УДК 519.21

Ю. С. Мишура

Экспоненциальные оценки для двупараметрических мартингалов

Экспоненциальные оценки для случайных процессов применяются в случае замены меры, при изучении стохастических дифференциальных уравнений, при решении проблемы мартингалов и других задач. В двупараметрическом случае, т. е. в случае процессов, заданных на плоскости, получение экспоненциальных оценок сильно затрудняется из-за громоздких вспомогательных неравенств и формул. В настоящей статье получены экспоненциальные оценки для распределений непрерывных мартингалов, заданных на плоскости. В частном случае, когда мартингал является сильным и может быть представлен как стохастический интеграл по винеровскому полю. аналогичные (несколько более слабые) оценки получены в статье [1].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$; $s \leqslant t$, если $s_1 \leqslant t_1$, $s_2 \leqslant t_2$; $s \wedge t$, если $s_1 \leqslant t_1$, $s_2 > t_2$, $s \vee t = (\max(s_1, t_1), \max(s_2, t_2))$, $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$ — поток σ-алгебр, удовлетворяющих обычным условиям $(F1)$ — $(F4)$ [2].

Далее рассматриваются $\mathfrak{F}_t$ — адаптированные непрерывные случайные процессы $\{x_t, t \in R_+^2\}$, постоянные на координатных осях.

Обозначим через $\mathfrak{M}^2$ $(\mathfrak{M}_s^2)$ класс непрерывных квадратично-интегрируемых двупараметрических мартингалов (сильных мартингалов). (Определения мартингала и сильного мартингала даны в [2].)

Введем такие обозначения: $[0, t] = [0, t_1] \times [0, t_2] \subset R_+^2$ — некоторый фиксированный прямоугольник, $0 = t_i^0 < t_i^1 < \ldots < t_i^n = t_i$ — произвольное разбиение отрезка $[0, t_i]$, $i = 1, 2$, $t_{jk} = (t_1^j, t_2^k)$, $j, k = \overline{1, n}$, $\lambda = \max\limits_{\substack{i=1,2 \\ k=\overline{1,n}}} (t_i^k - t_i^{k-1})$, $\Delta^1 x_{jk} = x_{t_{j+1\,k}} - x_{t_{jk}}$, $\Delta^2 x_{jk} = x_{t_{j\,k+1}} - x_{t_{jk}}$, $\square x_{jk} = \Delta^1 x_{j+1k} - \Delta^1 x_{jk}$, $\langle x, x\rangle^1$ и $\langle x, x\rangle^2$ — однопараметрические квадратические вариации мартингала $x_t \in \mathfrak{M}^2 : \langle x, x\rangle_t^1 = P\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\Delta^1 x_{jn})^2$, $\langle x, x\rangle_t^2 = P\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\Delta^2 x_{nk})^2$, $[x, x]$ — двупараметрическая квадратическая вариация: $[x, x]_t = P\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} (\square x_{jk})^2$.

Теорема 1. *Пусть мартингал $x_t \in \mathfrak{M}^2$ удовлетворяет условию* (A): *хотя бы одна из однопараметрических квадратических вариаций имеет ограниченный рост: $\langle x, x\rangle_t^i \leqslant R t_1 t_2$, $i = 1$ или $i = 2$, $R > 0$, $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$.*

Тогда для любого прямоугольника $[0, T]$ и любого $\alpha > 0$

$$P\{\sup_{t\leqslant T} |x_t| \geqslant \alpha T_1 T_2\} \leqslant \frac{2e}{e-1}\left[\exp\left(\frac{-4e\alpha^2 T_1 T_2}{3R(2e+1)}\right) + \exp\left(\frac{-4e\alpha^2 T_1 T_2}{9R(2e+1)}\right)\right]. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть, например, однопараметрическая квадратическая вариация $\langle x, x\rangle^1$ удовлетворяет условию (A). Рассмотрим случайный процесс $y_t = \exp(\lambda x_t)$, λ — произвольная постоянная. Из результатов статьи [3] следует, что при выполнении условия (A) процесс $z_t^\lambda = \exp\left(\lambda x_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle x, x\rangle_t^1\right)$ является при каждом фиксированном t_2 однопараметрическим мартингалом по t_1, $z_0^\lambda = 1$ и значит, $Ez_t^\lambda = 1$. Поэтому

$$Ey_t = Ez_t^\lambda \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\langle x, x\rangle_t^1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} R t_1 t_2\right) < \infty. \tag{2}$$

Из неравенств (2), в свою очередь, следует, что y_t — непрерывный двупараметрический субмартингал, т. е. $E(y_t/\mathfrak{F}_s) \geqslant y_s$ при $s \leqslant t$. В силу неравенств для супремума двупараметрических субмартингалов, полученных в статьях [4, 5],

$$P\{\sup_{t\leqslant T} y_t \geqslant \beta\} \leqslant \frac{e}{\beta(e-1)}(1 + \sup_{t\leqslant T} Ey_t^+ \ln^+ y_t^+), \tag{3}$$

если $Ey_t^+ \ln^+ y_t^+ < \infty$, β — произвольное число. Применим неравенство (3) к процессу $y_t = \exp(\lambda x_t)$:

$$P\{\sup_{t\leqslant T} x_t \geqslant \alpha T_1 T_2\} = P\{\sup_{t\leqslant T} \exp(\lambda x_t) \geqslant \exp(\lambda\alpha T_1 T_2)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{e-1}\exp(-\alpha\lambda T_1 T_2)(1 + \sup_{t\leqslant T} E\exp(\lambda x_t)|\lambda x_t|).$$

Далее,

$$E\exp(\lambda x_t)|\lambda x_t| = E(\exp(\lambda x_t - \lambda^2\langle x, x\rangle_t^1)\exp(\lambda^2\langle x, x\rangle_t^1)|\lambda x_t|) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\lambda^2 R t_1 t_2)\,(E\exp(2\lambda x_t - 2\lambda^2\langle x, x\rangle_t^1))^{1/2}\,(E(\lambda^2 x_t^2))^{1/2} = (E z_t^{2\lambda})^{1/2} \times$$

$$\times \exp(\lambda^2 R t_1 t_2)\,(E(\lambda^2 x_t^2))^{1/2} = \exp(\lambda^2 R t_1 t_2)\,(E(\lambda^2 x_t^2))^{1/2}$$

Оценим $(E(\lambda^2 x_t^2))^{1/2}$:

$$(E(\lambda^2 x_t^2))^{1/2} = (\lambda^2 E\langle x, x\rangle_t^1)^{1/2} \leqslant (\lambda^2 R t_1 t_2)^{1/2} \leqslant (\exp(e^{-1}\lambda^2 R t_1 t_2))^{1/2} =$$

$$= \exp((2e)^{-1}\lambda^2 R t_1 t_2)$$

в силу неравенства $x \leqslant \exp(xe^{-1})$. Следовательно, $E(\exp(\lambda x_t)\cdot|\lambda x_t|) < \infty$ и

$$P\{\sup_{t\leqslant T} x_t \geqslant \alpha T_1 T_2\} \leqslant \frac{e}{e-1}\exp(-\alpha\lambda T_1 T_2)\,(1 + \sup_{t\leqslant T}\exp(\lambda^2 R t_1 t_2 +$$

$$+ (2e)^{-1}\lambda^2 R t_1 t_2)) \leqslant \frac{e}{e-1}(\exp(-\alpha\lambda T_1 T_2) + \exp(-\alpha\lambda T_1 T_2 +$$

$$+ (1 + (2e)^{-1})\,\lambda^2 R T_1 T_2)).$$

Положим $\lambda = \dfrac{4\alpha e}{3R(2e+1)}$, тогда

$$P\{\sup_{t\leqslant T} x_t \geqslant \alpha T_1 T_2\} \leqslant \frac{e}{e-1}\left[\exp\left(-\frac{4e\alpha^2 T_1 T_2}{3R(2e+1)}\right) + \exp\left(-\frac{4e\alpha^2 T_1 T_2}{9R(2e+1)}\right)\right].$$

Аналогичная оценка справедлива для вероятности $P\{\sup_{t\leqslant T} x_t \leqslant \alpha T_1 T_2\}$, откуда следует неравенство (1).

Следствие. *Пусть x_t — непрерывный сильный мартингал, $x_t \in \mathfrak{M}_s^2$. Тогда $\langle x, x\rangle_t^1 = \langle x, x\rangle_t^2 = [x, x]_t$ и, значит, при выполнении условия* (A'): $[x, x]_t \leqslant R t_1 t_2$, $t \in R_+^2$, $R > 0$, *выполняется условие* (A) *и справедлива оценка* (1), *несколько более сильная, чем соответствующее неравенство* (1) *из статьи* [1].

Условие A является в некоторых случаях слишком ограничительным. Пусть, например, поток σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t^w, t \in R_+^2\}$ порожден винеровским случайным полем $\{w_t, t \in R_+^2\}$, мартингал x_t принадлежит классу $\mathfrak{M}^2$. Тогда, как известно, x_t допускает представление

$$x_t = \int\limits_{[0,t]} \varphi_s dw_s + \int\limits_{[0,t]^2} \psi_{s,u} dw_s dw_u,$$

где φ_s — $\mathfrak{F}_s$-измеримая функция, $\psi_{s,u}$ — $\mathfrak{F}_s \vee \mathfrak{F}_u$-измеримая функция, $\psi_{s,u}$ отлична от нуля только при $s \wedge u$,

$$E\int\limits_{[0,t]} \varphi_s^2 ds < \infty, \quad E\int\limits_{[0,t]^2} 1_{s\wedge u}\psi_{s,u}^2 ds du < \infty$$

для всех $t \in R_+^2$. Квадратические вариации такого мартингала имеют вид [6]

$$[x, x]_t = \int\limits_{[0,t]} \varphi_s^2 ds + \int\limits_{[0,t]^2} 1_{s\wedge u}\psi_{s,u}^2 ds du, \quad \langle x, x\rangle_t^1 = [x, x]_t +$$

$$+ 2\int\limits_{[0,t]^2} x_{w1}(s \vee u, u)\,\psi_{s,u} dw_s du, \quad \langle x, x\rangle_t^2 = [x, x]_t +$$

$$+ 2\int\limits_{[0,t]^2} x_{w2}(s, s \vee u)\,\psi_{s,u} ds dw_u,$$

где $x_{w1} = \int\limits_{[0,t]} 1_{s\wedge u}\psi_{s,u} dw_s + \varphi_u$, $x_{w2} = \int\limits_{[0,t]} 1_{s\wedge u}\psi_{s,u} dw_u + \varphi_s$. Предположим, что для некоторых постоянных K и M $0 < |\varphi_s| \leqslant K$, $0 < |\psi_{s,u}| \leqslant M$. Тогда $[x, x]_t \leqslant K^2 T_1 T_2 + M^2 T_1^2 T_2^2$, а вариации $\langle x, x\rangle^1$ и $\langle x, x\rangle^2$ не являются ограниченными функциями ни на каком прямоугольнике, хотя имеют экспоненциальные моменты.

Приведем экспоненциальные оценки для распределений двупараметрических мартингалов при условии ограниченного роста их двупараметрической квадратической вариации. Естественно, эти оценки будут более грубыми, чем неравенство (1). Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть мартингал* $x_t \in \mathfrak{M}^2$ *удовлетворяет условиям* (B): 1) $[x, x]_t \leqslant K^2 t_1 t_2 + M^2 t_1^2 t_2^2$, $t \in R_+^2$, $K > 0$, $M > 0$ — *некоторые постоянные*; 2) $E \exp(\alpha \langle x, x\rangle_t^i) < \infty$ *для любого* $\alpha > 0$, $i = 1$ *или* $i = 2$.

Тогда для любого $\lambda < (2R)^{-1/2}$ $E \exp(\lambda^2 \langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle_t^i) \leqslant 4 \exp(2\lambda^2 R t_1 t_2)$, *где*

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} x_t, & \text{если } t_1 t_2 \leqslant 1, \\ x_t (t_1 t_2)^{-1}, & \text{если } t_1 t_2 \geqslant 1, \end{cases} \quad R = K^2 + M^2.$$

Доказательство. Пусть прямоугольник $[0, t]$ фиксирован, $t_1 t_2 \leqslant 1$, условие (B), 2) выполняется для $\langle x, x\rangle_t^1$. Рассмотрим случайный процесс $N_s = \langle x, x\rangle_s^1 - [x, x]_s$, $s \in [0, t]$. При каждом фиксированном $s_1 \leqslant t_1$ процесс N_s является однопараметрическим мартингалом по s_2, причем, как указано в статье [7],

$$\langle N, N\rangle_s = P\text{-}\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \square x_{jk} \Delta^1 x_{jk} \right)^2 \leqslant P\text{-}\lim_{\lambda \to 0} \inf \left(\sum_{j,k=0}^{n-1} (\square x_{jk})^2 \right) \times$$

$$\times \sup_k \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta^1 x_{jk})^2 \leqslant [x, x]_s \sup_{z \leqslant s_2} \langle x, x\rangle_{s_1 z}^1.$$

Заметим, что $[x, x]_s \leqslant K^2 s_1 s_2 + M^2 s_1^2 s_2^2 \leqslant R s_1 s_2 \leqslant R$. Поэтому $\langle N, N\rangle_s \leqslant R s_1 s_2 \sup_{z \leqslant s_2} \langle x, x\rangle_{s_1 z}^1$. Кроме того, процесс $\langle x, x\rangle_{s_1 z}^1$, а следовательно, и $\exp(\alpha \langle x, x\rangle_{s_1 z}^1)$ при фиксированном s_1 является субмартингалом по z для любого $\alpha > 0$. Поэтому

$$E \exp(\alpha \langle N, N\rangle_t) \leqslant E \exp(\alpha R t_1 t_2 \sup_{z \leqslant t_2} \langle x, x\rangle_{t_1 z}^1) =$$

$$= E \left(\sup_{z \leqslant t_2} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{2} R t_1 t_2 \langle x, x\rangle_{t_1 z}^1 \right) \right) \right)^2 \leqslant 4 E \exp(\alpha R t_1 t_2 \langle x, x\rangle_t^1) < \infty$$

(последнее неравенство выполняется в силу условия (B), 2)). Теперь

$$E \exp(\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1) = E \exp(\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1 - \lambda^2 [x, x]_t - \lambda^4 \langle N, N\rangle_t \exp(\lambda^2 [x, x]_t +$$

$$+ \lambda^4 \langle N, N\rangle_t) \leqslant (E \exp(2\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1 - 2\lambda^2 [x, x]_t - 2\lambda^4 \langle N, N\rangle_t))^{1/2} \times$$

$$\times (E \exp(2\lambda^2 [x, x]_t + 2\lambda^4 \langle N, N\rangle_t))^{1/2} = (E \exp(2\lambda^2 [x, x]_t +$$

$$+ 2\lambda^4 \langle N, N\rangle_t))^{1/2} \leqslant \exp(\lambda^2 R t_1 t_2) (E \exp(2\lambda^4 R t_1 t_2 \sup_{z \leqslant t_2} \langle x, x\rangle_{t_1 z}^1))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \exp(\lambda^2 R t_1 t_2) (E \exp(2\lambda^4 R \langle x, x\rangle_t^1))^{1/2} \tag{4}$$

(последнее неравенство верно в силу субмартингального свойства $\langle x, x\rangle_{t_1 z}^1$ как функции z).

Если $\lambda^2 \geqslant 2\lambda^4 R$, т. е. $\lambda \leqslant (2R)^{-1/2}$, то из (4) следует $E \exp(\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1) \leqslant 2 \exp(\lambda^2 R t_1 t_2) (E \exp(\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1))^{1/2}$, откуда $E \exp(\lambda^2 \langle x, x\rangle_t^1) \leqslant 4 \exp(2\lambda^2 R t_1 t_2)$, что и требовалось показать. Если $t_1 t_2 \geqslant 1$, то аналогичные оценки справедливы для процесса $\tilde{x}_t = x_t (t_1 t_2)^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть непрерывный мартингал* $x_t \in \mathfrak{M}^2$ *удовлетворяет условию* (B). *Тогда для любого* $\alpha > 0$

$$P\{\sup_{t \leqslant T} |x_t| \geqslant \alpha T_1^\beta T_2^\beta\} \leqslant \frac{2\sqrt{2}e}{e-1} \left[\left(\exp\left(-\frac{\alpha^2 T_1 T_2}{6RC} \right) + \right.\right.$$

$$+\exp\left(-\frac{5\alpha^2T_1T_2}{36RC}\right)\Bigg)1_{\{\alpha\leqslant\sqrt{2R}C\}}+\left(\exp\left(-\frac{\alpha^2T_1T_2}{3\sqrt{2R}}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{\alpha^2T_1T_2}{3\sqrt{2R}}+\frac{CT_1T_2}{18}\right)\right)1_{\{\alpha\geqslant\sqrt{2R}C\}}\Bigg], \qquad (5)$$

где $\beta=1$, *если* $T_1T_2\leqslant 1$ *и* $\beta=2$, *если* $T_1T_2\geqslant 1$, $R=K^2+M^2$, $C=2+$ $+2^{16}/18e$.

Доказательство. 1. Пусть прямоугольник $[0,T]\subset R_+^2$ фиксирован, $T_1T_2\leqslant 1$, $0<\lambda<\dfrac{1}{2\sqrt{2R}}$, $R=K^2+M^2$, $\beta=1$. Тогда для любого $\alpha>0$

$$P\{\sup_{t\leqslant T}x_t\geqslant\alpha T_1T_2\}\leqslant\exp(-\alpha\lambda T_1T_2)\frac{e}{e-1}(1+\sup_{t\leqslant T}E\exp(\lambda x_t)\,|\,\lambda x_t\,|).$$

Оценим величину $\beta_t=E\exp(\lambda x_t)\,|\,\lambda x_t\,|$:

$$\beta_t\leqslant E\exp(\lambda x_t-\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1)\,|\,\lambda x_t\,|\exp(\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1)\leqslant(E\exp(2\lambda x_t-$$
$$-2\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/2}(E(\lambda^2x_t^2)\exp(2\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/2}=(E(\lambda^2x_t^2)\exp(2\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/2},$$

поскольку $(E\exp(2\lambda x_t-2\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/2}=1$. Далее, $(E(\lambda^2x_t^2)\exp(2\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/2}\leqslant$ $\leqslant(E(\lambda^4x_t^4))^{1/4}(E\exp(4\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/4}$. В силу обобщений неравенств Буркхолдера на двупараметрические процессы, полученных в статье [8], $Ex_t^4\leqslant$ $\leqslant CE([x,x]_t)^2$, причем постоянную C можно принять равной $C_0=2^{32}/81$. Поэтому $(E(\lambda^4x_t^4))^{1/4}\leqslant(C_0\lambda^4R^2T_1^2T_2^2)^{1/4}\leqslant\left(\dfrac{2^{16}}{9}\lambda^2RT_1T_2\right)^{1/2}\leqslant\exp\left(\dfrac{2^{16}}{18e}\lambda^2RT_1T_2\right)$. Далее, в силу леммы $(E\exp(4\lambda^2\langle x,x\rangle_t^1))^{1/4}\leqslant(4\exp(8\lambda^2RT_1T_2))^{1/4}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{2}\exp(2\lambda^2RT_1T_2)$. Следовательно, $\beta_t\leqslant\sqrt{2}\exp\left(2\lambda^2RT_1T_2+\dfrac{2^{16}}{18e}\lambda^2RT_1T_2\right)$, и $P\{\sup\limits_{t\leqslant T}x_t\geqslant\alpha T_1T_2\}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}e}{e-1}(\exp(-\alpha\lambda T_1T_2)+\exp(-\alpha\lambda T_1T_2+\lambda^2RCT_1T_2))$, где $C=2+2^{16}/18e$). Если $\alpha\leqslant\sqrt{2R}C$, положим $\lambda=\alpha/(6RC)$, тогда $\lambda<\dfrac{1}{2\sqrt{2R}}$ и

$$P\{\sup_{t\leqslant T}x_t\geqslant\alpha T_1T_2\}\leqslant\frac{\sqrt{2}e}{e-1}\left(\exp\left(-\frac{\alpha^2T_1T_2}{6RC}\right)+\exp\left(-\frac{5\alpha^2T_1T_2}{36RC}\right)\right).$$

Если $\alpha\geqslant\sqrt{2R}C$, положим $\lambda=\dfrac{1}{3\sqrt{2R}}$. Тогда

$$P\{\sup_{t\leqslant T}x_t\geqslant\alpha T_1T_2\}\leqslant\frac{\sqrt{2}e}{e-1}\left[\exp\left(-\frac{\alpha T_1T_2}{3\sqrt{2R}}\right)+\exp\left(-\frac{\alpha T_1T_2}{3\sqrt{2R}}+\frac{CT_1T_2}{18}\right)\right).$$

Оценив $P\{\sup\limits_{t\leqslant T}(-x_t)\geqslant\alpha T_1T_2\}$ аналогичным образом, получим доказательство неравенства (5) для случая $T_1T_2\leqslant 1$. 2. Пусть $T_1T_2\geqslant 1$, $0<\lambda<$ $<\dfrac{1}{2\sqrt{2R}}$, $\tilde{x}_t=\dfrac{x_t}{T_1T_2}$. Тогда

$$P\{\sup_{t\leqslant T}x_t\geqslant\alpha T_1^2T_2^2\}=P\{\sup_{t\leqslant T}\exp(\lambda\tilde{x}_t)\geqslant\exp(\alpha\lambda T_1T_2)\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{e}{e-1}\exp(-\alpha\lambda T_1T_2)(1+\sup_{t\leqslant T}E(\exp(\lambda\tilde{x}_t)\,|\,\lambda\tilde{x}_t\,|)).$$

Оценивая $\beta_t=E(\exp(\lambda\tilde{x}_t)\,|\,\lambda\tilde{x}_t\,|)$ аналогично случаю 1, находим $\beta_t\leqslant$ $\leqslant\sqrt{2}\exp\left(2\lambda^2RT_1T_2+\dfrac{2^{16}}{18e}\lambda^2R\right)\leqslant\sqrt{2}\exp\left(2\lambda^2RT_1T_2+\dfrac{2^{16}}{18e}\lambda^2RT_1T_2\right)$. Продолжая оценки, как и в случае 1, получаем доказательство неравенства (5) для $T_1T_2\geqslant 1$.

1. *Морквенас Р.* Экспоненциальные оценки для распределений некоторых двупараметрических процессов // Лит. мат. сб.— 1983.— **23**, № 2.— С. 141—146.
2. *Cairoli R.*, *Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane // Acta math.— 1975.— **134**, N 1—2.— P. 111—183.
3. *Новиков А. А.* Об одном тождестве для стохастических интегралов // Теория вероятностей и ее применения.— 1972.— **17**, вып. 4.— С. 761—765.
4. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов // Тр. школы-семинара по теории случайных процессов.— Вильнюс, 1975.— Ч. 1.— С. 35—69.
5. *Кисленко С. С.* Некоторые неравенства для мартингальных случайных полей // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1982.— Вып. 26.— С. 62—69.
6. *Wong E.* A calculus of multiparameter martingales and its applications // Lect. Notes Contr. and Inform. Sci.— 1979.— **14**.— P. 73—80.
7. *Nualart D.* Variations quadratiques et inègalitès pour les martingales a deux indices.— Univ. de Barcelona, 1984.— 14 p.— Preprint N 20.
8. *Metraux C.* Quelques inegalites pour martingales a parametre bidimensionnel // Lect. Notes Math.— 1978.— **649**.— P. 170—179.

Киев. ун-т

Получено 28.05.85