C$. Пусть $\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_m \rangle$ — разложение циклической подгруппы $\langle a \rangle$ на ее примарные компоненты. Тогда $a^{\alpha-1} = a_1^{\alpha-1} \ldots a_m^{\alpha-1}$. Если при некотором $1 \leqslant i \leqslant m$ $a_i^{\alpha-1} \neq 1$, то рассмотрим подгруппу $\langle a_i \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$. В случае, когда $a_i^{\alpha-1} \neq 1$, она ненильпотентна и ее коммутант совпадает с $\langle a_i \rangle$, т. е. $\langle a_i^{\alpha-1} \rangle = \langle a_i \rangle$. Элемент $(a^{\alpha-1})^{|a_1 \cdot\ldots\cdot a_{i-1} a_{i+1} \cdot\ldots\cdot a_m|}$ принадлежит C. В силу этого $a_i^{\alpha-1} \in C$, т. е. $a_i \in C$. Тогда $y_i = a_i^{-1}ab \in C$. Поскольку $a_i \in A_1$, то $y_i \in C \setminus C_1$. Повторим все эти рассуждения для каждого a_i. В результате выделим элемент $y = \bar{a}b \in C \setminus C_1$, в котором $[\bar{a}, b_1] = 1$. Если b_2 — другой элемент группы B_1 и y с b_2 не перестановочен, то аналогично предыдущему можно построить из него элемент $t \notin C_1$, перестановочный и с b_1 и с b_2. Поскольку число примарных компонент в разложении циклической подгруппы $\langle a\rangle$ конечно, то, очевидно, в конечное число шагов можно выделить в множестве $C\setminus C_1$ такой элемент $z=\tilde{a}b$, в котором $[\tilde{a}, B_1]=1$. Тогда $B_1^z=B_1^{\tilde{a}b}=B_1^b= =B_1$ (B — дедекиндова группа).

Таким образом, показано, что существует такой элемент $z\in C\setminus C_1$, который нормализует подгруппу B_1. Ясно, что $K=C_1\langle z\rangle\neq C_1$. Поскольку B_1 — силовская $\pi(B)$-подгруппа в группе C, то она будет таковой и в подгруппе $R=B_1\langle z\rangle$. Подгруппу $\langle z\rangle$ разложим в прямое произведение $\langle z\rangle=\langle z^\gamma\rangle\times\langle z^\sigma\rangle$, где $\langle z^\sigma\rangle$ — ее $\pi(B)$-силовская подгруппа, а (z^γ) — $\pi(A)$-силовская ее подгруппа. Тогда подгруппа $R_1=B_1\langle z^\sigma\rangle=B_1$ (B_1 — инвариантная силовская $\pi(B)$-подгруппа в R) и потому $R=B_1\rightthreetimes\langle z^\gamma\rangle$. Элемент z^γ — $\pi(A)$-элемент из C, т. е. $z^\gamma\in A_1$. Значит, $\langle z^\gamma\rangle\subset A_1$ и $K=C_1\langle z\rangle=C_1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 8. *Пусть G — периодическая двуступенно разрешимая группа, представимая в виде полупрямого произведения $G=A\rightthreetimes B$ своего последнего члена нижнего центрального ряда A, являющегося квазицентральной подгруппой без инволюций и дедекиндовой группы B, причем $\pi(A)\cap\pi(B)= =\varnothing$. Если каждая силовская $\pi(B)$-подгруппа группы G дополняет группу A в G, то все подгруппы группы G пронормальны.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа и G — ее произвольная подгруппа. В силу леммы 7 группу G можно представить в виде $C=A_1\rightthreetimes B_1$, где $A_1=A\cap C$, а B_1 — некоторая силовская $\pi(B)$-подгруппа из C. Ввиду леммы 6, не нарушая общности, можно считать, что $B_1\subset B$. Очевидно, C — $S\overline{T}$-группа. Обозначим через A_2 ее последний член нижнего центрального ряда. Поскольку в $S\overline{T}$-группе C $\pi(C/A_2)\cap\pi(A_2)=\varnothing$ и $A_2\subset A$ (см. теорему 6.1.1 из [5]), то $A=A_2\times A_3$, где $\pi(A_2)\cap\pi(A_3)=\varnothing$. Пусть g — произвольный элемент группы G. Его, как и каждый элемент группы G, можно представить в виде $g=ba$, где $b\in B$, $a\in A$. Если доказать, что в группе $M=\langle C, C^g\rangle$ найдется элемент, переводящий подгруппу B_1 в B_1^g, то, очевидно, лемма будет доказана. Для подгруппы B_1 справедливо соотношение $B_1^g=B_1^{ba}=B_1^a$. Если $B_1^a=B_1$, то лемма доказана. Пусть $B_1^a\neq B_1$. Подгруппа $R=\langle a\rangle\rightthreetimes B_1$ является $S\overline{T}$-группой (см. теорему 6.1.1. из [5]). Поскольку $[a, B_1]\neq 1$, то R ненильпотентна. Тогда в силу теоремы 6.1.1 из [5] ее последний член нижнего центрального ряда $\langle a_1\rangle$ обладает свойством $\pi(\langle a_1\rangle)\cap\pi(R/\langle a_1\rangle)=\varnothing$. Отсюда следует, что $\langle a_1\rangle$ дополняема в $\langle a\rangle$ и $R=(\langle a_1\rangle\rightthreetimes B_1)\times\langle a_2\rangle$, где $\langle a_2\rangle$ дополнение к $\langle a_1\rangle$ в $\langle a\rangle$. Тогда $B_1^a=B_1^{a_1}$, причем $[B_1, \langle a_1\rangle]=\langle a_1\rangle$. Для всякого элемента $b_1\in B_1$ элемент $k=b_1^{a_1}$ принадлежит M. Следовательно, элемент $b_1^{-1}k$ также принадлежит M ($b_1\in C$, $\langle C, C^g\rangle=M$). Значит, $[b_1, a_1]\in M$. Поскольку это выполняется для всякого $b_1\in B_1$, то $[B_1, \langle a_1\rangle]\subset M$, т. е. $\langle a_1\rangle\subset M$. Мы показали, что $B_1^g=B_1^{a_1}$, где $a_1\in M$. Лемма доказана.

Из приведенных лемм непосредственно следует такая теорема.

Теорема. *Непериодическая локально разрешимая группа, в которой все подгруппы пронормальны, является абелевой.*

Периодическая локально ступенчатая группа G тогда и только тогда будет группой, в которой пронормальны все подгруппы, когда она удовлетворяет следующим условиям:

1) *группа G представима в виде полупрямого произведения $G=A\rightthreetimes B$, где A — абелева группа без инволюций, все подгруппы которой в G инвариантны, B — дедекиндова группа;*

2) *коммутант G' группы G является прямым произведением подгруппы A и коммутанта B' подгруппы B;*

3) $\pi(A)\cap\pi(B)=\varnothing$;

4) *любая силовская $\pi(B)$-подгруппа группы G дополняет подгруппу A в G.*

Следующий пример показывает, что условие 4 теоремы не является следствием условий 1—3.

П р и м е р. Пусть π-множество всех простых нечетных чисел p_i, $i \in I$, $\langle a_i \rangle$ — циклическая подгруппа порядка p_i, $G_i = \langle a_i \rangle \leftthreetimes \langle b_i \rangle$, где $|b_i| = 2$ и $a_i^{b_i} = a_i^{-1}$. Обозначим через G группу $G = \underset{i \in I}{\mathrm{X}}\, G_i \leftthreetimes \langle c \rangle$, где c — элемент порядка 4, действующий на группе $G_0 = \underset{i \in I}{\mathrm{X}}\, G_i$ так: $a_i^c = a_i^{-1}$, $b_i^c = b_i$ для всех $i \in I$. Можно убедиться, что группа G удовлетворяет условиям 1—3 теоремы, однако ее силовская 2-подгруппа $B_1 = \underset{i \in I}{\mathrm{X}} \langle b_i^{a_i} \rangle \times \times \langle c^2 \rangle$ недополняема в G. Отметим еще, что группа G_0 удовлетворяет всем условиям теоремы, но силовские 2-подгруппы ее не сопряжены.

П р и м е ч а н и е. Полученная теорема обобщает основные результаты работ [8, 9].

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М. : Наука, 1978.— 272 с.
2. *Черников С. Т.* Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— 23, № 5.— С. 604—628.
3. *Ольшанский А. Ю.* Группа ограниченного периода с подгруппами простого порядка // Алгебра и логика.— 1982.— 21, № 5.— С. 553—618.
4. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная простая нетерова группа без кручения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— 43, № 6.— С. 1328—1393.
5. *Robinson D.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1964.— 60, N 21.— P. 21—38.
6. *Scott W. R.* Group theory.— Prentice-Hall : Englewood Gliffs, 1964.— 479 p.
7. *Абрамовский И. Н.* Локально обобщенные гамильтоновы группы / Сиб. мат. журн.— 1966.— 7, № 3.— С. 481—485.
8. *Peng T. A.* Finite groups with pro-normal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— 20, N 1.— P. 232—234.
9. *Fattahi A.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra.— 1974.— 28, *N* 1.— P. 15—19.

Киев. политехн. ин-т

Получено 04.06.85